Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ "ΕΝΩΣΕΩΣ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ,,

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

ΣΥΝΕΡΓΑΣΙΑ

Α. ΜΕΛΕΓΚΟΒΙΤΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΕΘΝ. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

Θ. ΓΕΡΟΝΤΟΠΟΥΛΟΥ
ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ, ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σ. ΠΑΠΑΔΑΚΗ
Τ. ΕΠΙΜΕΛ. ΠΑΝ)ΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ, ΚΑΘΗΓ. ΚΟΛΛΕΓΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

Χ. ΣΤΥΛΙΑΝΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σ. ΠΑΧΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Γ. ΒΟΥΝΑΤΣΟΥ
ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΕΘΝ. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

Γ. ΠΑΤΡΙΚΙΟΥ
ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΕΘΝ. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Δ. ΚΡΕΜΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΚΟΛΛΕΓΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ Α. ΚΑΡΑΒΙΑ
ΓΩΝΙΑ ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ - ΡΟΥΖΒΕΛΤ 58
ΑΘΗΝΑΙ 1949

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διάβασα τὴν συλλογὴν Ἀσκήσεων Φυσικῆς τῆς Ἑνώσεως Καθηγητῶν καὶ ὑπὸ τὴν ἐπιμέλειαν τοῦ κ. Κρέμου. Καίτοι ἄλλοι εἶναι οἱ δυνάμενοι νὰ ἔχουν βαρύνουσαν γνώμην διὰ τὴν ἀξίαν τοῦ ἔργου, ἐν τούτοις ἡ ἰδική μου εἶναι ὅτι τὸ βιβλίον αὐτό, ἐστερημένον παταγωδῶς τῆς ἐν χρήσει μεγαλοσχημοσύνης, ἔχει ἀξίαν οὐ σμικράν.

Ἡ ἐκλογὴ τῶν ἀσκήσεων εἶναι ἐπιμεμελημένη ἀπὸ τὸν συγγραφέα του, ὅστις φαίνεται — καὶ αὐτὸ δὲν εἶναι καὶ τόσον σύνηθες — νὰ ξέρῃ τὴ δουλειά του.

Θὰ ὠφελήσῃ ἀναντιρρήτως τοὺς σπουδάζοντας νέους.

Ἀθῆναι, 10/7/49.

Θ. ΒΑΡΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητὴς Πανεπ/μίου Θεσ/νίκης

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

607
ΚΛΞ
ΕΤ3
275

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. *Ἀριθμητικὰ καὶ φυσικὰ ποσά.*

Τὰ εἰς τοὺς διαφόρους τύπους καὶ νόμους τῆς Φυσικῆς συναντώμενα ποσὰ εἶναι δύο εἰδῶν: ἀριθμητικὰ καὶ φυσικά.

Ἀριθμητικὰ ποσά, ἢ καθαροὶ ἀριθμοί, καλοῦνται ὅσα ἔχουν μόνον μίαν ἀριθμητικὴν τιμὴν χωρὶς νὰ ἐκφράζουν φυσικήν τινα ὀντότητα, χαρακτηρίζουν δὲ ἁπλῶς μίαν ἀναλογίαν μεταξὺ ἄλλων ποσῶν. Τοιαῦτα ποσὰ εἶναι κατ᾽ ἀρχὴν ὅλοι οἱ ἀριθμητικοὶ συντελεσταὶ οἱ συναντώμενοι εἰς διαφόρους τύπους, ὡς π. χ. ὁ συντελεστὴς $1/_2$ εἰς τὸν τύπον τῆς μεταβαλλομένης κινήσεως

$$S = {}^1/_2\,\gamma t^2$$

Εἰς τὸν τύπον τοῦτον ὁ ἀριθμὸς $1/_2$ δὲν ἐκφράζει οὔτε διάστημα, οὔτε ἐπιτάχυνσιν, οὔτε χρόνον, ἁπλῶς μεταβάλλει τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν τοῦ ὅρου γt^2.

Πλὴν τῶν ἀριθμητικῶν συντελεστῶν τοιαῦτα ποσὰ εἶναι οἱ τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ (ημ, συν κλπ.), αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν γωνιῶν, ὁ ἀριθμὸς $\pi = 3{,}14$ κλπ.

Φυσικὰ ποσὰ καλοῦνται ἀντιθέτως ὅσα ἐκτὸς τῆς ἀριθμητικῆς των τιμῆς ἔχουν ἀνάγκην καὶ ἄλλων γνωρισμάτων διὰ νὰ καθορίσουν μίαν φυσικὴν ἔννοιαν. Οὕτω τὸ διάστημα (S) μιᾶς κινήσεως εἶναι τελείως ἀκαθόριστον ὅταν ἀποδωθῇ εἰς αὐτὸ ἁπλῶς μία ἀριθμητικὴ τιμὴ χωρὶς νὰ συνοδευθῇ καὶ ἀπὸ ἄλλα καθοριστικὰ στοιχεῖα τῆς τιμῆς ταύτης.

Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον ὅταν λέγομεν ὅτι διάστημά τι ἔχει τιμὴν $S = 5$, ἢ ὅτι ἡ μᾶζα ἑνὸς σώματος εἶναι $m = 5$, ἔχομεν τελείως ἀσαφῆ εἰκόνα τῶν δύο τούτων ἐννοιῶν, καθ᾽ ὅσον ἄλλο ἐκφράζει ὁ ἀριθμὸς 5 εἰς τὸ διάστημα καὶ ἄλλο εἰς τὴν μᾶζαν.

Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εἰσαχθοῦν καὶ ἄλλα στοιχεῖα καθορίζοντα ἐπακριβῶς τὴν φύσιν τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν τιμῶν. Οὕτω αἱ ἔννοιαι $S = 5$ καὶ $m = 5$ γίνονται σαφέστεραι διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἐννοιῶν τῆς διαστάσεως ἑκάστου φυσικοῦ ποσοῦ, ὅπου ὁ ὅρος διάστασις ἐκφράζει τὴν φύσιν ἑκάστου μὴ ἀριθμητικοῦ ποσοῦ. Οὕτω δυνάμεθα νὰ διαχωρίσωμεν τὰς δύο ἀνωτέρω ἐκφράσεις φυσικῶν ποσῶν λέγοντες ὅτι εἰς μὲν τὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρώτην περίπτωσιν ὁ ἀριθμὸς 5 ἐκφράζει διάστημα εἰς δὲ τὴν δευτέραν μᾶζαν (ποσὸν ὕλης). Τοῦτο δὲ συμβολικῶς διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

$$S = 5\,L \quad \text{καὶ} \quad m = 5\,M$$

ὅπου τὰ γράμματα L καὶ M, καθορίζοντα ἀντιστοίχως τὸ διάστημα καὶ τὴν μᾶζαν ὁρίζουν λεπτομερέστερα τὴν φύσιν τῶν δύο ἀριθμῶν.

Κατ᾽ αὐτὸν τὸν τρόπον αἱ διαστάσεις εἰς τὴν Φυσικὴν ἀποτελοῦν τὸ καθορίζον τὴν φύσιν ἑκάστου φυσικοῦ ποσοῦ στοιχεῖον.

Συνήθως λαμβάνονται πάντοτε ὡς θεμελιώδεις αἱ διαστάσεις αἱ καθορίζουσαι τὴν μᾶζαν, τὸ μῆκος καὶ τὸν χρόνον, ὁπότε αἱ διαστάσεις ὅλων τῶν ἄλλων ποσῶν ἅτινα εἶναι οὔτε μᾶζα, οὔτε μῆκος, οὔτε χρόνος ἐκφράζονται ὡς συναρτήσεις τῶν τριῶν θεμελιωδῶν.

Συμβολικῶς αἱ διαστάσεις μάζης ἀποδίδονται διὰ τοῦ γράμματος M, αἱ μήκους διὰ τοῦ L καὶ αἱ τοῦ χρόνου διὰ T.

Ἡ ἁπλουστάτη μέθοδος δι᾽ ἧς δύνανται νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς οἱουδήποτε φυσικοῦ ποσοῦ εἶναι ἡ χρησιμοποίησις τοῦ ἁπλουστάτου τύπου, τοῦ συνδέοντος τὸ εἰσέτι ἀκαθόριστον ποσὸν μὲ ἄλλα γνωστῶν διαστάσεων, εἰς τὸν ὁποῖον ἀντικαθίστανται τὰ σύμβολα τῶν γνωστῶν ἀπὸ φυσικῆς ἀπόψεως ποσῶν διὰ τῶν διαστάσεών των.

Οὕτω πρὸς εὕρεσιν τῆς φύσεως τῆς ἐννοίας ταχύτητος (v), ἤτοι πρὸς εὕρεσιν τῶν διαστάσεών της, λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$v = \frac{S}{t}$$

ὁπότε αἱ διαστάσεις τῆς ταχύτητος (συμβολικῶς [v]) θὰ εὑρεθοῦν δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν S καὶ t διὰ τῶν γνωστῶν των διαστάσεων, ὁπότε ἔχομεν

$$[v] = \frac{[S]}{[t]}$$

ὅπου εἶναι $[S] = L$ καὶ $[t] = T$, ἐξ ὧν ἔχομεν:

$$[v] = \frac{L}{T}$$

ἤτοι ἁπλούστερα

$$\boxed{[v] = LT^{-1}}$$

Ἡ συμβολικὴ αὕτη παράστασις $[v] = LT^{-1}$ μᾶς λέγει ὅτι ἄλλη εἶναι ἡ φύσις τῆς ταχύτητος, ἄλλη ἡ τοῦ χρόνυυ $[t] = T$,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄλλη ἡ του διαστήματος $[S] = L$ κλπ. καὶ ὅτι ἕκαστον ποσὸν ὅπερ ἔχει διαστάσεις LT^{-1} εἶναι ὁπωσδήποτε ποσὸν ἐκφράζον ταχύτητα καὶ μόνον.

Κατ᾽ ἀντίστοιχον τρόπον αἱ διαστάσεις τῆς ἐπιταχύνσεως (γ) εὑρίσκονται ἐκ τοῦ τύπου

$$S = 1/2\ \gamma t^2$$

διὰ λύσεως ὡς πρὸς γ:

$$\gamma = \frac{2S}{t^2}$$

$$\gamma = \frac{[S]}{[t^2]}$$

τοῦ 2 παραλειπομένου ἀπὸ ἀπόψεως διαστάσεων ὡς ὄντος καθαροῦ ἀριθμοῦ (ἤτοι $[2] = 1$), ὁπότε εὑρίσκομεν:

$$\gamma = \frac{L}{T^2} \, .$$

$$\boxed{\gamma = LT^{-2}}$$

2. *Μονάδες φυσικῶν ποσῶν.*

Ἕκαστον φυσικὸν ποσὸν ἐκτὸς τοῦ μέτρου τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς του καὶ τῶν διαστάσεών του χαρακτηρίζεται καὶ ἀπὸ μίαν χρησιμοποιουμένην μονάδα, ἥτις λαμβάνεται ὡς μέτρον συγκρίσεως.

Αἱ διάφοροι ἑκάστοτε χρησιμοποιούμεναι μονάδες εἶναι διαφορετικαὶ δι᾽ ἑκάστην διάστασιν καὶ αἱ μονάδες συνθέτων φυσικῶν ποσῶν εἶναι συναρτήσεις τῶν μονάδων τῶν ἁπλῶν θεμελιωδῶν διαστάσεων.

Εἰς τὰς συνήθεις θεωρητικὰς μετρήσεις τῆς Φυσικῆς λαμβάνονται ὡς θεμελιώδεις μονάδες διὰ τὰ M, L καὶ T τὸ γραμμάριον μάζης (gr), τὸ ἑκατοστόμενον (cm) καὶ τὸ δευτερόλεπτον τῆς ὥρας (sec), ὁπότε τὸ σύστημα τοῦτο χρησιμοποιούμενον καὶ διὰ τὴν ἔκφρασιν τῶν μονάδων ἄλλων πλέον πολυπλόκων ἐννοιῶν καλεῖται Σύστημα C. G. S. (ἐκ τῶν ἀρχικῶν ψηφίων τῶν λέξεων centimètre, gramme, seconde).

Οὕτω δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς εἰς τὸ σύστημα C. G. S μονάδας οἱουδήποτε φυσικοῦ ποσοῦ, ἐργαζόμενοι ὡς καὶ μὲ τὰς διαστάσεις, ὁπότε διὰ τὴν ταχύτητα (v) καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν (γ) ἔχομεν:

$$v = \frac{S}{t}\, , \quad v_{cgs} = \frac{cm}{sec} \quad ἢ \quad v_{cgs} = cm\,.\,sec^{-1}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

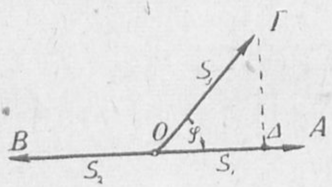
$$\gamma = \frac{2\,S}{t^2}\,,\ \gamma_{cgs} = \frac{cm}{sec^2}\ \text{ἢ}\ \gamma^{cgs} = cm\,.\,sec^{-2}$$

Πλὴν τῶν θεμελιωδῶν τούτων μονάδων τοῦ συστήματος cgs χρησιμοποιοῦνται καὶ ἄλλαι, ὥς π. χ. διὰ τὸ μῆκος τὸ μέτρον (m), τὸ χιλιόμετρον (Km), τὸ χιλιοστόμετρον (mm), τὸ μικρὸν ($\mu = 10^{-3}$ cm), τὸ Ångström ($\text{Å} = 10^{-8}$ cm), κλπ., ὥς εἰς τὸν οἰκεῖον πίνακα φαίνεται.

3. Διανυσματικὰ ποσά.

Πολλὰ φυσικὰ ποσὰ δὲν δύνανται νὰ ὁρισθοῦν ἐπακριβῶς διὰ τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς των καὶ τῶν μονάδων καὶ διαστάσεων, ὥς τοῦτο γίνεται καταφανὲς διὰ τοῦ κατωτέρω παραδείγματος:

Ἔστωσαν δύο ἴσα κατὰ τὸ μέτρον διαστήματα, τὰ $S_1 = 5$ cm καὶ $S_2 = 5$ cm ἔχοντα ἀρχὴν κοινὴν (O) καὶ πέρατα ἀντιστοίχως τὰ A καὶ B (ἴδ. σχ. α). Τὰ διαστήματα ταῦτα εἶναι προφανῶς διάφορα, καθ᾽ ὅσον τὸ μὲν ἓν κατευθύνεται πρὸς τὰ δεξιά, τὸ



Σχ. α.

δ᾽ ἕτερον πρὸς τ᾽ ἀριστερά, ἐνῷ ἐκ τῶν συμβολικῶν ἐκφράσεων $S_1 = 5$ cm καὶ $S_2 = 5$ cm φαίνονται ὥς νὰ ἦσαν ἴσα.

Τοιαῦτα ποσά, χαρακτηριζόμενα ἐκτὸς τῶν ἄλλων καὶ ἀπὸ ὡρισμένην διεύθυνσιν, φοράν, ἀρχὴν καὶ πέρας καλοῦνται δ ι α ν υ σ μ α τ ι κ ὰ π ο σ ά. Πρὸς διάκρισιν τούτων λαμβάνεται ὥς θεμελιώδης μία ὡρισμένη φορὰ (χαρακτηριζομένη ὥς θετικὴ) ὥς πρὸς τὴν ὁποίαν συγκρίνονται αἱ φοραὶ τῶν ἄλλων. Οὕτω, εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα, λογιζομένης ὥς θετικῆς τῆς φορᾶς τοῦ OA τὰ διαστήματα S_1 καὶ S_2 διακρίνονται ἀλλήλων καθ᾽ ὅσον θὰ ἐκφράζωνται πλέον μὲ βάσιν τὴν ὡρισμένην φορὰν ὥς ἑξῆς:

$$S_1 = 5\ \text{cm}$$
$$S_2 = -5\ \text{cm}$$

ὁπότε τὸ κατὰ τὸ μέτρον ἴσον πρὸς ταῦτα διάστημα S_3 θ᾽ ἀποδωθῇ διὰ τῆς ἐκφράσεως

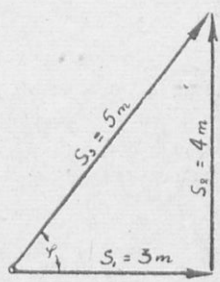
$$S_3 = \frac{(O\Delta)}{\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐνῷ, μὴ ὑπολογιζομένης τῆς φορᾶς τὰ τρία ταῦτα διαστήματα, διάφορα μεταξύ των, θ' ἀπεδίδοντο ὡς ἴσα $S_1 = S_2 = S_3 = 5$ cm.

Πλὴν τοῦ διαστήματος διανυσματικὰ ποσὰ εἶναι ἡ ταχύτης (v), ἡ ἐπιτάχυνσις (γ), ἡ δύναμις (F), ἡ ῥοπὴ δυνάμεων (P) κλπ.

Ἡ γνῶσις ἑνὸς ποσοῦ ἂν εἶναι διανυσματικὸν ἢ ὄχι εἶναι ἀπαραίτητος εἰς τὰς ἀσκήσεις καθ' ὅσον αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ποσῶν τούτων εἶναι διάφοροι τῶν πράξεων τῶν μὴ διανυσματικῶν ποσῶν (μονομέτρων). Οὕτω προσθέτοντες τὰ διαστήματα $S_1 = 3$ m καὶ $S_2 = 4$ m σχηματίζοντα ὀρθὴν γωνίαν (ἴδ. σχ. β), θὰ προκύψῃ τὸ διάστημα $S_3 = 5$ m, σχηματίζον γωνίαν (φ) μὲ τὸ S_1



Σχ. β.

καὶ ὄχι διάστημα ἄλλο $S' = 4 + 3 = 7$ m ὡς θὰ ἔδιδε ἡ ἀλγεβρικὴ πρόσθεσις τῶν τιμῶν τῶν S_1 καὶ S_2.

4. Τεχνικὴ τῆς λύσεως τῶν ἀσκήσεων.

Ι. Ἵνα λυθῇ μία ἄσκησις Φυσικῆς πρέπει κατ' ἀρχὴν μὲ προσοχὴν νὰ καθορισθοῦν τὰ δεδομένα καὶ τὰ ζητούμενα ποσὰ ἵνα ἐκλεγοῦν κατόπιν οἱ κατάλληλοι τύποι οἱ συνδέοντες ὅλα ταῦτα. Ἡ ἀρχικὴ αὐτὴ ἐργασία εἶναι ἀπαραίτητος καθ' ὅσον ἡ πρόχειρος ἀνάγνωσις μιᾶς ἐκφωνίσεως δίδει τὴν ἐντύπωσιν ὅτι τὰ δεδομένα εἶναι ὀλιγότερα τῶν πραγματικῶν.

Οὕτω π. χ. εἰς τὴν ἄσκησιν «Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 καὶ ἐπιβράδυνσιν γ. Πότε θὰ ἠρεμίσῃ;» δίδονται τρία γνωστὰ στοιχεῖα καὶ ὄχι μόνον δύο (v_0 καὶ γ), ἤτοι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης v_0, ἡ ἐπιβράδυνσις γ καὶ ἡ τελικὴ ταχύτης του $v = 0$. Τὸ τελευταῖον τοῦτο δεδομένον εὑρίσκεται εἰς τὴν φράσιν «... πότε θὰ ἠρεμίσῃ» ἐξ ἧς συμπεραίνομεν ὅτι ἡ τελικὴ ταχύτης, εἰς τὴν ἠρεμίαν, θὰ εἶναι μηδενική.

Ὁμοίως εἰς τὴν ἄσκησιν «Ρίπτεται πρὸς τὰ ἄνω βαρὺ σῶμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 καὶ ἐπι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βράδυνσιν τῆς βαρύτητος g. Πότε θὰ ἐπα-
νέλθῃ εἰς τὸ ἔδαφος;» δίδονται πάλιν τρία στοιχεῖα,
ἤτοι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης v_0, ἡ ἐπιβράδυνσις g καὶ τὸ διάστημα S
(τιμῆς S = 0), καθ' ὅσον τὸ συνολικῶς διανυθὲν διάστημα ὑπὸ
τοῦ σώματος ὅταν τοῦτο ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν ἀναχωρήσεώς
του θὰ ἔχῃ, ὡς διανυσματικὸν ποσόν, τιμὴν μηδενικήν, ἤτοι
ὡρισμένην ἀπολύτως διὰ τὴν ἄσκησιν.

II. Μετὰ τὸν καθορισμὸν τῶν δεδομένων καὶ ζητουμένων ἐκλέγονται οἱ περιέχοντες τὰ ποσὰ ταῦτα τύποι τῆς Φυσικῆς καὶ λύονται ὡς πρὸς τὰ ζητούμενα ἐκπεφρασμένα διὰ γραμμάτων, χωρὶς νὰ γίνῃ ἀντικατάστασις τῶν συμβόλων διὰ τῶν ἀριθμητικῶν των τιμῶν.

Οὕτω ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ὁμοία πρὸς τὴν ἀνωτέρω ἄσκη-
σις μὲ ὡρισμένα ἀριθμητικὰ δεδομένα: «Κινητὸν ἀναχω-
ρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα
22 cm/sec καὶ ἐπιβράδυνσιν 2 cm/sec². Πότε θὰ
ἠρεμήσῃ;». Ἵνα εὕρωμεν τὴν λύσιν θεωροῦμεν τὰ δεδομένα
καὶ τὰ ζητούμενα:

ἀρχικὴ ταχύτης	$v_0 = 22$ cm/sec
ἐπιβράδυνσις	$\gamma = 2$ cm/sec^2
τελικὴ ταχύτης	$v = 0$ cm/sec
ζητούμενος χρόνος	$t =$; (ἄγνωστος)

Ἀκολούθως βλέπομεν ὅτι τὰ στοιχεῖα ταῦτα (v_0, γ κλπ.) συν-
δέονται εἰς τὴν κινητικὴν διὰ τοῦ τύπου

$$v = v_0 - \gamma t \qquad (1)$$

Ἀλλὰ δὲν ἀντικαθιστοῦμεν ποτὲ τὸν τύ-
πον, ὡς πολλάκις γίνεται, ἀπ' εὐθείας, ὥστε
ὁ (1) νὰ γίνῃ

$$0 = 22 - 2t$$

εἰ μὴ μόνον λύομεν τοῦτον ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον (t) διατη-
ροῦντες τὰ σύμβολα ὅπως ἔχουν, ὥστε ὁ τύπος (1) νὰ λάβῃ τὴν
μορφὴν

$$t = \frac{v_0 - v}{\gamma} \qquad (2)$$

ὁπότε προβαίνομεν ἀκολούθως εἰς τὴν ἀντικατάστασιν τῶν τι-
μῶν τῶν v, v_0 κλπ. ὡς κατωτέρω θὰ ἴδωμεν.

III. Ἀκολούθως, ὅταν διὰ τῶν ἀνωτέρω ὁ δεδομένος τύπος λάβῃ μορφὴν ἐξισώσεως λελυμένης ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον γίνεται ἡ ἀντικατάστασις τῶν συμβόλων δὶς εἰς τὸν αὐτὸν τύπον. Ἀφ'

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἑνὸς ἡ ἀντικατάστασις γίνεται διὰ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν, ἀφ᾽ ἑτέρου διὰ τῶν μονάδων των, ὁπότε εὑρίσκεται τὸ τελικὸν ποσὸν τελείως καθωρισμένον.

Οὕτω, ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (2) ἔχομεν :

$$t = \frac{22 - 0}{2} \frac{\frac{cm}{sec} - \frac{cm}{sec}}{\frac{cm}{sec^2}}$$

ὁπότε ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις, ἀφ᾽ ἑνὸς εἰς τὰς ἀριθμητικὰς τιμάς, ἀφ᾽ ἑτέρου εἰς τὰ σύμβολα (γνωστοῦ ὄντος, ὅτι $cm - cm = cm$, $cm + cm = cm$ καὶ γενικῶς $L \pm L = L$, $M \pm M = M$ κλπ.), εὑρίσκομεν :

$$t = \frac{22}{2} \frac{\frac{cm}{sec}}{\frac{cm}{sec^2}}$$

$$t = 11 \frac{cm}{sec} \cdot \frac{sec^2}{cm}$$

$$t = 11 \frac{\cancel{cm}}{\cancel{sec}} \cdot \frac{\cancel{sec} . sec}{\cancel{cm}}$$

$$\boxed{t = 11 \; sec}$$

ὁπότε τοῦ τελικοῦ ποσοῦ εὑρίσκεται ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ καὶ ἡ ἀντίστοιχος μονάς της, ἐπιβεβαιωμένης τῆς ὀρθότητος τῆς λύσεως ἐκ τῆς προκυπτούσης καταλλήλου διὰ τὸ ζητούμενον ποσὸν μονάδος.

Ἐν συνόψει δὲ ἡ ἀκολουθητέα πορεία εἶναι:

I. Καθορισμὸς δεδομένων καὶ ζητουμένων.

II. Ἀλγεβρικὴ λύσις τῶν καταλλήλων τύπων ὡς πρὸς τὰ ζητούμενα.

III. Ἀντικατάστασις τῶν ἀλγεβρικῶς εὑρεθέντων ἀγνώστων.

Ἡ τεχνικὴ αὕτη τῆς λύσεως τῶν ἀσκήσεων ἔχει μεγίστην σημασίαν καὶ ἁπλοποιεῖ πολὺ τὰς ἀσκήσεις ἰδίως ὅταν αἱ μονάδες τῶν διαφόρων φυσικῶν ποσῶν δὲν εἶναι τοῦ αὐτοῦ συστήματος, ὁπότε δύναται νὰ λυθῇ οἱαδήποτε ἄσκησις χωρὶς νὰ γίνῃ προηγουμένως μετατροπὴ τῶν διαφόρων μονάδων εἰς μονάδας τοῦ αὐτοῦ συστήματος,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὡς δυνάμεθα νὰ ἴδωμεν εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα ἀσκήσεως:

«Σῶμα μάζης 242 Kg ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας δεχόμενον σταθερὰν δύναμιν 441 Kg*. Ζητεῖται: εἰς πόσον χρόνον θὰ διανύσῃ διάστημα 981 m».

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν κατ᾽ ἀρχὴν τὰ δεδομένα καὶ τὰ ζητούμενα:

μᾶζα	m = 242 Kg
δύναμις	F = 441 Kg*
διάστημα	S = 981 m
χρόνος	t = ; (ἄγνωστος)

ἐν συνεχείᾳ, ἀναλογιζόμενοι ὅτι ἡ κίνησις θὰ εἶναι ἐπιταχυνομένη, ὡς ἐκ τῆς ὑπάρξνως σταθερᾶς δυνάμεως, ἔχομεν

$$S = \frac{\gamma t^2}{2}$$

ὁπότε λύοντες ὡς πρὸς τὸ ζητούμενον (t) εὑρίσκομεν:

$$t = \sqrt{\frac{2S}{\gamma}}$$

ἢ

$$t = \sqrt{\frac{2mS}{F}}$$

καθ᾽ ὅσον εἶναι γ = F/m.

Ἐν συνεχείᾳ ἀντικαθιστοῦμεν τὰ ποσὰ m, S κλπ., ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἂν ἡ ἄσκησις εἶναι ὀρθῶς λελυμένη θὰ πρέπει νὰ εὕρωμεν διὰ τὸν χρόνον (t) μονάδες χρόνου, καθ᾽ ὅσον εἶναι [t] = T. Οὕτω δὲ κατ᾽ ἀρχὴν εὑρίσκομεν

$$t = \sqrt{\frac{2.242.981}{441}}\ \sqrt{\frac{Kg.m}{Kg^*}}$$

καὶ μετατρέποντες τὰ Kg εἰς gr, τὰ Kg* εἰς dynes καὶ τὰ m εἰς cm, σημειοῦντες ἁπλῶς τὰς πράξεις, εὑρίσκομεν:

$$t = \sqrt{\frac{2.242.10^3.981.10^2}{441.981.10^3}}\ \sqrt{\frac{gr.cm}{dynes}}$$

ὅπερ, ἐπειδὴ 1 dyne = 1 gr.cm.sec⁻², δύναται νὰ γραφῇ:

$$t = \sqrt{\frac{2.242.\cancel{10^3}.\cancel{981}.10^2}{441.\cancel{981}.\cancel{10^3}}}\ \sqrt{\frac{\cancel{gr}.\cancel{cm}}{\cancel{gr}.\cancel{cm}.sec^{-2}}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$t = \sqrt{\frac{484.10^2}{441}}\sqrt{sec^2}$$

$$t = \frac{22.10}{21}\sqrt{sec^2}$$

$$\boxed{t = 1,05 \text{ sec}}$$

Ἀντιθέτως διὰ νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄγνωστον τοῦτο δι᾽ ἀπ᾽ εὐθείας ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν θὰ ἔπρεπε δι᾽ ἕκαστον ποσὸν νὰ ἐκτελέσωμεν πολλὰς πράξεις, ἵνα ὅλα τὰ ποσὰ ἐκφρασθοῦν εἰς τὸ σύστημα C. G. S. Τοῦτο δὲ ἀπαιτεῖ πολὺ χρόνον καὶ αὐξάνει τὰ δυνάμενα νὰ ἐμφανισθοῦν σφάλματα, χωρὶς προσέτι νὰ ἐπιβεβαιώνει καὶ τὴν ὀρθότητα τῆς λύσεως ὡς ἐπιτυγχάνεται μὲ τὴν ὡς ἄνω μέθοδον, ὅπου ἡ εὕρεσις τῶν sec διὰ τὸ t ἀποτελεῖ τρόπον τινὰ ἐπαλήθευσιν τοῦ προβλήματος.

5. *Γενικαὶ παρατηρήσεις ἐπὶ τῆς λύσεως ἀσκήσεων.*

Πλὴν τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἀνωτέρω ἀναλυθείσης γενικῆς πορείας δέον πάντοτε νὰ λαμβάνωνται ὑπ᾽ ὄψιν αἱ ἑξῆς παρατηρήσεις :

Ι. Οὐδέποτε ἐπιτρέπεται ἡ εὕρεσις ποσοῦ μὴ ζητουμένου κατὰ τὴν πορείαν τῆς λύσεως μιᾶς ἀσκήσεως. Οὕτω εἰς τὴν ἄσκησιν «Δύναμις 5 dynes ἐνεργεῖ ἐπὶ μάζης 11 gr. Πόσον θὰ εἶναι τὸ ἐντὸς χρόνου 11 sec διανυθὲν διάστημα;» δὲν ἐπιτρέπεται νὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν ἐπιτάχυνσιν ἣν προκαλεῖ ἡ δύναμις καὶ ἀκολούθως ἐκ τῆς ἐπιταχύνσεως τὸ διάστημα, ἀλλ᾽ ἀπ᾽ εὐθείας τὸ διάστημα μὲ μίαν τελικὴν σχέσιν ὡς ἑξῆς :

ἔστωσαν F = 5 dynes
m = 11 gr
t = 11 sec
S = ; (ἄγνωστον)

Ἐκ τῶν σχέσεων

$$\frac{F}{m} = \gamma \text{ καὶ } S = \frac{\gamma t^2}{2}$$

εὑρίσκομεν :

$$S = \frac{Ft^2}{2m}$$

$$S = \frac{5.11^2}{2.11}\,\frac{\text{dynes}\,.\,\text{sec}^2}{\text{gr}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$S = 27{,}5 \, \frac{(\mathrm{gr} \, . \, \mathrm{cm} \, . \, \mathrm{sec}^{-2}) \, . \, \mathrm{sec}^2}{\mathrm{gr}}$$

$$\boxed{S = 27{,}5 \ \mathrm{cm}}$$

ἐνῷ ἂν εὑρίσκαμε πρῶτον τὴν ἐπιτάχυνσιν καὶ κατόπιν τὸ διάστημα θὰ εἴχαμε σφᾶλμα ἀνεξαρτήτως τῆς θελήσεώς μας, ὡς ἐκ τῆς ἀτελείας τῆς διαιρέσεως, διότι θὰ ἦτο:

$$\gamma = \frac{F}{m} = \frac{5}{11} = 0{,}4545 \ldots \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}^2}$$

καὶ

$$S = \frac{1}{2} \gamma t^2 = \frac{0{,}4545}{2} \, . \, 11^2 = 27{,}49725 \ \mathrm{cm}$$

ἀντὶ 27,5 cm.

II. Αἱ ἐκλεγόμεναι μονάδες νὰ εἶναι τοιαῦται ὥστε τὰ διάφορα ποσὰ ν᾽ ἀποδίδωνται δι᾽ ἀριθμῶν οὔτε πολὺ μικρῶν οὔτε πολὺ μεγάλων, ἐκτὸς ἐὰν δὲν ὑπάρχουν πρὸς τοῦτο κατάλληλοι μονάδες ἢ ἐὰν ζητῆται νὰ ἀποδωθῇ ἓν ποσὸν εἰς ὡρισμένον σύστημα.

Οὕτω π. χ. διάστημα S = 12,5 Km οὐδέποτε θ᾽ ἀποδωθῇ εἰς cm (S = 1250000 cm), ἐκτὸς ἐὰν ζητῆται νὰ ἀποδωθῇ εἰς τὸ σύστημα cgs, ὁπότε θὰ γραφῇ $S = 1{,}25 . 10^6$ cm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΙΝΑΞ Α΄
ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΤΥΠΩΝ ΤΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Α΄. ΚΙΝΗΤΙΚΗ

1. *Κίνησις ὁμαλὴ* (s=διάστημα, v=ταχύτης, t=χρόνος):

$$s=vt, \quad v=\frac{s}{t}, \quad t=\frac{s}{v}$$

2. *Κίνησις ὁμαλῶς μεταβαλλομένη* (v_0, s_0=ἀρχικὴ ταχύτης καὶ διάστημα, γ=ἐπιτάχυνσις):

$$v=v_0\pm\gamma t, \quad s=v_0t\pm\frac{1}{2}\gamma t^2, \quad s=s_0\pm v_0t\pm\frac{1}{2}\gamma t^2$$

3. *Κίνησις μεταβαλλομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν β΄ τάξεως* (b):

$$\gamma=\gamma_0\pm bt, \quad v=v_0\pm\gamma_0t\pm\frac{1}{2}bt^2, \quad S=S_0\pm v_0t\pm\frac{1}{2}\gamma_0t^2\pm\frac{1}{6}bt^3$$

4. *Ὁμαλὴ κυκλικὴ κίνησις* (T = περίοδος, N = συχνότης, ω=γων. ταχύτης):

$$N=\frac{1}{T}, \quad v=\omega r, \quad v=\frac{2\pi r}{T}, \quad v=2\pi rN$$

Β΄. ΣΤΑΤΙΚΗ

5. *Συνισταμένη (Σ) δυνάμεων* (φ=γωνία μεταξὺ τῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2):

$$\Sigma=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\,\text{συν}\varphi}$$

6. *Συνθήκη ἰσορροπίας δυνάμεων:*

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\ldots\vec{F}_n=0$$

7. *Σχέσεις παραλλήλων δυνάμεων* (l_1=ἀπόστασις τῆς F_1 ἀπὸ τῆς συνισταμένης):

$$F_1l_1=F_2l_2$$

8. *Ροπὴ ὡς πρὸς σημεῖον* (l=ἀπόστασις τῆς δυνάμεως F ἀπὸ ἀκινήτου σημείου):

$$P=Fl$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

9. *Συνισταμένη ροπῶν :*

$$P=\sqrt{P_1^2+P_2^2+2P_1P_2\,συνφ}$$

Γ'. ΔΥΝΑΜΙΚΗ

10. *Ἀξίωμα ἀδρανείας* (σχέσις m, F, γ) :

$$\frac{F}{m}=γ$$

11. *Ἀξίωμα δράσεως καὶ ἀντιδράσεως* (F=δρῶσα δύναμις, —mγ=δύναμις ἐξ ἀντιδράσεως) :

$$F+(-mγ)=0$$

12. *Ἀξίωμα διαλυτικὸν* (γ=συνισταμένη ἐπιτάχυνσις, $γ_1$, $γ_2$, $γ_3$....=ἐπὶ μέρους ἐπιταχύνσεις) :

$$γ=γ_1+γ_2+γ_3+....$$

13. *Νόμος παγκοσμίας ἕλξεως - Newton* (m_1, m_2=μᾶζαι, F=ἐμφανιζομένη δύναμις, r=ἀπόστασις μαζῶν, K=σταθερά) :

$$F=K\,\frac{m_1m_2}{r^2}$$

14. *Ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος* (M, R=μᾶζα καὶ ἀκτὶς τῆς Γῆς) :

$$g=\frac{KM}{R^2}$$

15. *Σχέσεις βάρους καὶ μάζης :*

$$B=mg$$

16. *Κίνησις βλημάτων :*

α) Μέγιστον ὕψος βλήματος κινουμένου κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἀντίστοιχος χρόνος (v_0=ἀρχικὴ ταχύτης) :

$$h=\frac{v_0^2}{2g},\quad t=\frac{v_0}{g}$$

β) Βλῆμα ριπτόμενον ὑπὸ γωνίαν φ (x=ὁριζόντιον μῆκος, y=κάθετον ὕψος) :

$$x=v_0t\,συνφ$$

$$y=v_0t\,ημφ-\frac{1}{2}gt^2$$

γ) Βεληνεκές :

$$x=\frac{v_0^2ημ\,2φ}{g}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δ) Μέγιστον κατακόρυφον ὕψος:

$$y = \frac{v_0^2 \eta\mu^2\varphi}{2g}$$

ε) Προβολαὶ τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος (ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας x, y):

$$v_x = v_0 \, \sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$v_y = v_0 \, \eta\mu\varphi$$

17. *Κεκλιμένον ἐπίπεδον* (B=βάρος, φ=γωνία κλίσεως, F=κινοῦσα δύναμις, γ=ἐπιτάχυνσις):

$$F = B\eta\mu\varphi, \quad \gamma = g\eta\mu\varphi$$

18. *Μηχανὴ τοῦ Atwood* (B=βάρος ἀρχικόν, β=πρόσθετον βάρος):

$$\gamma = \frac{\beta g}{2B+\beta}$$

19. *Ἔργον* (F=δύναμις, S=μετατόπισις, φ=γωνία μεταξὺ F καὶ S):

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

$$W = F \cdot S \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

20. *Ἰσχὺς* (W=ἔργον, t=χρόνος):

$$J = \frac{W}{t}, \quad J = \frac{FS\sigma\upsilon\nu\varphi}{t}$$

21. *Θέσει ἐνέργεια:*

$$E_\theta = F \cdot S$$

22. *Κινητικὴ ἐνέργεια* (ρύμη):

$$E_\kappa = \frac{1}{2} mv^2$$

23. *Ἀρχὴ διατηρήσεως τῆς μηχανικῆς ἐνεργείας:*

$$E_\theta + E_\kappa = E'_\theta + E'_\kappa = E''_\theta + E''_\kappa = \ldots$$

24. *Γενικὴ ἔκφρασις τοῦ ἀξιώματος διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας* (E=ἐνέργεια, m=μᾶζα, c=ταχύτης τοῦ φωτός):

$$m + E = u \ (\sigma\tau\alpha\vartheta.)$$

$$E = mc^2 \text{(τύπος τοῦ Einstein)}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

25. *Φυγόκεντρος δύναμις* (γ_κ = κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, v=γραμμικὴ ταχύτης περιστροφῆς, r=ἀκτίς):

$$F = \gamma_\kappa \,.\, m, \quad F = \frac{mv^2}{r}, \quad F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

$\gamma = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$

26. *Βάρος Σ σώματος εἰς γεωγραφικὸν πλάτος φ* (συναρτήσει τοῦ βάρους B καὶ τῆς φυγοκέντρου του δυνάμεως F εἰς τὸν ἰσημερινόν):

$$\Sigma = \sqrt{B^2 + (F^2 - 2BF)\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

27. *Ἁπλαῖ μηχαναὶ* (F_2=ὑπερνικουμένη δύναμις, F_1=προσφερομένη δύναμις):

α) Μοχλὸς (l_1, l_2=μοχλοβραχίονες):

$$F_2 = \frac{F_1 l_1}{l_2}$$

$F_1 = F_2 = \frac{B}{2}$

β) Ἐλευθέρα τροχαλία:

$$F_2 = 2F_1$$

γ) Πολύσπαστον n ἐλευθέρων τροχαλιῶν:

$$F_2 = 2nF_1$$

δ) Κοχλίας βήματος h (R=ἀκτὶς τοῦ ζεύγους):

$$F_2 = \frac{4\pi RF_1}{h}$$

ε) Σφὴν (φ=ἄνοιγμα τοῦ σφηνός):

$$F_2 = \frac{F_1}{2\eta\mu\,\frac{\varphi}{2}}$$

28. *Εὐπάθεια ζυγοῦ* (λ=μῆκος φάλαγγος, H=βάρος τοῦ ζυγοῦ, h=ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τὸ ὑπομόχλιον, β=πρόσθετον βάρος, φ=κλίσις):

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta\lambda}{Hh}$$

29. *Μαθηματικὸν ἐκκρεμὲς* (T=περίοδος, l=μῆκος):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

30. *Ροπὴ ἀδρανείας* (m=περιστρεφομένη μᾶζα, r=ἀπόστα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σίς της ἀπὸ τὸ σημεῖον περιστροφῆς, ω΄=γωνιώδης ἐπιτάχυνσις, P=ῥοπὴ ζεύγους):

$$K=m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+\ldots, \quad K=\frac{P}{\omega'}$$

31. *Ῥοπὴ ἀδρανείας κυλίνδρου* (r=ἀκτὶς κυλίνδρου):

$$K=\frac{1}{2}mr^2$$

32. *Ῥοπὴ ἀδρανείας σφαίρας* (r=ἀκτὶς σφαίρας):

$$K=\frac{2}{5}mr^2$$

33. *Φυσικὸν ἐκκρεμὲς* (λ=ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως):

$$T=2\pi\sqrt{\frac{K}{mg\lambda}}$$

34. *Ἐλαστικότης ἕλξεως* (l=μῆκος, λ=ἐπιμήκυνσις, S=τομή, F=δύναμις, E=μέτρον ἐλαστικότητος):

$$\lambda=\frac{Fl}{ES}$$

35. *Ἐλαστικότης στρέψεως* (φ=γωνία στρέψεως, P=δύναμις τοῦ ζεύγους, ρ=ἀκτὶς τοῦ ζεύγους, R=ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου, l=μῆκος τοῦ κυλίνδρου, F=μέτρον στρέψεως):

$$\varphi=\frac{4P\rho l}{\pi FR^4}$$

36. *Θεώρημα κρούσεως* (v_1, v_2=στοιχεῖα πρὸ τῆς κρούσεως, v_1', v_2'=στοιχεῖα μετὰ τὴν κροῦσιν):

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

37. *Τριβὴ* (F=δύναμις τριβῆς, P=δύναμις συμπιέσεως, η=συντελεστὴς τριβῆς, φ=γωνία ἀρχῆς τῆς ὀλισθήσεως):

$$F=P\eta, \quad \eta=\varepsilon\varphi\varphi$$

Δ΄. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

38. *Ἀρχὴ τοῦ Pascal* (P=πίεσις, F=δυνάμεις, S=ἐπιφάνειαι):

$$P=\frac{F_1}{S_1}=\frac{F_2}{S_2}=\frac{F_3}{S_3}=\ldots$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

25. *Φυγόκεντρος δύναμις* (γ_κ = κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, v=γραμμικὴ ταχύτης περιστροφῆς, r=ἀκτίς):

$$F = \gamma_\kappa \cdot m, \quad F = \frac{mv^2}{r}, \quad F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$$

26. *Βάρος Σ σώματος εἰς γεωγραφικὸν πλάτος φ* (συναρτήσει τοῦ βάρους Β καὶ τῆς φυγοκέντρου του δυνάμεως F εἰς τὸν ἰσημερινόν):

$$\Sigma = \sqrt{B^2 + (F^2 - 2BF)\sigma\upsilon\nu^2\varphi}$$

27. *Ἁπλαῖ μηχαναὶ* (F_2=ὑπερνικουμένη δύναμις, F_1=προσφερομένη δύναμις):

α) Μοχλὸς (l_1, l_2=μοχλοβραχίονες):

$$F_2 = \frac{F_1 l_1}{l_2}$$

$F_1 = F_2 = \frac{B}{2}$

β) Ἐλευθέρα τροχαλία:

$$F_2 = 2F_1$$

γ) Πολύσπαστον n ἐλευθέρων τροχαλιῶν:

$$F_2 = 2nF_1$$

δ) Κοχλίας βήματος h (R=ἀκτὶς τοῦ ζεύγους):

$$F_2 = \frac{4\pi R F_1}{h}$$

ε) Σφὴν (φ=ἄνοιγμα τοῦ σφηνός):

$$F_2 = \frac{F_1}{2\eta\mu\frac{\varphi}{2}}$$

28. *Εὐπάθεια ζυγοῦ* (λ=μῆκος φάλαγγος, H=βάρος τοῦ ζυγοῦ, h=ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τὸ ὑπομόχλιον, β=πρόσθετον βάρος, φ=κλίσις):

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta\lambda}{Hh}$$

29. *Μαθηματικὸν ἐκκρεμὲς* (T=περίοδος, l=μῆκος):

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

30. *Ροπὴ ἀδρανείας* (m=περιστρεφομένη μᾶζα, r=ἀπόστα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σίς της ἀπὸ τὸ σημεῖον περιστροφῆς, ω′=γωνιώδης ἐπιτάχυνσις, P=ροπὴ ζεύγους):

$$K=m_1r_1^2+m_2r_2^2+m_3r_3^2+\ldots, \quad K=\frac{P}{\omega'}$$

31. *Ροπὴ ἀδρανείας κυλίνδρου* (r=ἀκτὶς κυλίνδρου):

$$K=\frac{1}{2}mr^2$$

32. *Ροπὴ ἀδρανείας σφαίρας* (r=ἀκτὶς σφαίρας):

$$K=\frac{2}{5}mr^2$$

33. *Φυσικὸν ἐκκρεμὲς* (λ=ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως):

$$T=2\pi\sqrt{\frac{K}{mg\lambda}}$$

34. *Ἐλαστικότης ἕλξεως* (l=μῆκος, λ=ἐπιμήκυνσις, S=τομή, F=δύναμις, E=μέτρον ἐλαστικότητος):

$$\lambda=\frac{Fl}{ES}$$

35. *Ἐλαστικότης στρέψεως* (φ=γωνία στρέψεως, P=δύναμις τοῦ ζεύγους, ρ=ἀκτὶς τοῦ ζεύγους, R=ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου, l=μῆκος τοῦ κυλίνδρου, F=μέτρον στρέψεως):

$$\varphi=\frac{4P\rho l}{\pi F R^4}$$

36. *Θεώρημα κρούσεως* (v_1, v_2=στοιχεῖα πρὸ τῆς κρούσεως, v_1', v_2'=στοιχεῖα μετὰ τὴν κροῦσιν):

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

37. *Τριβὴ* (F=δύναμις τριβῆς, P=δύναμις συμπιέσεως, η=συντελεστὴς τριβῆς, φ=γωνία ἀρχῆς τῆς ὀλισθήσεως):

$$F=P\eta, \quad \eta=\varepsilon\varphi\varphi$$

Δ′. ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

38. *Ἀρχὴ τοῦ Pascal* (P=πίεσις, F=δυνάμεις, S=ἐπιφάνειαι):

$$P=\frac{F_1}{S_1}=\frac{F_2}{S_2}=\frac{F_3}{S_3}=\ldots$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

W = P.l

39. *Ὑδραυλικὸν πιεστήριον :*

$$F_2 = \frac{F_1 S_2}{S_1}$$

40. *Ὑδροστατικὴ πίεσις P* (h=ὕψος ἀπὸ τῆς ἐλευθ. ἐπιφανείας, ε=εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ) :

$$P = h\varepsilon$$

41. *Θεμελιῶδες θεώρημα τῆς ὑδροστατικῆς :*

$$P = \varepsilon\,(h_2 - h_1)$$

42. *Ἀρχὴ τοῦ Ἀρχιμήδους* (Α=ἄνωσις, V=ἐκτοπιζόμενος ὄγκος, ε=εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ) :

$$A = \varepsilon V$$

43. *Πυκνότης - Εἰδικὸν βάρος :*

$$d = \frac{m}{V}, \quad \varepsilon = \frac{B}{V}, \quad \varepsilon = dg$$

44. *Συγκοινωνοῦντα δοχεῖα :*

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

45. *Ἀνύψωσις ἐντὸς τριχοειδῶν* (νόμος τοῦ Jurin) :

$$h = \frac{2\alpha}{rdg}$$

Ε΄. ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

46. *Θεώρημα τοῦ Bernouilli :*

$$\frac{P_1}{dg} + h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{dg} + h_2 + \frac{v_2^2}{2g}$$

47. *Νόμος τοῦ Poiseuille* (Q=παροχή, r=ἀκτὶς τομῆς, P=πίεσις, l=μῆκος σωλῆνος, η=συντελεστὴς ἰξώδους) :

$$Q = \frac{\pi r^4 P}{8\eta l}$$

48. *Ἀριθμὸς τοῦ Reynolds* (d=πυκνότης, v=ταχύτης ροῆς, r=ἀκτὶς τομῆς) :

$$R = \frac{dvr}{\eta}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΣΤ'. ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

49. *Νόμος τῶν Boyle - Mariotte:*

$$p_1 v_1 = p_2 v_2$$

50. *Μῖξις ἀερίων:*

$$pv = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots p_n v_n$$

51. *Ἐξίσωσις ἀεραντλίας* (p_0=ἀρχικὴ πίεσις, V=ὄγκος κυλίνδρου, n=ἀριθμὸς παλινδρομῶν):

$$P_n = p_0 \left(\frac{V}{V+v}\right)^n$$

Ζ'. ΘΕΡΜΟΤΗΣ

52. *Σχέσις θερμότητος - θερμοκρασίας* (T = θερμοκρασία, Q=θερμότης, C=θερμοχωρητικότης):

$$T = \frac{Q}{C}$$

53. *Θερμομετρικαὶ κλίμακες* (T = ἀπόλυτος, t_C = Κελσίου, t_R = Reumer, t_F = Fahrenheit):

$$T = t_C + 273$$

$$t_R = \frac{4}{5} t_C$$

$$t_F = \frac{9}{5} t_C + 32$$

54. *Γραμμικὴ διαστολὴ* (λ=γραμμικὸς συντελ. διαστολῆς, Λ_t = τελικὸν μῆκος, Λ_α = ἀρχικὸν μῆκος, t = μεταβολὴ θερμοκρασίας):

$$\Lambda_t = \Lambda_\alpha (1 + \lambda t)$$

55. *Ἐπιφανειακὴ διαστολὴ* (σ=συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς διαστολῆς):

$$S_t = S_\alpha (1 + \sigma t), \quad \sigma = 2\lambda + \lambda^2, \quad \sigma \simeq 2\lambda$$

56. *Κυβικὴ διαστολὴ στερεῶν* (κ=συντελ. κυβικ. διαστολῆς):

$$V_t = V_\alpha (1 + \kappa t)$$

$$\kappa = 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3, \quad \kappa \simeq 3\lambda, \quad \kappa \simeq \frac{3\sigma}{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

57. *Διαστολὴ ὑγρῶν* ($\varkappa_\varphi$ = φαινομεν. συντελεστής, $\varkappa_\alpha$ = ἀπόλυτος, $\varkappa_\sigma$ = συντελ. διαστολῆς τοῦ δοχείου):

$$\varkappa_\alpha = \varkappa_\varphi + \varkappa_\sigma$$

58. *Διαστολὴ τῶν ἀερίων* (Νόμος τοῦ Gay Lussac):

$$V_t = V_\alpha \left(1 + \frac{t}{273}\right)$$

$$P_t = P_\alpha \left(1 + \frac{t}{273}\right)$$

59. *Νόμος τῶν τελείων ἀερίων:*

$$PV = RT \quad \text{(δι' ἓν mol)}$$

$$PV = nRT \quad \text{(διὰ n mol)}$$

60. *Εἰδικὴ θερμότης:*

$$\varepsilon = \frac{Q}{m(t_2 - t_1)}$$

61. *Θερμοχωρητικότης:*

$$C = \varepsilon m$$

62. *Ἀτομικαὶ - μοριακαὶ θερμότητες* (α=ἀτομικὸν βάρος, μ=μοριακὸν βάρος):

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon \,.\, \alpha$$

$$\varepsilon_\mu = \varepsilon \,.\, \mu$$

63. *Νόμος τοῦ Dalton:*

$$P_v = P_v{}' + P_v{}''$$

64. *Ταχύτης ἐξατμίσεως* (S=ἐπιφάνεια, F=μεγίστη τάσις, f=στιγμιαία τάσις, H=ἀτμοσφ. πίεσις, k=σταθερά):

$$v = \frac{kS(F - f)}{H}$$

65. *Ἀνηγμένα ποσὰ* ($T_\varkappa$, $P_\varkappa$, $V_\varkappa$ = κρίσιμα ποσά):

α) Ἀνηγμένη θερμοκρασία:

$$\tau = \frac{T}{T_\varkappa}$$

β) Ἀνηγμένη πίεσις:

$$\pi = \frac{P}{P_\varkappa}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ) Ἀνηγμένος ὄγκος:

$$\omega = \frac{V}{V_\varkappa}$$

66. *Νόμος πραγματικῶν ἀερίων (Van der Waals):*

$$\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right)\left(\omega - \frac{1}{3}\right) = \frac{8\tau}{3}$$

67. *Ὠσμωτικὴ πίεσις* (m=διαλυθεῖσα μᾶζα, R=σταθερὰ ἀερίων, T=ἀπόλ. θερμοκρασία, μ=μοριακὸν βάρος τοῦ m, V=ὄγκος διαλύματος):

$$P = \frac{mRT}{\mu V}$$

68. *Πρῶτον θερμοδυναμικὸν ἀξίωμα (Meyer - Joule):*

$$W = \eta Q$$

69. *Ἀδιαβατικὴ μεταβολὴ ἀερίου:*

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$$

$$\gamma = C_p / C_v$$

70. *Δεύτερον θερμοδυναμικὸν ἀξίωμα - Carnot* (Q′=μετατρέψιμος εἰς ἔργον θερμότης, Q=συνολικὴ θερμότης):

$$Q' = Q\left(\frac{T_2 - T_1}{T_2}\right)$$

71. *Τρίτον θερμοδυναμικὸν ἀξίωμα (Nerst) - Στοιχειώδης τροπὴ (Ἐντροπία):*

$$S = \frac{Q}{T}, \quad S_{T=0} = 0$$

72. *Στοιχειῶδες ποσὸν (quantum) ἐνεργείας* (E=ἐνέργεια, h=σταθερὰ τοῦ Plank, ν=συχνότης):

$$E = h\nu$$

73. *Διάδοσις θερμότητος δι᾽ ἀγωγῆς (Fourier):*

$$Q = \varkappa \frac{S(t_2 - t_1)}{\Lambda}$$

74. *Θερμοκρασία ψυχομένης ῥάβδου εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ σημείου θερμοκρασίας t_0:*

$$t = t_0 \,.\, e^{-ax}$$

75. *Ἀπόψυξις θερμοῦ σώματος:*

$$v = \frac{d\theta}{dt} = -\,k\,(\theta_2 - \theta_1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η'. ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

76. *Ταχύτης ἤχου ἐντὸς στερεοῦ (Newton) :*

$$v = \sqrt{\frac{E}{d}}$$

77. *Ταχύτης ἤχου ἐντὸς ἀερίων (Laplace) :*

$$v = \sqrt{\frac{p}{d} : \gamma}$$

78. *Συχνότης σειρῆνος* (ν_1=συχνότης περιστροφῆς, ν_2=ἀριθμὸς ὀπῶν) :

$$N = \nu_1 \cdot \nu_2$$

79. *Σχέσεις ταχύτητος, μήκους κύματος καὶ συχνότητος :*

$$\lambda = vT, \quad \lambda = \frac{v}{N}$$

80. *Συχνότης χορδῆς :*

$$N = \frac{1}{2\lambda r}\sqrt{\frac{f}{\pi d}}$$

81. *Συχνότης ἤχου ἀνοικτοῦ σωλῆνος :*

$$N = \frac{v}{2\Lambda}, \quad N = \frac{nv}{2\Lambda}$$

82. *Συνχνότης ἤχου κλειστοῦ σωλῆνος :*

$$N = \frac{v}{4\Lambda}, \quad N = \frac{(2n-1)v}{4\Lambda}$$

Θ'. ΟΠΤΙΚΗ

83. *Στοιχειῶδες ποσὸν φωτὸς (quantum φωτὸς ἢ φωτόνιον):*

$$E = h\nu$$

84. *Μᾶζα φωτονίου :*

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

85. *Μέτρησις τῆς ταχύτητος τοῦ φωτός :*

α) Κατὰ Roemer :

$$c = \frac{S}{t_1 - t_2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

β) Κατὰ Fizeau:

$$c = 4SN\nu$$

γ) Διὰ τῆς ἀποπλανήσεως:

$$c = \frac{v}{\varepsilon\varphi\varphi}$$

86. *Φωτομετρικαὶ σχέσεις* (Φ=φωτ. ροή, I=ἰσχύς, ε=φωτισμός, e=λαμπρότης, φ=στερεὰ γωνία):

$$I = \frac{\Phi}{\varphi}, \quad I = \frac{\Phi_{o\lambda}}{4\pi}$$

$$\varepsilon = \frac{\Phi}{S}, \quad e = \frac{I}{S}$$

87. *Σχέσεις ἰσχύων καὶ ἀποστάσεων πηγῶν:*

$$\frac{I_1}{\lambda_1^2} = \frac{I_2}{\lambda_2^2}$$

88. *Ἀριθμὸς εἰδώλων εἰς ὑπὸ γωνίαν ἐπίπεδα κάτοπτρα:*

$$r = \frac{360}{\varphi^0} - 1$$

89. *Σφαιρικὰ κάτοπτρα:*

α) Σχέσις ἑστιακῆς ἀποστάσεως καὶ ἀκτῖνος καμπυλότητος:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\varrho$$

β) Σχέσις ἀποστάσεως ἀντικειμένων καὶ εἰδώλων:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}$$

γ) Σχέσις μεγεθῶν καθέτων πρὸς τὸν κύριον ἄξονα:

$$A'B' = \frac{AB \cdot \pi'}{\pi}$$

δ) Σχέσις μεγεθῶν παραλλήλων πρὸς τὸν κύριον ἄξονα:

$$A'B' = \frac{AB \cdot \pi'^2}{\pi^2}$$

90. *Διάθλασις:*

$$n = \frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta}, \quad n = \frac{c_1}{c_2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

91. *Ὁλικὴ ἀνάκλασις - Ὁρικὴ γωνία :*

$$\eta\mu\omega = \frac{1}{\pi}$$

92. *Πρίσματα :*

$$E = \pi + \pi' - A$$

$$E \backsimeq (n - 1) A$$

93. *Ἐλαχίστη ἐκτροπή :*

$$n = \frac{\eta\mu \dfrac{E+A}{2}}{\eta\mu \dfrac{A}{2}}$$

94. *Σχέσις ἑστιακῆς ἀποστάσεως φακοῦ καὶ στοιχείων τούτου :*

$$\frac{1}{\varepsilon} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

95. *Ἰσχὺς φακοῦ :*

$$F = \frac{1}{\varepsilon}$$

96. *Σχέσεις μεγεθῶν ἀντικειμένων καὶ εἰδώλων διὰ φακῶν :*

α) Καθέτων :

$$A'B' = \frac{AB \,.\, \pi'}{\pi}$$

β) Παραλλήλων :

$$A'B' = \frac{AB \,.\, \pi'^2}{\pi^2}$$

97. *Μεγέθυνσις ἁπλοῦ μικροσκοπίου :*

$$\mu = \frac{\vartheta}{\vartheta'}$$

98. *Μεγέθυνσις συνθέτου μικροσκοπίου :*

$$\mu = \frac{\lambda \,.\, \alpha}{\varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2}$$

99. *Μέτρησις μήκους κύματος φωτὸς διὰ τῶν κατόπτρων τοῦ Fresnel :*

$$\lambda = \frac{x \,.\, \varepsilon\varphi\varphi}{\nu}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

100. *Μέτρησις μήκους κύματος φωτὸς διὰ τῶν φραγμάτων :*

$$\lambda = \frac{\alpha \, . \, \eta\mu\varphi}{\nu}$$

101. *Γωνία πολώσεως (Brewster):*

$$\varepsilon\varphi\pi = n$$

102. *Στροφικὴ πόλωσις :*

$$\alpha = \frac{[\alpha] \, . \, \lambda \, . \, \beta}{1000}$$

Ι'. ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

103. *Νόμος ἠλεκτροστατικῶν ἕλξεων (Coulomb):*

$$F = \pm K \frac{Q_1 \, . \, Q_2}{r^2}$$

104. *Ἠλεκτρικὴ πυκνότης :*

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

105. *Ἔντασις ἠλεκτρικοῦ πεδίου :*

$$H = \frac{F}{Q}$$

106. *Δυναμικὸν πεδίου καὶ ἀγωγοῦ :*

$$V = \frac{W}{Q}, \quad V = \frac{Q}{C}$$

107. *Χωρητικότης ἀγωγοῦ :*

$$C = \frac{Q}{V}$$

108. *Χωρητικότης σφαιρικοῦ πυκνωτοῦ :*

$$C = k \frac{S}{4\pi d}$$

109. *Σχέσις εἰδικῆς ἐπαγωγικῆς ἱκανότητος (k) καὶ δείκτου διαθλάσεως (n) - Νόμος τοῦ Maxwell :*

$$k = n^2$$

110. *Σύνδεσις πυκνωτῶν ἐν σειρᾷ :*

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} + \ldots, \quad C = \frac{c}{\nu}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

111. *Σύνδεσις πυκνωτῶν ἐν παραλλήλῳ :*

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots, \quad C = \nu c$$

112. *Σύνδεσις μικτὴ ὁμοίων πυκνωτῶν* (ν=ἀριθ. πυκνωτῶν ἑκάστης σειρᾶς, μ=ἀριθμὸς σειρῶν) :

$$C = \frac{\mu c}{\nu}$$

113. *Ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια πυκνωτοῦ :*

$$W = \frac{1}{2} CV^2, \quad W = \frac{Q^2}{2C}$$

ΙΑ'. ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

114. *Σχέσεις ἐντάσεως ρεύματος, ποσότητος καὶ χρόνου :*

$$I = \frac{Q}{t}$$

115. *Ἠλεκτρικὴ ἀντίστασις :*

$$R = \varrho \frac{\lambda}{\sigma}$$

116. *Νόμος τοῦ Ohm :*

$$I = \frac{V}{R}, \quad I = \frac{V\sigma}{\varrho\lambda}$$

117. *Ἔντασις ρεύματος εἰς κύκλωμα τροφοδοτούμενον ὑπὸ ἠλεκτρ. στήλης* (v, r, n=ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις, ἐσωτερικὴ ἀντίστασις καὶ ἀριθμὸς στοιχείων, R=ἐξωτερικὴ ἀντίστασις) :

α) Στήλη ἐν σειρᾷ :

$$I = \frac{nv}{R + nr}$$

β) Στήλη ἐν παραλλήλῳ :

$$I = \frac{v}{R + \frac{r}{n}}$$

118. *Σχέσεις ἠλεκτρ. ἔργου καὶ ἰσχύος* (Q=ἠλεκτρ. ποσότης, V=διαφορὰ δυναμικοῦ, W=ἔργον, J=ἰσχύς, t=χρόνος, Θ=θερμότης, η=μηχανικὸν ἰσοδύναμον θερμότητος) :

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$W = QV, \quad W = IVt, \quad W = IQR$$

$$W = I^2Rt, \quad \Theta = \frac{I^2Rt}{\eta} \quad \text{(Νόμος τοῦ Joule)}$$

$$J = IV, \quad J = I^2R$$

119. *Ἠλεκτρόλυσις* (m=ἠλεκτρολυομένη μᾶζα, σ=σθένος, A=ἀτομικὸν βάρος ἰόντος):

$$m = \frac{A \cdot I \cdot t}{96510 \cdot \sigma}$$

120. *Ταχύτης ἠλεκτρονίου* (m, e=μᾶζα καὶ φορτίον ἠλεκτρονίου, V=διαφ. δυναμικοῦ):

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

121. *Συχνότης ἀκτίνων Roentgen* (h=σταθερὰ τοῦ Planck, ν=συχνότης):

$$\nu = \frac{eV}{h}$$

ΙΒ΄. ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

122. *Σχέσεις μαγνητικῶν ποσῶν* (M=μαγν. μᾶζα, F=δύναμις, H, B = ἐντάσεις μαγνητικοῦ πεδίου, Φ = μαγν. ῥοή, P=μαγνητ. ῥοπή, J=μαγνήτισις, V=ὄγκος μαγνήτου, S=τομή):

$$F = K\frac{M_1M_2}{r^2}, \quad H = \frac{F}{M}, \quad H = \frac{\Phi}{S}$$

$$P = M\lambda, \quad J = \frac{P}{V}, \quad \mu = \frac{B}{H}, \quad \varkappa = \frac{J}{H}$$

123. *Νόμος τοῦ Laplace:*

$$F = k\frac{I.m.ds.\eta\mu\varphi}{r^2}$$

124. *Νόμος τῶν Biot-Savart:*

$$F = k\frac{2Im}{r}$$

125. *Ἔντασις πεδίου ἐντὸς σωληνοειδοῦς:*

$$H = 1,25nI$$

126. *Ἐπίδρασις μαγν. πεδίου ἐπὶ ἠλεκτρ. ῥεύματος:*

$$f = H.I.ds.\eta\mu\varphi$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

127. *Ἐναλλασσόμενα ρεύματα :*

$$I = I_\mu \,.\, \eta\mu 2\pi N t, \quad I_\varepsilon = \frac{I_\mu}{\sqrt{2}}, \quad V_\varepsilon = \frac{V_\mu}{\sqrt{2}}$$

128. *Σύνθετος ἀντίστασις* (L=συντελ. αὐτεπαγωγῆς, ω=κυκλικὴ συχνότης, C=χωρητικότης) :

α) Κύκλωμα μὲ L μόνον :

$$R' = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

β) Κύκλωμα μὲ C μόνον :

$$R' = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}}$$

γ) Κύκλωμα μὲ C καὶ L :

$$R' = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

129. *Συνθήκη συντονισμοῦ (Thomson) :*

$$n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

130. *Σχέσεις στατικῶν μεταμορφωτῶν (ἄνευ ἀπωλείας) :*

$$I_1 V_1 = I_2 V_2, \quad I_1 N_1 = I_2 N_2$$

131. *Σχέσις μήκους κύματος καὶ συχνότητος κύματος :*

$$\lambda = \frac{c}{N}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΙΝΑΞ Β′
ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΑΡΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ

Σταθεραὶ	*Σύμβολα*	*Τιμαὶ*
Σταθερὰ παγκοσμίας ἕλξεως (Newton)	K, G	$6{,}685.10^{-8}$ cm³/gr. sec²
Μέση ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος	g	981 cm/sec²
Σταθερὰ cgs ἐνεργείας/μάζης	c^2	9.10^2 cm²/sec²
Μέσος συντελεστὴς διαστολῆς τῶν ἀερίων	α	1/273,2 $grad^{-1}$
Μοριακὸς ὄγκος ἀερίων	v	22400 cm³
Ἀπόλυτον μηδὲν	T=0	−273,2°C
Μέση ἀτομικὴ θερμότης	C_a	6,2 cal/grad
Μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος	J, n	427 Kg*m/Kcal, 4,189 Joule/cal
Παγκοσμία σταθερὰ τῶν ἀερίων	R	0,83 Kg*m/grad
Λόγος εἰδικῶν θερμοτήτων τοῦ ἀέρος (Cp/Cv)	γ	1,41
Σταθερὰ δράσεως (Planck)	h	$6{,}62.10^{-27}$ erg. sec
Μέση ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα (t=0°C, P=1 atm)	v	332 m/sec
Ταχύτης τοῦ φωτὸς	c	$2{,}998.10^{10}$ cm/sec ($\simeq 3.10^{10}$ cm/sec)
Σταθερὰ τοῦ Boltzmann	k	$1{,}38.10^{-16}$ erg/grad
Φορτίον Ἠλεκτρονίου	e	$4{,}806.10^{-10}$ ΗΣΜ ποσότ.
Σταθερὰ τοῦ Faraday	F	96510,8 Coulomb
Μᾶζα ἠλεκτρονίου	m_e	$0{,}911.10^{-27}$ gr
Μᾶζα πρωτονίου	m_p	$1{,}673.10^{-24}$ gr
Μᾶζα οὐδετερονίου	m_n	$1{,}675.10^{-24}$ gr

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΙΝΑΞ Γ'

ΣΥΜΒΟΛΩΝ, ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΩΝ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΠΟΣΩΝ ΤΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Ποσὰ	*Σύμβολα*		*Διαστάσεις*	*Μονάδες CGS*	*Πρακτικαὶ μονάδες*
	Συνήθη	*Εἰδικῶν περι-πτώσεων*			
Διάστημα	S	h, x, y	L	cm	m=100 cm, Km=1000 m
Μᾶζα	m	M	M	gr	Kg=1000 gr, Tonn=1000 Kg
Χρόνος	t		T	sec	min=60 sec, ὥρα (h)=60 min
Ἐπιφάνεια	E	S	L^2	cm^2	m^2=10.000 cm^2, Km^2=1.000.000 m^2
Ὄγκος	V	Ω	L^3	cm^3	m^3=1.000.000 cm^3, λίτρον (lit)=1000 cm^3
Ταχύτης	v		LT^{-1}	cm/sec	Km/h=27,77 cm/sec
Ἐπιτάχυνσις	γ	a	LT^{-2}	cm/sec^2	m/sec^2=100 cm/sec^2
Περίοδος	T		T	sec	min=60 sec
Συχνότης	N	ν, η	T^{-1}	1/sec	1/min=60 1/sec
Γωνιώδης Ταχύτης	ω		»	»	» »
Γωνιώδης Ἐπιτάχυνσις	ω'		T^{-2}	$1/sec^2$	
Δύναμις	F	p, f, Σ	MLT^{-2}	$grcm/sec^2$=dyne	gr*=981 dynes, Kg*=1000 gr*, Tonn*=1000 Kg*
Βάρος	B	P	»	» »	» » » » » »
Ροπὴ	P		ML^2T^{-2}	$grcm^2/sec^{-2}$=erg	joule=10^7 erg, Kg*m=9,81 joules
Ἔργον	W		»	» »	» » » »
Ἐνέργεια	E		»	» »	» » » »
Ἰσχὺς	J	I	ML^2T^{-3}	$grcm^2/sec^3$=erg/sec	watt=joule/sec, HP=75 Kg*m/sec
Ροπὴ ἀδρανείας	K		ML^2	$grcm^2$	$Kg.m^2=10^7$ $grcm^2$
Πίεσις	P	p	$ML^{-1}T^{-2}$	$gr/cmsec^2$=$dyne/cm^2$	Atm=Kg^*/cm^2=9,81.10^5 $dynes/cm^2$
Πυκνότης	d	D	ML^{-3}	gr/cm^3	gr/cm^3
Εἰδικὸν βάρος	ε	γ	$ML^{-2}T^{-2}$	gr/cm^2sec^2=$dyne/cm^3$	gr^*/cm^3=981 $dynes/cm^3$
Συντελ. ἐπιφανειακῆς τάσεως	α		MT^{-2}	gr/sec^2	dyne/cm=erg/cm^2=gr/sec^2

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΙΝΑΞ Δ′

ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΩΝ ΘΕΡΜΙΚΩΝ ΠΟΣΩΝ

Ποσὰ	*Σύμβολα*		*Μονάδες*
Θερμότης	Q	Θ	cal, K cal (Cal)= =1000 cal
Θερμοκρασία	t	ϑ	grad C (βαθμοὶ)
» ἀπόλυτος	T		grad=273+grad C
Γραμμ. συντελεστὴς διαστολῆς	λ		1/grad
Ἐπιφαν. » »	σ		»
Κυβικ. » »	κ		»
Εἰδικὴ θερμότης	ε	c	cal/gr. grad
Λανθάνουσα θερμότης (εἰδ.)	q		cal/gr
Ἀνηγμένος Ὄγκος	ω		1
Ἀνηγμένη πίεσις	π		1
» θερμοκρασία	τ		1
Ἰσοδύναμον θερμότητος - ἔργου	η	J	erg/cal, joule/cal, Kg*m/Cal
Παγκοσμία Σταθερὰ τῶν ἀερίων	R		erg/grad, joule/grad, Kg*m/grad

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Π Ι Ν Α Ξ Ε΄

ΣΥΜΒΟΛΩΝ ΚΑΙ ΜΟΝΑΔΩΝ ΤΩΝ ΚΥΡΙΩΤΕΡΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΠΟΣΩΝ

Ποσὰ	*Σύμβολα*	*Μονάδες Ἠλεκτροστατικαὶ (CGS)*	*Μονάδες πρακτικαὶ*
Ἠλεκτρικὴ ποσότης	Q, q	$gr^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{3}{2}} . sec^{-1}$	Coulomb $= 3.10^9$ ΗΣΜ ποσότητος
Ἔντασις πεδίου	H	$gr^{\frac{1}{2}} . cm^{-\frac{1}{2}} . sec^{-1}$	gr*/Coulomb $= 327.10^{-9}$ ΗΣΜ ἐντ. πεδίου
Δυναμικὸν καὶ Διαφορὰ δυναμικοῦ	V	$gr^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{1}{2}} . sec^{-1}$	Volt $= 1/300$ ΗΣΜ δυναμικοῦ
Ἠλεκτροχωρητικότης	C	cm	Farad $= 9.10^{11}$ ΗΣΜ χωρητικότητος
Ἔντασις ρεύματος	I	$gr^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{3}{2}} . sec^{-2}$	Ampère $= 3.10^9$ ΗΣΜ ἐντ. ρεύματος
Ἀντίστασις ἀγωγοῦ	R	$cm^{-1} . sec$	Ohm $= 1/9.10^{11}$ ΗΣΜ ἀντιστάσεως
Εἰδικὴ ἀντίστασις ὑλικοῦ	ϱ	sec	Ohm . cm $= 1/9.10^{11}$ ΗΣΜ εἰδ. ἀντιστάσεως
Ἠλεκτρ. Ἔργον	W	erg	Joule $= 10^7$ erg
Ἠλεκτρ. Ἰσχὺς	J	erg/sec	watt $= 10^7$ erg/sec
Συντελ. αὐτεπαγωγῆς	L	$cm^{-1} . sec^2$	Henry $= 1/9.10^{11}$ ΗΣΜ συντ. αὐτεπαγωγῆς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

I. ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΚΙΝΗΤΙΚΗ

1. Κινητὸν ταχύτητος v=30 cm/sec, κινούμενον ὁμαλῶς καὶ εὐθυγράμμως διανύει διάστημα s=270 cm.

Ζητεῖται: Ποῖος ὁ χρόνος κινήσεώς του.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$t = \frac{s}{v}$$

ἔχομεν :

$$t = \frac{270}{30}\,\frac{cm}{cm\,.\,sec^{-1}}$$

$$\boxed{t=9\ sec}$$

2. Κινητὸν σταθερᾶς ταχύτητος v=150 m/sec, κινεῖται ἐπὶ χρόνον t=20 min.

Ζητεῖται: Ποῖον τὸ διανυόμενον διάστημα.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$s = vt$$

ἔχομεν :

$$s = 150.20\ \frac{m}{sec}.min$$

$$s = 150.20.60\ \frac{m}{sec}.sec$$

$$s=180.000\ m$$

$$\boxed{s=180\ Km}$$

3. Κινητόν, ὁμαλῶς κινούμενον, διανύει διάστημα s=30 Km ἐντὸς χρόνου t=2 h 30 min 12 sec.

Ζητεῖται: Ποία ἡ ταχύτης του εἰς μονάδας cgs.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$v = \frac{s}{t}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχομεν :

$$v = \frac{30}{2.3600+30.60+12}\,\frac{Km}{sec}$$

$$v = \frac{30}{9012}\,\frac{Km}{sec}$$

$$v = \frac{30.10^5}{9012}\,\frac{cm}{sec}$$

$$\boxed{v=366 \text{ cm/sec}}$$

4. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἐκ δύο σημείων A καὶ B ἀπεχόντων κατ' ἀπόστασιν h=227,5 cm, κινοῦνται δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας AB, κατ' ἀντίθετον φοράν, τὸ μὲν ἓν μὲ ταχύτητα $v_1=20$ cm/sec, τὸ δ' ἕτερον μὲ ταχύτητα $v_2=15$ cm/sec.

Ζητεῖται: Ποῦ καὶ πότε θὰ συναντηθοῦν.

Λύσις: Ἔστω τὸ ὑπὸ ἑκάστου κινητοῦ διανυθὲν διάστημα, κατὰ τὴν συνάντησιν, ἀντιστοίχως s_1 καὶ s_2. Θὰ ἔχωμεν προφανῶς

$$h=s_1+s_2 \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ

$$s_1=v_1t \qquad (2)$$

καὶ

$$s_2=v_2t \qquad (3)$$

ἡ (1) γίνεται

$$v_1t+v_2t=h$$

ἐκ τῆς ὁποίας :

$$t = \frac{h}{v_1+v_2}$$

$$t = \frac{227,5}{35}\,\frac{cm}{cm.sec^{-1}}$$

$$\boxed{t=6,5 \text{ sec}}$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν κατόπιν τὰ διαστήματα s_1 καὶ s_2, ἀντιστοίχως :

$$\boxed{\begin{array}{l} s_1=130 \text{ cm} \\ s_2=97,5 \text{ cm} \end{array}}$$

5. Κινητὸν α μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v_1=3$ cm/sec ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου A κινούμενον ἐπὶ εὐθείας AB. Δεύτερον κινητὸν β ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου A κινούμενον ἐπὶ διευθύνσεως AΓ σχηματιζούσης γωνίαν $\varphi=60^0$ μετὰ τῆς AB, μετὰ χρόνον t=20 sec ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου καὶ μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v_2=15$ cm/sec.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται : Πότε τὸ κινητὸν β θὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὸ α καὶ τὸ σημεῖον ἀναχωρήσεως.

Λύσις : Ἔστωσαν οἱ χρόνοι κινήσεως t_1 καὶ t_2 $(t_2=t_1-t)$ ὁπότε τὰ διανυόμενα διαστήματα θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$s_1=v_1t_1$$

$$s_2=v_2(t_1-t).$$

Λόγῳ τοῦ σχηματιζομένου ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ θὰ ἔχωμεν :

$$\frac{s_1}{2}=s_2\,\text{συνφ}$$

$$\frac{v_1t_1}{2}=v_2(t_1-t)\,\text{συνφ}.$$

Λύοντες ὡς πρὸς t_1 ἔχομεν :

$$t_1=\frac{2v_2t\,\text{συνφ}}{2v_2\text{συνφ}-v_1}$$

ὁπότε δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν v_1, v_2 κλπ. $\left(\text{συνφ}=\frac{1}{2}\right)$

ἔχομεν :

$$\boxed{\begin{array}{l} t_1=25\ \text{sec} \\ t_2=\ 5\ \text{sec} \end{array}}$$

6. Ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β ἀπεχόντων ἀπόστασιν h=360 cm ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως δύο κινητά, κινούμενα ἐπὶ τῆς ΑΒ πρὸς συνάντησίν των μὲ ταχύτητας ἀντιστοίχως $v_1=2$ cm/sec καὶ $v_2=8$ cm/sec.

Ζητεῖται : Πότε ταῦτα θ᾽ ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν s=27 cm.

Λύσις : Ἔστω μετὰ χρόνον t, ὁπότε τὰ διανυθέντα διαστήματα θὰ εἶναι :

$$s_1=v_1t$$

$$s_2=v_2t$$

ὁπότε : $$s_1+s_2\pm s=h$$

ἤτοι : $$v_1t+v_2t\pm s=h$$

καὶ λύοντες ὡς πρὸς t : $$t=\frac{h\pm s}{v_1+v_2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θέτοντες ἤδη τὰς τιμὰς τῶν h, s, v_1, v_2 ἔχομεν :

$$t = \frac{360 \pm 27}{30} \text{ sec}$$

καὶ $\boxed{t_1 = 12{,}9 \text{ sec},\ t_2 = 11{,}1 \text{ sec}}$

ἤτοι τὰ κινητὰ θὰ ἀπέχουν κατὰ 27 cm ἀφ᾽ ἑνὸς μετὰ 11,1 sec ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των (πρὸς τῆς συναντήσεώς των) ἀφ᾽ ἑτέρου μετὰ 12,9 sec (ἀφ᾽ οὗ προσπερασθοῦν ἀμοιβαίως).

7. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου κινούμενον μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v_1 = 37{,}5$ cm/sec. Ἕτερον κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου (κινούμενον κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν) μετὰ χρόνον $t = 18{,}5$ sec ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης v_2 τοῦ δευτέρου ὥστε τὰ κινητὰ νὰ συναντηθοῦν μετὰ χρόνον $t_1 = 56$ sec ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου.

Λύσις: Ἔστω v_2 ἡ ταχύτης τοῦ δευτέρου. Κατὰ τὴν συνάντησίν των τὰ κινητὰ θὰ ἔχουν διανύση ἴσα διαστήματα, ἤτοι ἀντιστοίχως :

$$s = v_1 t_1$$

$$s = v_2 (t_1 - t)$$

ἐξ ὧν

$$v_1 t_1 = v_2 (t_1 - t)$$

καὶ

$$v_2 = \frac{v_1 t_1}{t_1 - t} \qquad (1)$$

ὁπότε, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν v_1, t_1, t, ἔχομεν :

$$v_2 = \frac{37{,}5 . 56}{56 - 18{,}5} \text{ cm/sec}$$

$$v_2 = \frac{37{,}5 . 56}{37{,}5} \text{ cm/sec}$$

$$\boxed{v_2 = 56 \text{ cm/sec}}$$

8. Δύο κινητὰ (α καὶ β) ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β (ἴδ. σχ. 1) ἀπεχόντων κατὰ $h = 64\sqrt{3}$ cm. Τὸ μὲν α κινεῖται ἐπὶ εὐθείας ΑΓ καθέτου πρὸς τὴν ΑΒ, μὲ ταχύτητα $v_\alpha = 8$ cm/sec, τὸ δὲ β ἐπὶ εὐθείας ΒΔ σχηματιζούσης γωνίαν $\varphi = 30^\circ$ μὲ τὴν ΑΒ.

Ζητεῖται: Ι) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης v_β τοῦ β ὥστε τὰ κινητὰ νὰ συναντηθοῦν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

II) Πότε ταῦτα θὰ συναντηθοῦν καὶ
III) Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Α.
Λύσις: Τὰ ἀντιστοίχως ὑπὸ τῶν κινητῶν διανυθέντα, κατὰ τὴν συνάντησιν, διαστήματα θὰ εἶναι :

$$S_\alpha = v_\alpha t$$

$$S_\beta = v_\beta t$$

μεταξὺ τούτων ὅμως θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

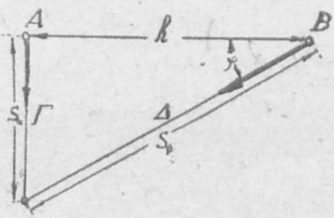
$$S_\alpha = S_\beta \, . \, \eta\mu\varphi$$

ἤτοι $$v_\alpha t = v_\beta t \, \eta\mu\varphi$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $$v_\beta = \frac{v_\alpha}{\eta\mu\varphi}$$

$$v_\beta = \frac{8}{\frac{1}{2}} \text{ cm/sec}$$

$$\boxed{v_\beta = 16 \text{ cm/sec}}$$



Σχ. 1

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου συναντήσεως ἔχομεν :

$$h = S_\beta \, \sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$h = v_\beta t \, \sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$t = \frac{h}{v_\beta \, \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$t = \frac{64\sqrt{3}}{16 . \frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ sec}$$

$$\boxed{t = 8 \text{ sec}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε διὰ τὴν ἐκ τοῦ Α ἀπόστασιν (S_α) ἔχομεν:

$$S_\alpha = v_\alpha \,.\, t$$

$$S_\alpha = 8.8 \text{ cm}$$

$$\boxed{S_\alpha = 64 \text{ cm}}$$

9. Κινητόν, ἀναχωροῦν ἐκ σημείου Ο, κινεῖται ἐπὶ εὐθείας Οx ἐπὶ χρόνον $t_1=20$ sec μὲ ταχύτητα $v_1=26$ cm/sec, ὁπότε προσλαμβάνει ἄλλην ταχύτητα v_2 μὲ τὴν ὁποίαν κινεῖται ἐπὶ χρόνου $t_2=4{,}2$ sec, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ v_2 ὥστε τὸ κινητὸν μετὰ χρόνον $t=t_1+t_2$ ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του νὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $S=108{,}4$ cm ἀπὸ τὸ Ο, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ταχύτης μετεβλήθη ἐντὸς ἀμελητέου χρόνου.

Λύσις: Ἔστωσαν S_1 καὶ S_2 τὰ διὰ τῶν v_1 καὶ v_2 διανυόμενα διαστήματα. Ταῦτα θὰ ἔχουν ἀντιστοίχως τιμάς:

$$S_1=v_1t_1 \quad \text{καὶ} \quad S_2=v_2t_2$$

αἵτινες θὰ συνδέωνται προφανῶς διὰ τῆς σχέσεως:

$$S_1+S_2=S$$

ἐκ τῆς ὁποίας, λύοντες ὡς πρὸς v_2, ἔχομεν:

$$v_2 = \frac{S-v_1t_1}{t_2}$$

ὁπότε, ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν:

$$v_2 = \frac{108{,}4-26.20}{4{,}2} \text{ cm/sec}$$

$$v_2 = \frac{-411{,}6}{4{,}2} \text{ cm/sec}$$

$$\boxed{v_2 = -98 \text{ cm/sec}}$$

Ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου τῆς v_2 συνάγομεν ὅτι αὕτη θὰ εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς ὡς πρὸς τὴν v_1.

10. Κινητὸν α ἔχον σταθερὰν ταχύτητα $v_1=3$ cm/sec κινεῖται ὡς πρὸς σύστημά τι Σ, τὸ ὅλον δὲ σύστημα κινεῖται μὲ ταχύτητα $v_2=4$ cm/sec ὡς πρὸς ἕτερον σύστημα Σ'.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ α ὡς πρὸς τὸ σύστημα Σ', ἂν αἱ v_1 καὶ v_2 εἶναι μεταξύ των κάθετοι.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἔστω v ἡ ταχύτης τοῦ α ὡς πρὸς τὸ Σ'. Αὕτη θὰ εἶναι συνισταμένη τῶν ταχυτήτων v_1 καὶ v_2, ὁπότε θὰ ἰσχύῃ μεταξὺ τούτων ἡ σχέσις:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 \qquad (1)$$

λόγῳ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου μεταξὺ τῶν v_1, v_2 καὶ v. Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

καί, ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν v_1 καὶ v_2, τελικῶς:

$$v = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

ἢ $\boxed{v = 5 \text{ cm/sec}}$

11. Κινητὸν α σταθερᾶς ταχύτητος $v_1 = 4$ cm/sec ὡς πρὸς σύστημα Σ μετέχει τῆς κινήσεως τούτου, κινουμένου μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v_2 = \sqrt{8}$ cm/sec ὡς πρὸς ἕτερον σύστημα Σ'.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ταχύτης v τοῦ α ὡς πρὸς τὸ Σ', ἂν αἱ v_1 καὶ v_2 σχηματίζουν μεταξύ των γωνίαν $\varphi = 45^\circ$.

Λύσις: Ἔστω v ἡ ταχύτης τοῦ α ὡς πρὸς τὸ Σ'. Αὕτη θὰ εἶναι συνισταμένη τῶν ταχυτήτων v_1 καὶ v_2, θὰ ἔχῃ δὲ τιμήν:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \,\text{συν}\varphi}$$

ὡς διαγώνιος τοῦ μεταξὺ v_1 καὶ v_2 σχηματιζομένου παραλληλογράμμου, ὁπότε ἔχομεν:

$$v = \sqrt{16 + 8 + \frac{2.4\sqrt{8}\,.\,\sqrt{2}}{2}} \text{ cm/sec}$$

$$v = \sqrt{40} \text{ cm/sec}$$

$$\boxed{v = 6{,}32 \text{ cm/sec}}$$

12. Κινητὸν ἐκκινεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 4$ cm/sec καὶ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 1$ cm/sec², κινούμενον ἐπὶ εὐθείας.

Ζητεῖται: I) Πότε τὸ διανυθὲν διάστημα θὰ εἶναι S=10 cm. II) Πόση θὰ εἶναι τότε ἡ ταχύτης του.

Λύσις: Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου t, εἰς ὃν τὸ διάστημα θὰ εἶναι S, ἔχομεν τὸν τύπον:

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐκ τοῦ ὁποίου, λύοντες ὡς πρὸς t, ἔχομεν:

$$t = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2\gamma S}}{\gamma}$$

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 2.1.10}}{1} \quad \text{sec}$$

καὶ
$$t_1 = 2 \quad \text{sec}$$
$$t_2 = -10 \text{ sec}$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν μόνον τὴν θετικὴν τιμὴν τοῦ χρόνου ἤτοι

$$\boxed{t = 2 \text{ sec}}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς εἰς τὸν χρόνον t ἀντιστοιχούσης ταχύτητος ἔχομεν κατόπιν:

$$v = v_0 + \gamma t$$

$$v = 4 + 2.1 \text{ cm/sec}$$

$$\boxed{v = 6 \text{ cm/sec}}$$

13. Κινητὸν μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 16$ cm/sec καὶ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 6$ cm/sec² κινεῖται ἐπὶ εὐθείας.

Ζητεῖται: Πόσον εἶναι τὸ μεταξὺ τοῦ 5ου καὶ 8ου δευτερολέπτου διανυόμενον διάστημα S.

Λύσις: Ἔστω $t_1 = 5$ sec καὶ $t_2 = 8$ sec.

Τὰ εἰς τοὺς χρόνους τούτους ἀντιστοιχοῦντα διαστήματα θὰ εἶναι

$$S_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2}\gamma t_1^2$$

$$S_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2}\gamma t_2^2$$

ὁπότε τὸ S θὰ εἶναι:

$$S = S_2 - S_1$$

ἤτοι
$$S = v_0 t_2 + \frac{1}{2}\gamma t_2^2 - v_0 t_1 - \frac{1}{2}\gamma t_1^2$$

$$S = \frac{1}{2}\gamma (t_2^2 - t_1^2) + v_0 (t_2 - t_1)$$

ὁπότε δι᾿ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν v_0, γ, κλπ. ἔχομεν

$$S = 165 \text{ cm}$$

ἤτοι
$$\boxed{S = 1{,}65 \text{ m}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

14. Κινητὸν κινούμενον εὐθυγράμμως μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 3{,}2\ \mathrm{cm/sec^2}$ ἔχει διανύσει, εἰς χρόνον $t = 2{,}4\ \mathrm{sec}$ ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς του, διάστημα $S = 140{,}16\ \mathrm{mm}$.

Ζητεῖται: Ποία ἡ ἀρχική του ταχύτης.

Λύσις: Λύοντες τὸν τύπον:

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

ὡς πρὸς v_0, ἔχομεν:

$$v_0 = \frac{2S - \gamma t^2}{2t}$$

ὅπου, θέτοντες ὅπου S τὴν εἰς GGS τιμήν του ($S = 14{,}016\ \mathrm{cm}$) καὶ τὰς ἀντιστοίχους τῶν γ καὶ t ἔχομεν:

$$\boxed{v_0 = 2\ \mathrm{cm/sec}}$$

15. Δύο κινητά, α καὶ β, ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἔκ τινος σημείου μὲ ἀρχικὰς ταχύτητας καὶ ἐπιταχύνσεις ἀντιστοίχως $v_{o\alpha} = 11{,}2\ \mathrm{cm/sec}$, $\gamma_\alpha = 1{,}2\ \mathrm{cm/sec^2}$ καὶ $v_{o\beta} = 17{,}3\ \mathrm{cm/sec}$ καὶ $\gamma_\beta = 0{,}59\ \mathrm{cm/sec^2}$.

Ζητεῖται: I) Πότε τὰ δύο κινητὰ θὰ συναντηθοῦν καὶ

II) Εἰς πόσην ἀπόστασιν θὰ εὑρίσκωνται τότε ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεώς των.

Λύσις: Κατὰ τὴν συνάντησίν των τὰ δύο κινητὰ θὰ ἔχουν διανύσει διαστήματα ἀντιστοίχως:

$$S_\alpha = v_{o\alpha} t + \frac{1}{2}\gamma_\alpha t^2$$

$$S_\beta = v_{o\beta} t + \frac{1}{2}\gamma_{o\beta} t^2$$

ἴσα μεταξύ των, ὁπότε ἔχομεν:

$$v_{o\alpha} t_1 + \frac{1}{2}\gamma_\alpha t^2 = v_{o\beta} t + \frac{1}{2}\gamma_\beta t^2$$

καὶ

$$\left(\frac{\gamma_\alpha - \gamma_\beta}{2}\right) t^2 + (v_{o\alpha} - v_{o\beta})\, t = 0$$

ἐξ οὗ ἔχομεν δύο τιμὰς τοῦ t, ἤτοι:

$$t_1 = 0$$

$$t_2 = \frac{2(v_{o\beta} - v_{o\alpha})}{\gamma_\alpha - \gamma_\beta}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τὴν τιμὴν t_1 ἀπορρίπτομεν, ὡς ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν στιγμὴν τῆς ἐκκινήσεως, καθόσον καὶ τότε τὰ κινητὰ εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, καὶ λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ t_2 ἥτις εἶναι:

$$t_2 = \frac{2(17,3-11,2)}{(1,2-0,59)} \text{ sec}$$

$$t_2 = \frac{2.6,1}{0,61} \text{ sec}$$

$$\boxed{t_2 = 20 \text{ sec}}$$

16. Κινητὸν (α) ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου (Ο) μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_{o\alpha} = 4$ cm/sec καὶ ἐπιτάχυνσιν $\gamma_\alpha = 2$ cm/sec². Μετὰ πάροδον χρόνου $t' = 2$ sec ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ α ἀναχωρεῖ δεύτερον κινητὸν (β) ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, κινούμενον κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_{o\beta} = 3$ cm/sec καὶ ἐπιτάχυνσιν $\gamma_\beta = 8$ cm/sec².

Ζητεῖται: Πότε ἕκαστον ἐκ τῶν κινητῶν θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἥμισυ τῆς ἀποστάσεως τοῦ ἄλλου ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως.

Λύσις: Ἔστω μετὰ παρέλευσιν t δευτερολέπτων. Ὅταν τὸ β θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ Ο καὶ α τότε τὰ ὑπὸ τοῦ α καὶ β διανυθέντα διαστήματα θὰ εἶναι:

$$S_\alpha = v_{o\alpha} t + \frac{1}{2} \gamma_\alpha t^2 \qquad (1)$$

$$S_\beta = v_{o\beta} (t-t') + \frac{1}{2} \gamma_\beta (t-t')^2 \qquad (2)$$

θὰ ἰσχύη δὲ μεταξὺ αὐτῶν ἡ σχέσις:

$$S_\alpha = 2S_\beta$$

ἤτοι:

$$v_{o\alpha} t + \frac{1}{2} \gamma_\alpha t^2 = 2v_{o\beta} (t - t') + \gamma_\beta (t - t')^2$$

ἐξ ἧς ἔχομεν:

$$(2\gamma_\beta - \gamma_\alpha) t^2 + (4v_{o\beta} - 2v_{o\alpha} - 4\gamma_\beta t') t - (4v_{o\beta} t' - 2\gamma_\beta t'^2) = 0$$

καί, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν $v_{o\alpha}$, $v_{o\beta}$ κλπ.

$$7t^2 - 30t + 20 = 0$$

ἐξ ἧς, λύοντες ὡς πρὸς t, εὑρίσκομεν:

$$t = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4.7.20}}{14}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$t \simeq \frac{30 \pm \sqrt{340}}{14}$$

$$t \simeq \frac{30 \pm 18{,}4}{14}$$

$$t_1 \simeq 3{,}4 \text{ sec}$$

$$t_2 \simeq 0{,}8 \text{ sec}$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων τιμῶν τοῦ t λαμβάνομεν μόνον τὴν t_1, καθ᾽ ὅσον πρέπει νὰ εἶναι $t > t'$, ὥστε:

$$\boxed{t \simeq 3{,}4 \text{ sec}}$$

Ὅταν πάλιν τὸ α θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ β καὶ Ο τότε ἡ σχέσις τῶν διαστημάτων θὰ εἶναι:

$$S_\beta = 2S_\alpha$$

εἰς ἣν ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν S_α καὶ S_β ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\boxed{t \simeq 55{,}2 \text{ sec}}$$

17. Κινητὸν α ἀναχωρεῖ ἐκ σημείου Α κινούμενον ἐπὶ εὐθείας ΑΒ μὲ ταχύτητα σταθερὰν $v_\alpha = 25$ cm/sec.

Ἕτερον κινητὸν β ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α κινεῖται ὅμως ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἀκτῖνος $\varrho = 50$ cm, οὗτινος τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΑΒ, μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 5$ cm/sec².

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης $v_{o\beta}$ τοῦ β, ἵνα τὰ κινητὰ συναντηθοῦν.

Λύσις: Ἵνα τὰ κινητὰ συναντηθοῦν πρέπει οἱ χρόνοι διαδρομῆς (t) τῶν κινητῶν νὰ εἶναι ἴσοι εἰς τὰ διαστήματα:

$$S_\alpha = v_\alpha t$$

$$S_\beta = v_{o\beta} t + \frac{1}{2} \gamma t^2$$

ἐξ ὧν προκύπτει: $$t = \frac{S_\alpha}{v_\alpha}$$

καὶ $$S_\beta = v_{o\beta} \cdot \frac{S_\alpha}{v_\alpha} + \frac{1}{2} \gamma \cdot \frac{S_\alpha^2}{v_\alpha^2}$$

καί, ἐπειδὴ $S_\beta = \pi\varrho$, καὶ $S_\alpha = 2\varrho$, ἡ τελευταία γίνεται:

$$\pi\varrho = \frac{v_{o\beta} 2\varrho}{v_\alpha} + \frac{\gamma 4\varrho^2}{2 v_\alpha^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $$v_{o\beta} = \frac{v_\alpha \pi}{2} - \frac{\gamma \varrho}{v_\alpha}$$

εἰς ἣν ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν v_α, γ, ϱ, εὑρίσκομεν :

$$v_{o\beta} = \frac{25.3,14}{2} - \frac{5.50}{25} \frac{cm}{sec}$$

ἢ $$\boxed{v_{o\beta} = 29,25 \text{ cm/sec}}$$

18. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ κίνησιν ἐπιταχυνομένην καὶ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν β' τάξεως $b=4$ cm/sec^3.

Ζητεῖται: I) Ποία θὰ εἶναι ἡ εἰς χρόνον $t=9$ sec ἐπιτάχυνσίς του καὶ

II) Ποία ἡ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ταχύτης του.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου :

$$\gamma = bt$$

ἔχομεν : $$\gamma = 4.9 \text{ cm/sec}^2$$

$$\boxed{\gamma=36 \text{ cm/sec}^2}$$

ἐκ δὲ τοῦ τύπου $$v = \frac{1}{2} bt^2$$

ἔχομεν : $$v = \frac{1}{2}.4.81 \text{ cm/sec}$$

$$\boxed{v=162 \text{ cm/sec}}$$

19. Κινητόν τι ἐκκινεῖ μὲ ἀρχικὴν ἐπιτάχυνσιν $\gamma_o = 8$ cm/sec^2 καὶ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν β' τάξεως $b=2$ cm/sec^3, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, καὶ κινεῖται ἐπὶ χρόνον $t=6$ sec.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ διανυόμενον διάστημα.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου :

$$S = \frac{1}{2} \gamma_o t^2 + \frac{1}{6} bt^3$$

ἔχομεν : $$S = \frac{1}{2}.8.6^2 + \frac{1}{6}.2.6^3$$

$$\boxed{S=156 \text{ cm}}$$

20. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου O, κινούμενα ἐπὶ τροχιῶν σχηματιζουσῶν γωνίαν $\varphi=90^\circ$ (ἴδ. σχ. 2), ἐξ ὧν τὸ μὲν ἓν μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος καὶ μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma_\alpha = 34,2$ cm/sec^2.

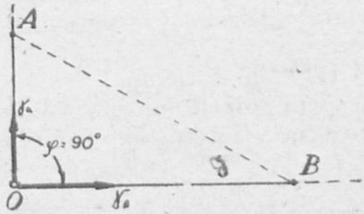
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις γ_β τοῦ δευτέρου ὥστε τὰ κινητά, εἰς κάθε στιγμὴν τῆς κινήσεώς των, εὑρισκόμενα εἰς σημεῖα A καὶ B νὰ σχηματίζουν τρίγωνον AOB, οὗτινος ἡ γωνία OBA νὰ εἶναι $\vartheta = 30^o$.

Λύσις: Τὰ ὑπὸ ἑκάστου κινητοῦ διανυόμενα διαστήματα θὰ δίδωνται ἐκ τῶν τύπων:

$$S_\alpha = \frac{1}{2}\gamma_\alpha t^2$$

$$S_\beta = \frac{1}{2}\gamma_\beta t^2$$



Σχ. 2

ὅπου, ἕνεκα τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου, θὰ εἶναι:

$$S_\alpha = S_\beta \,.\, \varepsilon\varphi\vartheta$$

ἤτοι:

$$\frac{1}{2}\gamma_\alpha \cancel{t^2} = \frac{1}{2}\gamma_\beta t^2 . \varepsilon\varphi\vartheta$$

$$\gamma_\alpha = \gamma_\beta \, \varepsilon\varphi\vartheta$$

$$\gamma_\beta = \frac{\gamma_\alpha}{\varepsilon\varphi\vartheta}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν γ_α καὶ εφθ:

$$\gamma_\beta = \frac{34,2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\gamma_\beta = \frac{102,6}{\sqrt{3}}$$

$$\gamma_\beta \simeq \frac{102,6}{1,71}$$

$$\boxed{\gamma_\beta \simeq 60 \text{ cm/sec}^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

21. Κινητὸν κινεῖται μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν γ εὐθυγράμμως, ἐπὶ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων x, y, ἐπὶ διευθύνσεως σχηματιζούσης γωνίαν φ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x.

Ζητεῖται: Ποῖαι εἶναι αἱ σχετικαὶ ἐπιταχύνσεις γ_x καὶ γ_y τοῦ κινητοῦ ὡς πρὸς τοὺς δύο ἄξονας.

Λύσις: Αἱ γ_x καὶ γ_y θὰ εἶναι προβολαὶ τῆς γ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας, ἐξ οὗ προκύπτει:

$$\boxed{\begin{aligned}\gamma_x &= \gamma\,\text{συνφ}\\ \gamma_y &= \gamma\,\text{ημφ}\end{aligned}}$$

22. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου, εὐθυγράμμως κινούμενον, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=4{,}5$ cm/sec καὶ ἐπιβράδυνσιν $\gamma=1{,}5$ cm/sec².

Ζητεῖται: I) Πότε θὰ ἠρεμήσῃ.

II) Πόσον θὰ εἶναι τότε τὸ διανυθὲν διάστημα.

Λύσις: Ἡ ταχύτης v δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$v = v_0 - \gamma t$$

ἐπειδή, ὅταν τὸ κινητὸν θὰ ἠρεμήσῃ, αὕτη θὰ λάβῃ τιμὴν v=o, θὰ ἔχωμεν:

$$o = v_0 - \gamma t$$

ὅθεν

$$t = \frac{v_0}{\gamma}$$

καί, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν, εὑρίσκομεν:

$$\boxed{t = 3\ \text{sec}}$$

Τὸ διανυθὲν τότε διάστημα

$$S = v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2$$

θὰ ἔχῃ, διὰ $t = v_0/\gamma$, τιμήν:

$$S = \frac{v_0^2}{\gamma} - \frac{1}{2}\gamma\frac{v_0^2}{\gamma^2}$$

$$S = \frac{2v_0^2 - v_0^2}{2\gamma}$$

$$S = \frac{v_0^2}{2\gamma}$$

ὁπότε, ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν v_0, γ, εὑρίσκομεν:

$$\boxed{S = 6{,}75\ \text{cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

23. Κινητόν, κινούμενον μὲ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν, ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 3{,}1$ cm/sec.

Δεύτερον κινητὸν μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0' = 8{,}37$ cm/sec καὶ ἐπιβράδυνσιν $\gamma' = 27$ cm/sec² ἀναχωρεῖ ταυτοχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐπιβράδυνσις γ τοῦ πρώτου, ὥστε τὰ κινητὰ νὰ ἠρεμήσουν ταυτοχρόνως καὶ πόσον θὰ ἀπέχουν μεταξύ των.

Λύσις: Κατὰ τὴν ἠρεμίαν οἱ χρόνοι t τῆς κινήσεως, ἴσοι μεταξύ των, θὰ ἔχουν τιμὴν ἀντιστοίχως:

$$t = \frac{v_0}{\gamma} \quad \text{καὶ} \quad t = \frac{v_0'}{\gamma'}$$

ἐξ οὗ

$$\frac{v_0}{\gamma} = \frac{v_0'}{\gamma'}$$

καὶ

$$\gamma = \frac{v_0 \gamma'}{v_0'}$$

ἤτοι

$$\gamma = \frac{3{,}1 \cdot 27}{8{,}37} \quad \frac{\text{cm/sec}^{-1} \cdot \text{cm sec}^{-2}}{\text{cm sec}^{-1}}$$

$$\boxed{\gamma = 10 \text{ cm/sec}^2}$$

Τὰ ἀντιστοίχως διανυθέντα διαστήματα θὰ εἶναι:

$$S = \frac{v_0^2}{2\gamma} \quad \text{καὶ} \quad S' = \frac{v_0'^2}{2\gamma}$$

ἡ δὲ διαφορά των h, ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν ἀπόστασιν τῶν κινητῶν κατὰ τὴν ἠρεμίαν, θὰ ἔχῃ τιμήν.

$$h = S - S'$$

$$h = \frac{v_0^2}{2\gamma} - \frac{v_0'^2}{2\gamma}$$

ἐπειδὴ ὅμως εἶναι

$$\frac{v_0}{\gamma} = \frac{v_0'}{\gamma'} = t$$

θὰ εἶναι

$$h = \frac{v_0 t}{2} - \frac{v_0' t}{2}$$

$$h = \frac{t}{2}\,(v_0 - v_0')$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐπειδὴ ὁ χρόνος $t = \frac{v_0}{\gamma} = 0{,}31$ sec

$$h = \frac{-0{,}31 \,.\, 5{,}27}{2} \text{ cm}$$

$$\boxed{h = -0{,}81 \text{ cm}}$$

ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ δὲ σημείου συμπεραίνομεν ἐπὶ πλέον ὅτι θὰ εἶναι $S' > S$.

24. Κινητὸν ἐκκινεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 6$ cm/sec καὶ ἐπιβράδυνσιν $\gamma = 1{,}1$ cm/sec², συνεχῶς ἐνεργοῦσαν ἐπ᾽ αὐτοῦ κατ᾽ ἀντίθετον πρὸς τὴν v_0 φοράν.

Ζητεῖται: Πότε τὸ κινητόν, κινούμενον ἐπὶ εὐθείας, θὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $S = 5$ cm ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεώς του.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου:

$$S = v_0 t - \frac{1}{2} \gamma t^2$$

ἔχομεν:

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2\gamma S}}{\gamma}$$

$$t = \frac{6 \pm 5}{1{,}1} \text{ sec}$$

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 &= 0{,}9 \text{ sec} \\ t_2 &= 10 \text{ sec} \end{aligned}}$$

ἤτοι τὸ κινητὸν θὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀπόστασιν S ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν κατὰ τὴν μετάβασίν του (εἰς $t_1 = 0{,}9$ sec) ἀφ᾽ ἑτέρου κατὰ τὴν ἐπιστροφήν του (εἰς $t_2 = 10$ sec).

25. Κινητὸν ἀναχωρῆσαν ἔκ τινος σημείου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 342$ cm/sec διέρχεται, εὐθυγράμμως κινούμενον, διά τινος σημείου A δίς, εἰς χρόνους $t_1 = 2$ sec καὶ $t_2 = 58$ sec ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεώς του.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις γ καὶ ποία ἡ ἀπόστασις S τοῦ σημείου A ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως.

Λύσις: Ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$S = v_0 t + \frac{1}{2} \gamma t^2$$

ἔχομεν:

$$\frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t - S = 0$$

$$t^2 + \frac{2 v_0 t}{\gamma} - \frac{2S}{\gamma} = 0 \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τῆς ὁποίας εἶναι προφανῶς ῥίζαι αἱ τιμαὶ t_1 καὶ t_2. Ἀλλ' ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$t_1 + t_2 = \frac{-2v_0}{\gamma} \qquad (2)$$

καὶ

$$t_1 t_2 = \frac{-2S}{\gamma} \qquad (3)$$

ὁπότε, ἐκ μὲν τῆς (2) προκύπτει:

$$\gamma = \frac{-2v_0}{t_1 + t_2}$$

$$\boxed{\gamma = -11{,}4 \text{ cm/sec}^2}$$

ἐκ δὲ τῆς (3):

$$S = -\frac{t_1 t_2 \gamma}{2}$$

$$\boxed{S = 661{,}2 \text{ cm}}$$

26. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ταυτοχρόνως, κινοῦνται δὲ ἐπὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως κατ' ἀντίθετον φορὰν καὶ μὲ κινήσεις ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένας μὲ ἀρχικὰς ταχύτητας καὶ ἐπιβραδύνσεις ἀντιστοίχως $v_0 = 22$ cm/sec, $\gamma = 4{,}6$ cm/sec² καὶ $v_0' = 452$ cm/sec, $\gamma' = 13{,}2$ cm/sec².

Ζητεῖται: Πότε τὰ δύο κινητὰ θὰ συναντηθοῦν καὶ εἰς ποίαν ἀπόστασιν S ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως.

Λύσις: Κατὰ τὴν συνάντησιν τῶν κινητῶν τόσον τὰ διανυθέντα διαστήματα S (ὡς διανύσματα) ὅσον καὶ οἱ χρόνοι t θὰ εἶναι ἴσοι. Ἤτοι:

$$S = v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (1)$$

καὶ

$$S = v_0' t - \frac{1}{2}\gamma' t^2 \qquad (2)$$

ὅθεν

$$v_0 t - \frac{1}{2}\gamma t^2 = v_0' t - \frac{1}{2}\gamma' t^2$$

$$\frac{(\gamma' - \gamma)t^2}{2} + (v_0 - v_0')\,t = 0$$

$$4{,}3t^2 - 430t = 0$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης ἐξισώσεως ἀπορρίπτοντες τὴν τιμὴν $t = 0$, ὡς ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως, ἔχομεν:

$$\boxed{t = 100 \text{ sec}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί, ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ t εἰς τὴν (1), εὑρίσκομεν τὸ διάστημα:

$$S = 22.100 - \frac{1}{2}.4{,}6.100^2 \text{ cm}$$

$$\boxed{\begin{aligned} S &= -20800 \text{ cm} \\ S &= -208 \text{ m} \end{aligned}}$$

Ἤτοι τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν μετὰ πάροδον 100 sec, εἰς ἀπόστασιν 208 m, ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεώς των, καὶ πρὸς τὸ ἀντίθετον, ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴν κίνησιν, μέρος.

27. Κινητόν τι (α) ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 4$ cm/sec². Δεύτερον κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 200$ cm/sec καὶ σταθερὰν ἐπιβράδυνσιν $\gamma' = 24$ cm/sec², κινούμενον κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν.

Ζητεῖται: Πότε πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ τὸ δεύτερον κινητόν, ὥστε ἡ συνάντησίς των νὰ λάβῃ χώραν μετὰ πάροδον χρόνου $t = 20$ sec ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ πρώτου.

Λύσις: Ἔστω t΄ ὁ ζητούμενος χρόνος, ὁπότε τὰ ὑπὸ τῶν κινητῶν διανυθέντα, κατὰ τὴν συνάντησίν των, διαστήματα θὰ εἶναι:

$$S_1 = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

$$S_2 = v_0(t - t') - \frac{1}{2}\gamma'(t - t')^2$$

ἐπειδὴ τὰ διαστήματα ταῦτα εἶναι ἴσα, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{1}{2}\gamma t^2 = v_0(t - t') - \frac{1}{2}\gamma'(t - t')^2$$

ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν:

$$800 = 200(20 - t') - 12(20 - t')^2$$

καὶ

$$t' = \frac{70 \pm 10}{6}$$

$$\boxed{\begin{aligned} t_1' &= 10 \text{ sec} \\ t_2' &= 13{,}3 \text{ sec} \end{aligned}}$$

ἤτοι τὸ δεύτερον κινητὸν πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ 13,3 sec μετὰ τὴν ἀναχώρησιν τοῦ πρώτου, ὁπότε θὰ τὸ συναντήσῃ κατὰ τὴν μετάβασίν του, ἢ 10 sec, ὁπότε θὰ τὸ συναντήσῃ κατὰ τὴν ἐπιστροφήν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

28. Σῶμα κινούμενον μὲ σταθερὰν κατὰ τὸ μέτρον ταχύτητα v=18,98 cm/sec, διαγράφει περιφέρειαν κύκλου ἀκτῖνος r=7,3 cm.

Ζητεῖται: I) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνιώδης ταχύτης του.

I) Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποῖον χρόνον θὰ ἔχῃ διαγράψῃ ἀριθμὸν περιστροφῶν n=26.

Λύσις: I) Πρὸς εὕρεσιν τῆς γωνιώδους ταχύτητος χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον $\omega = \frac{v}{r}$, ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$\omega = \frac{18{,}98}{7{,}3} \frac{\mathrm{cm \cdot sec^{-1}}}{\mathrm{cm}}$$

καὶ

$$\omega = 2{,}6\ \mathrm{sec^{-1}}$$

ἤτοι $\boxed{\omega = 2{,}6\ \mathrm{rad/sec}}$

II) Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου εἰς ὃν θὰ διαγραφοῦν αἱ n περιστροφαὶ ἔχομεν:

Ἡ συνολικῶς διαγραφομένη γωνία κατὰ τὰς n περιστροφὰς θὰ εἶναι 2πn καθ' ὅσον 2π εἶναι ἡ γωνία μιᾶς μόνον περιστροφῆς. Ἐκ τούτου θὰ πρέπει αὕτη νὰ εἶναι:

$$2\pi n = \omega t$$

ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$t = \frac{2\pi n}{\omega}, \quad t = \frac{6{,}28.26}{2{,}6} \frac{1}{\mathrm{sec^{-1}}}$$

$$t = 62{,}8\ \mathrm{sec}$$

ἤτοι $\boxed{t = 1\ \mathrm{min}\ 2{,}8\ \mathrm{sec}}$

29. Κινητὸν περιστρεφόμενον ἐπὶ περιφερείας κύκλου κινεῖται μὲ σταθερὰν γραμμικὴν ταχύτητα v=1,57 cm/sec καὶ μὲ περίοδον περιστροφῆς T=40 sec.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθοῦν: Ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κύκλου r, ἡ γωνιώδης ταχύτης ω καὶ ἡ συχνότης N τῆς περιστροφῆς.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$2\pi r = vT$$

εὑρίσκομεν τὴν r, ἥτις θὰ εἶναι:

$$r = \frac{vT}{2\pi}, \quad r = \frac{40.1{,}57}{6{,}28} \frac{\mathrm{cm \cdot sec}}{\mathrm{sec}}$$

$$\boxed{r = 10\ \mathrm{cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐν συνεχείᾳ δέ, ἐκ τοῦ τύπου

$$v = \omega r, \quad \omega = \frac{v}{r}$$

εὑρίσκομεν τὴν ω, ἔχουσαν τιμήν:

$$\omega = \frac{1,57}{10}, \quad \omega = 0,157\ \frac{cm\,.\,sec^{-1}}{cm}$$

$$\boxed{\omega = 0,157\ rad/sec}$$

καί, τελικῶς, ἐκ τοῦ τύπου $N = 1/T$, εὑρίσκομεν τὴν συχνότητα:

$$N = \frac{1}{40}, \quad N = 0,025\ \frac{1}{sec}$$

$$\boxed{N = 0,025\ sec^{-1}}$$

ἐξ ἧς συμπεραίνομεν ὅτι τὸ κινητὸν θὰ διαγράφη τὰ 25/1000 τῆς περιφερείας κατὰ sec.

30. Δύο κινητά, ἀναχωροῦντα ταυτοχρόνως καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, περιστρέφονται, κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος $r = 3,28$ cm, μὲ γραμμικὰς ταχύτητας, ἀντιστοίχως, $v_1 = 8,2$ cm/sec καὶ $v_2 = 9,84$ cm/sec.

Ζητεῖται: Πόσας περιστροφὰς θὰ ἔχῃ διαγράψει ἕκαστον κινητὸν κατὰ τὴν πρώτην συνάντησίν των καὶ εἰς ποῖον χρόνον t θὰ λάβῃ χώραν αὕτη.

Λύσις: Κατὰ τὴν συνάντησιν ἐὰν τὸ ἓν ἐκ τῶν κινητῶν ἔχῃ διαγράψῃ n_1 στροφάς, τὸ ἕτερον θὰ ἔχῃ διαγράψῃ στροφὰς $n_2 = n_1 + 1$. Ἔστωσαν, ὡς ἐκ τούτου, n_1 αἱ στροφαὶ τοῦ ἔχοντος τὴν ταχύτητα v_1. Τὰ ἀντιστοίχως διανυθέντα διαστήματα θὰ εἶναι τότε:

$$2\pi r n_1 = v_1 t \tag{1}$$

καὶ

$$2\pi r (n_1 + 1) = v_2 t \tag{2}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη ἔχομεν:

$$\frac{n_1}{n_1 + 1} = \frac{v_1}{v_2} \quad \text{καὶ} \quad n_1 = \frac{v_1}{v_2 - v_1}.$$

Ἐξ οὗ εὑρίσκομεν:

$$n_1 = \frac{8,2}{9,84 - 8,2}\ \frac{cm\,.\,sec^{-1}}{cm\,.\,sec^{-1}}, \quad n_1 = 5$$

ἤτοι τελικῶς:

$$\boxed{\begin{aligned} n_1 &= 5 \text{ περιστροφαὶ} \\ n_2 &= 6 \text{ περιστροφαὶ} \end{aligned}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὁπότε, ἐξ ἑνὸς ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (2), ἔστω δὲ ἐκ τοῦ (1), ἔχομεν :

$$t = \frac{2\pi r n_1}{v_1}, \quad t = \frac{6{,}28.3{,}28.5}{8{,}2} \, \frac{cm}{cm \, . \, sec^{-1}}$$

$$\boxed{t = 12{,}56 \text{ sec}}$$

31. Δύο κινητά, α καὶ β, ἀναχωροῦν ἐκ δύο θέσεων Α καὶ Β, περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος r=15 cm, ἐκ διαμέτρου ἀντιθέτων, κινοῦνται δὲ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ γραμμικὴ ταχύτης τοῦ α εἶναι $v_\alpha = 6{,}9$ cm/sec, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ β διὰ νὰ συναντηθοῦν τὰ κινητὰ διὰ πρώτην φορὰν ὅταν τὸ α θὰ ἔχῃ διαγράψῃ ἀριθμὸν στροφῶν $n_\alpha = 46$.

Λύσις: Ὅταν θὰ συναντηθοῦν, καὶ τὸ α θὰ ἔχῃ διαγράψει n_α στροφάς, τὸ β θὰ ἔχῃ διαγράψει στροφάς :

$$n_\beta = n_\alpha \pm \frac{1}{2}$$

ἀναλόγως τοῦ ἂν προπορεύεται (—) ἢ ἕπεται (+) τοῦ α.

Τὰ διανυθέντα διαστήματα θὰ εἶναι τότε ἀντιστοίχως :

$$2\pi r n_\alpha = v_\alpha t \qquad (1)$$

$$2\pi r n_\beta = v_\beta t \qquad (2)$$

ἐξ ὧν, διαιροῦντες κατὰ μέλη, ἔχομεν :

$$\frac{n_\alpha}{n_\beta} = \frac{v_\alpha}{v_\beta}, \quad v_\beta = \frac{v_\alpha \, . \, n_\beta}{n_\alpha}, \quad v_\beta = \frac{v_\alpha \left(n_\alpha \pm \frac{1}{2} \right)}{n_\alpha}$$

καὶ πρὸς εὕρεσιν τῆς γωνιώδους ταχύτητος ω_β τοῦ β :

$$\omega_\beta = \frac{v_\alpha \left(n_\alpha \pm \frac{1}{2} \right)}{n_\alpha \, . \, r}$$

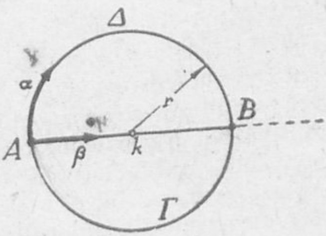
$$\omega_\beta = \frac{6{,}9\,(46 \pm 0{,}5)}{46 \, . \, 15} \, \frac{cm sec^{-1}}{cm}, \quad \omega_\beta = \frac{46 \pm 0{,}5}{100} \, sec^{-1}$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς δύο γωνιώδεις ταχύτητας τοῦ β :

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_\beta &= 0{,}465 \text{ rad/sec} \\ \omega'_\beta &= 0{,}455 \text{ rad/sec} \end{aligned}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

32. Δύο κινητά, α καὶ β, ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α συγχρόνως, τὸ μὲν (α) κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος $r=6{,}3$ cm, τὸ δ' ἕτερον (β) ἐπὶ εὐθείας, ἥτις εἶναι διάμετρος τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἴδ. σχ. 3). Ἡ ταχύτης τοῦ β εἶναι σταθερὰ καὶ ἔχει τιμὴν $v_\beta = 4{,}2$ cm/sec, ἐνῷ ἡ τοῦ α μεταβάλλεται μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 6{,}28$ cm/sec².



Σχ. 3

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης v_α τοῦ α, ὥστε τὰ κινητὰ νὰ συναντηθοῦν (εἰς σημεῖον Β), ὅταν τὸ α διέλθῃ διὰ πρώτην φορὰν ἐκ τοῦ Β, καὶ πότε θὰ λάβῃ χώραν ἡ συνάντησίς των αὕτη.

Λύσις: Ἔστωσαν S_α καὶ S_β τὰ διανυθέντα ἀντιστοίχως διαστήματα, ταῦτα θὰ εἶναι προφανῶς:

$$S_\alpha = v_\alpha t + \frac{\gamma t^2}{2} \quad \text{καὶ} \quad S_\beta = v_\beta t$$

ἐξ ὧν, ἐφ' ὅσον εἶναι $S_\alpha = \pi r$ καὶ $S_\beta = 2r$, ἔχομεν:

$$\pi r = v_\alpha t + \frac{\gamma t^2}{2} \qquad (1)$$

$$2r = v_\beta t \qquad (2)$$

Ὁπότε ἐκ τῆς (2), ἔχομεν:

$$t = \frac{2r}{v_\beta}, \quad t = \frac{2.6{,}3}{4{,}2}\,\frac{\text{cm}}{\text{cm}\,.\,\text{sec}^{-1}}, \qquad \boxed{t = 3 \text{ sec}}$$

καὶ ἐκ τῆς (1):

$$v_\alpha = \frac{2\pi r - \gamma t^2}{2t}, \quad v_\alpha = \frac{6{,}28.6{,}3 - 6{,}28.9}{2.3}\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$$

ἤτοι τελικῶς:

$$\boxed{v_\alpha = -\,2{,}826}$$

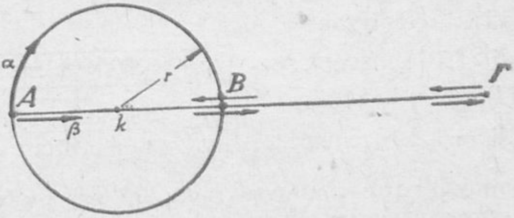
Ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου τῆς v_α ἐξάγομεν προσέτι τὸ συμ-
πέρασμα ὅτι τὸ κινητὸν α θὰ κινηθῇ ἀρχικῶς πρὸς τὴν ἀντίθε

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τον φορὰν (ΑΓ), θὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὸ Α καὶ θὰ συνεχίσῃ τὴν κίνησίν του (ΑΔΒ) μέχρι τοῦ σημείου Β.

33. Δύο κινητά, α καὶ β, ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος r=8 cm. Τὸ μὲν ἓν (α) κινεῖται μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην καὶ ἐπιτάχυνσιν $\gamma_\alpha = 6{,}28$ cm/sec², ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἐπὶ τῆς περιφερείας, τὸ δ' ἕτερον μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, ἐπιβραδύνσεως $\gamma_\beta = 1{,}2$ cm/sec², ἐπὶ τῆς διαμέτρου.

Ζητεῖται: I) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης v_β τοῦ



Σχ. 4

δευτέρου, ὥστε τὰ κινητὰ νὰ συναντηθοῦν, εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α ὅταν τὸ πρῶτον θὰ ἔχῃ διαγράψῃ περιστροφὰς n=16.

II) Πότε θὰ συμβῇ τοῦτο καὶ

III) Ποίας ταχύτητας θὰ ἔχουν τότε τὰ κινητά.

Λύσις: Ὅταν τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν τὸ μὲν α θὰ ἔχῃ διανύσει διάστημα:

$$S_\alpha = \frac{\gamma_\alpha t^2}{2} \qquad \text{ὅπου } S_\alpha = 2\pi r n$$

ἐξ οὗ:

$$2\pi r n = \frac{\gamma_\alpha t^2}{2} \tag{1}$$

τὸ δὲ β ἀντιστοίχως:

$$S_\beta = v_\beta t - \frac{\gamma_\beta t^2}{2}$$

ἴσον μὲ μηδέν, καθ' ὅσον τὰ διανύσματα ΑΓ καὶ ΓΑ εἶναι ἴσα καὶ ἀντίθετα, ἐξ οὗ:

$$v_\beta t - \frac{\gamma_\beta t^2}{2} = 0 \tag{2}$$

Ὁπότε, ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν τὸν χρόνον t τῆς συναντήσεως:

$$t = 2\sqrt{\frac{\pi r n}{\gamma_\alpha}}, \quad t = 2\sqrt{\frac{3{,}14 \cdot 8 \cdot 16}{6{,}28}}\ \text{sec}$$

$$\boxed{t = 16\ \text{sec}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τὴν ταχύτητα v_β ἐκ τοῦ (2):

$$v_\beta = \frac{\gamma_\beta t}{2}, \quad v_\beta = \frac{1{,}2.16}{2} \text{ cm} . \text{sec}^{-2} . \text{sec}$$

$$\boxed{v_\beta = 9{,}6 \text{ cm/sec}}$$

Τέλος πρὸς εὕρεσιν τῶν εἰς χρόνον t ταχυτήτων $v_{\alpha t}$ (διὰ τὸ α) καὶ $v_{\beta t}$ (διὰ τὸ β), ἔχομεν:

$$v_{\alpha t} = \gamma_\alpha t \tag{3}$$

$$v_{\beta t} = v_\beta - \gamma_\beta t \tag{4}$$

ὁπότε, ἐκ τῆς (3) εὑρίσκομεν:

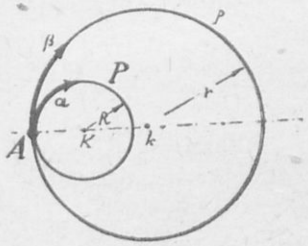
$$v_{\alpha t} = 6{,}28.16 \text{ cmsec}^{-2} . \text{sec} \qquad \boxed{v_{\alpha t} = 100{,}48 \text{ cm/sec}}$$

ἐκ δὲ τῆς (4):

$$v_{\beta t} = 9{,}6 - 1{,}2.16 \text{ cmsec}^{-1} \qquad \boxed{v_{\beta t} = -9{,}6 \text{ cm/sec}}$$

ἤτοι τὸ κινητὸν β κατὰ τὴν συνάντησιν θὰ ἔχῃ ταχύτητα ἴσην μὲ τὴν ἀρχικήν του, ἀντιθέτου ὅμως φορᾶς.

34. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α. Τὸν μὲν ἓν (α) διαγράφει περιφέρειαν κύκλου μήκους **P = 4,05 m**, τὸ δ' ἕτερον (β) περιφέρειαν κύκλου μήκους p=9 m, κινοῦνται ἀμφότερα μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην,



Σχ. 5.

ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων περιφερειῶν, ἐσωτερικῶς ἐφαπτομένων ἀλλήλων (ἴδ. σχ. 5).

Ζητεῖται: Ἂν αἱ ἐπιταχύνσεις τῶν κινητῶν ἀντιστοίχως:

Διὰ τὸ α εἶναι Γ=1,4 m/sec²

» » β » γ=2 m/sec²

νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσας περιστροφὰς τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν διὰ πρώτην φορὰν εἰς τὸ Α καὶ εἰς ποῖον χρόνον θὰ παρουσιασθῇ τοῦτο.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἔστω ὅτι τὰ κινητὰ συναντῶνται μετὰ χρόνον t καὶ ἀφοῦ διέγραψεν N περιστροφὰς τὸ α καὶ n τὸ β. Τὰ ἀντιστοίχως διανυθέντα διαστήματα θὰ εἶναι τότε:

Διὰ τὸ α $$PN = \frac{1}{2}\Gamma t^2 \quad (1)$$

Διὰ τὸ β $$pn = \frac{1}{2}\gamma t^2. \quad (2)$$

Ὁπότε, διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2), ἔχομεν:

$$\frac{PN}{pn} = \frac{\Gamma}{\gamma}$$

καὶ $$\frac{N}{n} = \frac{\Gamma p}{P\gamma}, \quad \frac{N}{n} = \frac{9.1{,}4}{4{,}05.2}, \quad \frac{N}{n} = \frac{14}{9}$$

ἐπειδὴ ὅμως οἱ ἀριθμοὶ N καὶ n πρέπει νὰ εἶναι ἐλάχιστοι καὶ ἀκέραιοι, ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{\begin{array}{l} N = 14 \\ n = 9 \end{array}}$$

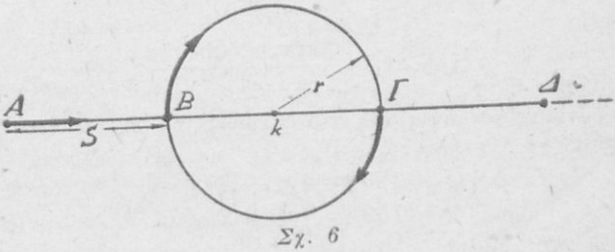
Ἤτοι τὰ κινητὰ θὰ συναντηθοῦν μετὰ N=14 περιστροφὰς διὰ τὸ α καὶ n=9 διὰ τὸ β.

Τέλος, πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου t λαμβάνομεν τὴν (1) καὶ ἔχομεν:

$$t = \sqrt{\frac{2PN}{\Gamma}}, \quad t = \sqrt{\frac{2.4{,}05.14}{1{,}4}} \text{ sec}$$

$$\boxed{t = 9 \text{ sec}}$$

35. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου A (ἴδ. σχῆμα 6) καὶ



Σχ. 6

κινεῖται ἐπὶ εὐθείας AΔ. Δεύτερον κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ σημείου Γ, κειμένου ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, μὲ κίνησιν ὁμαλὴν κυκλικὴν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ γραμμικὴν ταχύτητα $v = 12{,}56$ cm/sec. Τὸ κέντρον περιστροφῆς τοῦ δευτέρου κινητοῦ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος ΑΔ, ἡ δὲ ἀκτὶς καμπυλότητός του εἶναι $r = 16$ cm.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι $S = 120$ cm, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ κίνησις τοῦ εὐθυγράμμως κινουμένου κινητοῦ ὥστε τοῦτο νὰ συναντήσῃ τὸ περιστρεφόμενον εἰς τὰς θέσεις Β καὶ Γ, ἀκριβῶς ὅταν τοῦτο διέρχεται διὰ πρώτην φορὰν διὰ τῶν σημείων αὐτῶν.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς κυκλικῆς κινήσεως:

$$2\pi r = vT$$

εὑρίσκομεν τὸν χρόνον μιᾶς περιστροφῆς (περίοδον) ἔχοντα τιμήν:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

ὡς καὶ τὸν χρόνον t ἡμισείας περιστροφῆς:

$$t = \frac{\pi r}{v}$$

Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἐκ τοῦ Α ἀναχωροῦν κινητὸν πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν θέσιν Β μετὰ χρόνον t, εἰς δὲ τὴν Γ μετὰ Τ ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς του.

Οὕτω δέ, ὑποθέτοντες ὅτι τὸ εὐθυγράμμως κινούμενον κινητὸν ἔχει ἀρχικὴν ταχύτητα v_0 καὶ ἐπιτάχυνσιν γ, θὰ ἔχωμεν τὰς δύο σχέσεις:

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

$$S + 2r = v_0 T + \frac{1}{2}\gamma T^2$$

ἤτοι:

$$S = \frac{\pi r v_0}{v} + \frac{\pi^2 r^2 \gamma}{2v^2} \qquad (1)$$

$$S + 2r = \frac{2\pi r v_0}{v} + \frac{2\pi^2 r^2 \gamma}{v^2} \qquad (2)$$

ὁπότε, ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν S, r κλπ. εἰς τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν τὸ σύστημα:

$$120 = 4v_0 + 8\gamma \qquad (1, \alpha)$$

$$152 = 8v_0 + 32\gamma \qquad (2, \alpha)$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν:

$$\boxed{\begin{aligned} v_0 &= 41 \text{ cm/sec} \\ \gamma &= -5{,}5 \text{ cm/sec}^2 \end{aligned}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἤτοι τὸ κινητὸν θὰ πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, ἀρχικῆς ταχύτητος $v_0=41$ cm/sec καὶ ἐπιβραδύνσεως $\gamma'=5{,}5$ cm/sec².

36. Σῶμα κινεῖται ὁμαλῶς καὶ εὐθυγράμμως μὲ ταχύτητα $v=7{,}2$ cm/sec. Εἰς χρονικὴν τινὰ στιγμὴν ἐνεργεῖ ἐπ᾿ αὐτοῦ ἐπιτάχυνσις $\gamma=6$ cm/sec², σχηματίζουσα μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς κινήσεως γωνίαν $\varphi=30^\circ$.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ εἶδος τῆς κινήσεως τοῦ σώματος τὴν στιγμὴν τῆς ἐνεργείας τῆς ἐπιταχύνσεως.

Λύσις: Ἡ ἐκτάχυνσις γ, ὥς σχηματίζουσα γωνίαν μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς τροχιᾶς, ἀναλύεται εἰς δύο ἐπιταχύνσεις:

Τὴν ἐπιτρόχιον $\gamma_\varepsilon = \gamma\,.\,\text{συνφ}$ (1)

καὶ τὴν κεντρομόλον $\gamma_\kappa = \gamma\,.\,\text{ημφ}$ (2)

Ἡ κεντρομόλος ὅμως ἐπιτάχυνσις εἶναι ἀφ᾿ ἑτέρου:

$$\gamma_\kappa = \frac{v^2}{r} \qquad (3)$$

ἐξ οὗ ἔχομεν, ἐκ τῶν (2) καὶ (3):

$$\gamma\,.\,\text{ημφ} = \frac{v^2}{r}$$

καὶ

$$r = \frac{v^2}{\gamma.\text{ημφ}} \qquad (4)$$

ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς εἰς τὰς (1) καὶ (4) εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\gamma_\varepsilon = \frac{6\sqrt{3}}{2}\ \text{cm/sec}^2$$

$$\boxed{\gamma_\varepsilon = 3\sqrt{3}\ \text{cm/sec}^2}$$

καὶ

$$r = \frac{(7{,}2)^2}{6\,.\,\frac{1}{2}}\ \frac{(\text{cm.sec}^{-1})^2}{\text{cm.sec}^{-2}}$$

$$\boxed{r = 17{,}28\ \text{cm}}$$

Ἤτοι τὸ κινητὸν θ᾿ ἀποκτήσῃ κίνησιν κυκλικήν, μὲ ἀκτῖνα καμπυλότητος $r=17{,}28$ cm, ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma_\varepsilon = 3\sqrt{3}$ cm/sec²

37. Κινητὸν διαγράφει περιφέρειαν κύκλου μὲ ἀκτῖνα σταθερὰν $r=16$ cm, καὶ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν ἐπιτρόχιον $\gamma_\varepsilon = 4$ cm/sec².

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ συνολικὴ ἐπιτάχυνσις τοῦ κινητοῦ μετὰ χρόνον t=2 sec, ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιταχυνομένης κινήσεως.

Λύσις: Ἡ συνολικὴ ἐκτάχυνσις τοῦ κινητοῦ θὰ εἶναι τὸ διανυσματικὸν ἄθροισμα τῆς ἐπιτροχίου καὶ κεντρομόλου ἐπιταχύνσεως:

$$\vec{\gamma} = \vec{\gamma_\varepsilon} + \vec{\gamma_\kappa}$$

ἀλλ' ἀφοῦ ἡ ἐπιτρόχιος θὰ διατηρῆται σταθερά, ἡ κεντρομόλος μετὰ χρόνον t θὰ εἶναι:

$$\gamma_\kappa = \frac{v^2}{r}$$

ὅπου $v = \gamma_\varepsilon \cdot t$

ἤτοι:

$$\gamma_\kappa = \frac{\gamma_\varepsilon{}^2 \cdot t^2}{r}$$

ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$\gamma_\kappa = \frac{4^2 \cdot 2^2}{16} \frac{(\text{cm/sec}^{-2})^2 \cdot \text{sec}^2}{\text{cm}}$$

ἤτοι $\boxed{\gamma_\kappa = 4 \text{ cm/sec}^2}$

Αἱ δύο ἐπιταχύνσεις θὰ σχηματίζουν γωνίαν φ=90°, ὁπότε τὸ διανυσματικόν των ἄθροισμα θὰ εἶναι:

$$\gamma = \sqrt{\gamma_\kappa{}^2 + \gamma_\varepsilon{}^2}$$

$$\gamma = \sqrt{32} \text{ cm/sec}^2$$

ἤτοι $\boxed{\gamma = 5{,}65 \text{ cm/sec}^2}$

38. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἐπιτάχυνσιν γ=6,1 cm/sec² καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0=3 cm/sec. Μετὰ χρόνον t'=7 sec ἀναχωρεῖ δεύτερον κινητὸν μὲ ἐπιτάχυνσιν γ'=120 cm/sec², ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου κινούμενον ἐπὶ τῆς αὐτῆς διευθύνσεως.

Ζητεῖται: I) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης v_0' τοῦ δευτέρου, ὥστε τὰ κινητὰ μετὰ χρόνον t=15 sec ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν ταχύτητα v.

II) Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης αὕτη.

Λύσις: Τὸ πρῶτον κινητόν, μετὰ χρόνον t ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του θὰ ἔχῃ ταχύτητα:

$$v = v_0 + \gamma t \qquad (1)$$

τὸ δεύτερον, κινηθὲν ἐπὶ χρόνον (t — t'), θὰ ἔχῃ ἀντιστοίχως ταχύτητα:

$$v = v_0' + \gamma' (t - t') \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε, δι᾽ ἐξισώσεως τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν :

$$v_0 + \gamma t = v_0' + \gamma'(t - t')$$

καί, λύοντες ὡς πρὸς v_0' :

$$v_0' = v_0 + \gamma t - \gamma'(t - t')$$

ἤτοι $\boxed{v_0 = -865{,}5 \text{ cm/sec}}$

ἐξ οὗ συμπεραίνομεν ὅτι τὸ δεύτερον κινητὸν θ᾽ ἀναχωρήσῃ κατ᾽ ἀντίθετον ὡς πρὸ τὸ πρῶτον φορὰν μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην, ἀρχικῆς ταχύτητος v_0=865,5 cm/sec.

II) Ἐν συνεχείᾳ διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς κοινῆς τελικῆς ταχύτητος v, λαμβάνομεν τὴν (1), ὁπότε ἔχομεν :

$$\boxed{v = 94{,}5 \text{ cm/sec}}$$

39. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 9$ cm/sec καὶ ἀρχικὴν ἐπιβράδυνσιν $\gamma_0 = 8$ cm/sec^2. Ἡ ἐπιτάχυνσις ὅμως αὕτη δὲν διατηρεῖται σταθερά, ἀλλὰ μεταβάλλεται κατὰ σταθερόν τι ποσὸν b=2 cm/sec^3.

Ζητεῖται: Πότε τὸ κινητόν, εὐθυγράμμως κινούμενον, θὰ διέλθῃ ἐκ νέου διὰ τοῦ σημείου ἐκκινήσεώς του.

Λύσις: Ὁ γενικὸς τύπος ὁ ἰσχύων διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ διαστήματος κινητοῦ ἔχοντος ἐπιτάχυνσιν δευτέρας τάξεως (b) εἶναι :

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + \frac{1}{6} b t^3$$

ὅστις γίνεται :

$$\frac{1}{6} b t^3 - \frac{1}{2}\gamma_0 t^2 + v_0 t = 0 \qquad (1)$$

διὰ τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ διάστημα εἶναι διανυσματικῶς ἴσον μὲ τὸ μηδὲν καὶ ἡ ἀρχικὴ κίνησις ἐπιβραδυνομένη.

Ἐκ τῆς (1) ἔχομεν ὅμως τὴν ἐξίσωσιν :

$$\left(\frac{b}{6} t^2 - \frac{1}{2}\gamma_0 t + v_0\right) t = 0$$

ἐκ τῆς ὁποίας, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν b, v_0 κλπ. ἔχομεν :

$$\left(\frac{t^2}{3} - 4t + 9\right) t = 0$$

καὶ τελικῶς τρεῖς τιμὰς διὰ τὸν χρόνον :

$$\boxed{\begin{aligned} t_1 &= 0 \text{ sec} \\ t_2 &= 3 \text{ sec} \\ t_3 &= 9 \text{ sec} \end{aligned}}$$

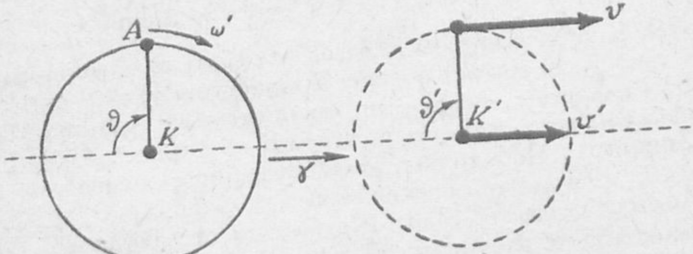
Ὅπου ἡ μὲν t_1 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως, αἱ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δὲ t_2 καὶ t_3 εἰς τὰς δύο στιγμὰς καθ᾽ ἃς τὸ κινητὸν διέρχεται διὰ τοῦ σημείου ἐκκινήσεώς του.

40. Περιστρεφόμενος δῖσκος ἀκτῖνος $R = 12{,}6$ cm, ἔχων σταθερὰν γωνιώδη ἐπιτάχυνσιν $\omega' = \pi/2$ sec^{-2}, κινεῖται ταυτοχρόνως οὕτως ὥστε τὸ κέντρον του νὰ διαγράφη εὐθεῖαν τροχιὰν μὲ σταθερὰν γραμμικὴν ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 8{,}218$ cm/sec².

Ζητεῖται: Ποίαν συνισταμένην ταχύτητα u θὰ παρουσιάζῃ μετὰ χρόνον t=4 sec ἀπὸ τῆς ταυτοχρόνου ἀρχῆς τῶν δύο κινήσεων σημεῖόν τι Α τῆς περιφερείας τοῦ δίσκου, εὑρισκόμενον εἰς θέσιν τοιαύτην ὥστε νὰ σχηματίζῃ γωνίαν $\vartheta = 90^0$ μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς εὐθυγράμμου κινήσεως (ἴδ. σχῆμα 7).



Σχ. 7

Λύσις: Μετὰ χρόνον t ἡ μὲν γωνιώδης ταχύτης ω τοῦ Α θὰ εἶναι:

$$\omega = \omega' t$$

ἡ δὲ γραμμική του:

$$v = \omega' R t \qquad (1)$$

Ταυτοχρόνως ἡ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ταχύτης v′ τοῦ δίσκου θὰ εἶναι:

$$v' = \gamma t \qquad (2)$$

Πρὸς εὕρεσιν ὅμως τῆς συνισταμένης ταχύτητος u, ὅπου θὰ εἶναι:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{v'}$$

πρέπει νὰ γνωρίζωμεν καὶ τὴν γωνίαν μεταξὺ τῶν $\vec{v}$ καὶ $\vec{v'}$. Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὴν διαγραφεῖσαν ὑπὸ τοῦ Α γωνίαν φ ἥτις θὰ εἶναι:

$$\varphi = \frac{\omega' t^2}{2}$$

ἤτοι:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4^2}{2}$$

$$\boxed{\varphi = 4\pi}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ὅτι ὁ δίσκος θὰ διαγράψῃ δύο πλήρεις περιστροφάς, ὁπότε αἱ ταχύτητες v καὶ v′ θὰ εἶναι ὁμόρροποι, ἐξ οὗ:

$$u = v + v'$$

$$u = \omega' R t + \gamma t$$

$$u = (\omega' R + \gamma) t$$

$$\boxed{u = 120 \text{ cm/sec}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

41. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ταχύτητα σταθερὰν $v=4$ cm/sec.

Ζητεῖται: Πότε πρέπει νὰ ἀναχωρήσῃ δεύτερον κινητὸν ταχύτητος σταθερᾶς $v'=6$ cm/sec πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν ὥστε τὰ κινητὰ νὰ συναντηθοῦν μετὰ χρόνον $t=24$ sec, ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου.

Λύσις: Μετὰ χρόνον $t=8$ sec.

42. Δύο κινητὰ ἀπέχοντα ἀλλήλων κατὰ διάστημα $h=100$ cm, ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως κινούμενα κατ' ἀντίθετον φορὰν πρὸς συνάντησίν των, μὲ ταχύτητας σταθερὰς ἀντιστοίχως $v_1=6$ cm/sec καὶ $v_2=4$ cm/sec.

Ζητεῖται: I) Πότε θὰ συναντηθοῦν (t).

II) Πόσον θὰ ἀπέχουν τότε ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐκκινήσεώς των (S_1 καὶ S_2).

Λύσις: $t=10$ sec, $S_1=60$ cm, $S_2=40$ cm.

43. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=1{,}6$ cm/sec καὶ ἐκτάχυνσιν $\gamma=4$ cm/sec^2.

Ζητεῖται: Πόσον διάστημα (s) θὰ διανύσῃ ἀπὸ τοῦ 6ου μέχρι τοῦ 8ου sec τῆς κινήσεώς του.

Λύσις: $s=59{,}2$ cm.

√*44*. Δύο κινητὰ ἀναχωροῦν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου μὲ κίνησιν κατ' ἀντίθετον φοράν, ἀρχικὰς ταχύτητας $v_0=4{,}2$ cm/sec, $v_0'=9$ cm/sec, ἀντιστοίχως, καὶ ἐπιβραδύνσεις $\gamma=3$ cm/sec^2 καὶ $\gamma'=1{,}8$ cm/sec^2.

Ζητεῖται: Πότε (t) καὶ ποῦ (s) θὰ συναντηθοῦν τὰ κινητά.

Λύσις: $t=5{,}5$ sec, $s=22{,}275$ cm πρὸς τὴν φορὰν τῆς v_0'.

45. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ κίνησιν ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην καὶ ἐπιβράδυνσιν $\gamma=12{,}2$ cm/sec^2.

Ζητεῖται: Ἂν τὸ κινητὸν ἐπανέρχεται εἰς τὸ σημεῖον ἀνα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χωρήσεώς του μετὰ χρόνον $t=14{,}9$ sec, ποία εἶναι ἡ ἀρχική του ταχύτης (v_0) καὶ ποῖον τὸ μέγιστον διάστημά του (S).

Λύσις: $v_0=90{,}89$ cm/sec, $S=338{,}56$ cm.

46. Κινητὸν περιστρέφεται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος $R=250$ cm, μὲ γωνιώδη ἐπιτάχυνσιν $\omega'=\pi/25$ sec^{-2}.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσίς του (γ_κ) μετὰ χρόνον $t=50$ sec ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς του ἐκ τῆς ἠρεμίας.

Λύσις: $\gamma_\kappa = 98{,}59$ m/sec².

47. Σῶμα τι εὐθυγράμμως κινούμενον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $S_1=60$ cm ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεώς του εἰς χρόνον $t=6$ sec, ἠρεμεῖ δὲ εἰς χρόνον $t'=8$ sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης του (v_0) καὶ ποία ἡ ἐπιβράδυνσίς του (γ).

Λύσις: $\gamma=10$ cm/sec², $v_0=40$ cm/sec.

48. Κινητὸν ἀναχωρῆσαν ἔκ τινος σημείου Α διέρχεται διὰ δύο σημείων Β καὶ Γ, κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (ΑΒΓ), ἀπεχόντων τοῦ Α κατὰ διαστήματα $S_1=420$ cm, καὶ $S_2=100$ cm, εἰς χρόνους $t_1=21$ sec καὶ $t_2=25$ sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης (v_0) τοῦ κινητοῦ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ ποία ἡ ἐπιτάχυνσίς του (γ).

Λύσις: $v_0=104$ cm/sec, $\gamma=-8$ cm/sec².

49. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος θέσεως μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=8$ cm/sec καὶ ἐπιβράδυνσιν $\gamma=2$ cm/sec².

Δεύτερον κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, μετὰ χρόνον $\vartheta=1$ sec καὶ κινεῖται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φοράν.

Ζητεῖται: Ι) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης (v_0') καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις (γ') τοῦ δευτέρου, ὥστε τὰ κινητὰ νὰ φθάσουν ταυτοχρόνως εἰς τὴν αὐτὴν μεγίστην ἀπόστασιν. ΙΙ) Ποῖος ὁ χρόνος τῆς συναντήσεώς των (t) καὶ ποία ἡ μεγίστη αὕτη ἀπόστασις (s).

Λύσις: $v_0'=10{,}65$ cm/sec, $\gamma'=-3{,}55$ cm/sec², $t=4$ sec, $s=16$ cm.

50. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, μὲ ἐπιτάχυνσιν $\gamma=2$ cm/sec² καὶ κινεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος $r=9$ cm.

Ζητεῖται: Μετὰ πόσον χρόνον (t) ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσίς του θὰ εἶναι 18πλασία τῆς γραμμικῆς.

Λύσις: $t=9$ sec.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

51. Δύο δυνάμεις ὁμόρροποι ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἔχουν ἔντασιν ἀντιστοίχως $f_1=3$ Kg* καὶ $f_2=27.674.972$ dynes.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ συνισταμένη των f, εἰς μονάδας CGS καὶ εἰς Kg*.

Λύσις: Ἡ συνισταμένη f θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$f = f_1 + f_2$$

ἐξ οὗ ἔχομεν: $f = 3.981.10^3 + 27674972$ dynes

$$f = 2943.10^3 + 27674972 \text{ dynes}$$

$$f = 30617972 \text{ dynes}$$

$$f = \frac{30617972}{981.10^3} \text{ Kg*}$$

$$\boxed{f = 31,212 \text{ Kg*}}$$

52. Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου ὑπὸ γωνίαν $\varphi=60^\circ$, ἔχουν δὲ ἀντιστοίχως ἐντάσεις $f_1=18$ Kg* καὶ $f_2=20$ Kg*.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ καὶ ἡ διεύθυνσις τῆς συνισταμένης των (f).

Λύσις: Ἡ συνισταμένη f θὰ εἶναι:

$$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 2f_1f_2\,\text{συνφ}}$$

καὶ ἐπειδὴ $\text{συνφ} = \frac{1}{2}$

τότε: $$f = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_1f_2}$$

καὶ τελικῶς, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν f_1 καὶ f_2 καὶ εὑρέσεως τῆς τιμῆς τοῦ ριζικοῦ:

$$\boxed{f \simeq 32,1 \text{ Kg*}}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς διευθύνσεως ἔχομεν τὸν ἐκ τῆς τριγωνομετρίας τύπον

$$\frac{f_1}{\text{ημθ}} = \frac{f}{\text{ημω}}$$

ἐξ οὗ: $$\text{ημθ} = \frac{f_1.\text{ημω}}{f}$$

ὅπου $\omega=180^\circ-\varphi=120^\circ$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\eta\mu\vartheta = \frac{18.0,86603}{32,1}$$

$$\eta\mu\vartheta = 0,48562$$

καὶ

$$\boxed{\vartheta = 29^o 5'}$$

ὅπου ϑ ἡ μεταξὺ τῆς f καὶ f_2 σχηματιζομένη γωνία.

53. Δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, $f_1 = 10,18$ Kg* καὶ $f_2 = 6,82$ Kg* ἐνεργοῦν εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας μήκους $\lambda = 76,5$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης των καὶ ποῖον τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς της.

Λύσις: Αἱ δυνάμεις, ὡς παράλληλοι, θὰ ἔχουν προφανῶς συνισταμένην:

$$\Sigma = f_1 + f_2$$

ἤτοι

$$\Sigma = 10,18 + 6,82 \text{ Kg}^*$$

καὶ

$$\boxed{\Sigma = 17 \text{ Kg}^*}$$

Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς ταύτης θὰ ἀπέχῃ ἔστω x ἀπὸ τὸ τῆς f_1 καὶ $(\lambda - x)$ ἀπὸ τὸ τῆς f_2, ὁπότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$f_1 x = f_2 (\lambda - x)$$

ἐξ ἧς ἔχομεν:

$$f_1 x = f_2 \lambda - f_2 x$$

$$f_1 x + f_2 x = f_2 \lambda$$

$$x = \frac{f_2 \lambda}{f_1 + f_2}$$

καὶ τελικῶς:

$$\boxed{x = 30,69 \text{ cm}}$$

54. Δύο δυνάμεων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἐντάσεων ἔχει τιμὴν $f_1 + f_2 = 11$ Kg* τὸ δὲ γινόμενον $f_1 f_2 = 30$ Kg*².

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς συνισταμένης των ἂν ἡ μεταξὺ f_1 καὶ f_2 σχηματιζομένη γωνία εἶναι $\varphi = 120^o$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ συστήματος:

$$f_1 + f_2 = 11$$

$$f_1 f_2 = 30$$

ἔχομεν:

$$\boxed{f_1 = 5 \text{ Kg}^*, f_2 = 6 \text{ Kg}^*}$$

ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου

$$\Sigma = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + 2 f_1 f_2 \,\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅπου $$\text{συν}\,120^\circ = -\,\text{συν}\,60^\circ$$

$$\text{συν}\,120^\circ = -\frac{1}{2}$$

προκύπτει : $$\Sigma = \sqrt{25 + 36 - 30}$$

$$\Sigma = \sqrt{31}$$

$$\boxed{\Sigma \simeq 5{,}57\ \text{Kg}^*}$$

54. Εἰς τὰ ἄκρα εὐθείας ΑΒ ἐνεργοῦν δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι, ὧν ἡ μία ἔχει ἔντασιν $f_1 = 15{,}4$ Kg*. Ἡ συνισταμένη των ἔχει τιμὴν $\Sigma = 29$ Kg*, καὶ ἀπέχει τῆς f_1 κατὰ ἀπόστασις $\lambda_1 = 29{,}92$ cm.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος (λ) τῆς εὐθείας ΑΒ.

Λύσις: Ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\Sigma = f_1 + f_2$$

εὑρίσκομεν τὴν f_2 ἔχουσαν τιμήν :

$$f_2 = \Sigma - f_1$$

ἤτοι : $$\boxed{f_2 = 13{,}6\ \text{Kg}^*}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως λ τῶν σημείων Α καὶ Β λαμβάνομεν τότε τὴν σχέσιν :

$$f_1\lambda_1 = f_2(\lambda - \lambda_1)$$

ἐξ ἧς : $$f_1\lambda_1 = f_2\lambda - f_2\lambda_1$$

καὶ $$\lambda = \frac{f_1\lambda_1 + f_2\lambda_1}{f_2}$$

$$\boxed{\lambda = 63{,}8\ \text{cm}}$$

56. Τρεῖς δυνάμεις F_1, F_2 καὶ F_3 ἔχουν ἀριθμητικὸν ἄθροισμα τῶν ἐντάσεών των $P = 236{,}603$ Kg*, ἔχουν κοινὸν σημεῖον ἐφαρμογῆς Ο καὶ διευθύνσεις τοιαύτας ὥστε ἡ μεταξὺ F_1 καὶ F_2 γωνία νὰ εἶναι $\varphi = 120^\circ$ καὶ ἡ μεταξὺ F_1 καὶ F_3 νὰ εἶναι $\vartheta = 150^\circ$ μὲ ἀντιθέτους φορὰς (ἴδ. σχ. 8).

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ ἑκάστης δυνάμεως ὥστε τὸ σύστημα νὰ εὑρίσκεται ἐν ἰσορροπίᾳ.

Λύσις: Ἵνα ἰσορροπῇ τὸ ὅλον σύστημα πρέπει ἡ συνισταμένη τῶν τριῶν δυνάμεων νὰ εἶναι

$$\Sigma_{1,2,3} = 0$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἢ ἡ τῶν δύο νὰ εἶναι ἴση κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν μὲ τὴν τρίτην, ἤτοι:

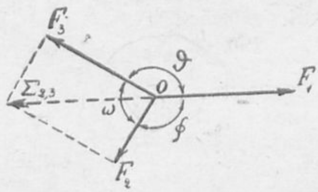
$$\Sigma_{2,3} = F_1, \quad \Sigma_{1,3} = F_2, \quad \Sigma_{1,2} = F_3$$

Ἐκ τούτων, λαμβάνοντες τὴν μεταξὺ F_2 καὶ F_3 συνισταμένην $\Sigma_{2,3}$ ἔχομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, οὗτινος ἡ $\Sigma_{2,3}$ (ἤτοι ἡ F_1) εἶναι διαγώνιος, ὁπότε θὰ εἶναι:

$$\frac{F_1}{\eta\mu\, 90^\circ} = \frac{F_2}{\eta\mu\, 30^\circ} = \frac{F_3}{\eta\mu\, 60^\circ} \tag{1}$$

καὶ δεδομένου ὅτι:

$$F_1 + F_2 + F_3 = 236{,}603 \tag{2}$$



Σχ. 8

εὑρίσκομεν, ἐκ τοῦ συστήματος τῶν (1) καὶ (2), τὰς τιμὰς τῆς ἐντάσεως ἑκάστης δυνάμεως:

$$\boxed{\begin{aligned} F_1 &= 100 \ \ Kg^* \\ F_2 &= 50 \ \ Kg^* \\ F_3 &= 86{,}603\ Kg^* \end{aligned}}$$

57. Εἴς τι σημεῖον Ο ἐνεργοῦν ἓξ δυνάμεις ἐντάσεως ἀντιστοίχως $F_1 = 6$ Kg*, $F_2 = 13$ Kg*, $F_3 = 8$ Kg*, $F_4 = 2$ Kg*, $F_5 = 12$ Kg*, $F_6 = 9$ Kg*. Σχηματίζουν δέ, ἑκάστη μὲ τὴν ἑπομένην της, γωνίας $\varphi = 60^\circ$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ Σ τῆς ἐντάσεως τῆς συνισταμένης των.

Λύσις: Ἐφ᾽ ὅσον αἱ ἓξ δυνάμεις σχηματίζουν μεταξύ των τὴν ὡς ἄνω γωνίαν, τότε (ἴδ. σχ. 9) θὰ κεῖνται ἀνὰ δύο ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, οὕτω αἱ ἀνὰ δύο συνιστάμεναι θὰ εἶναι:

$$\Sigma_{1,4} = F_1 - F_4 = 6 - 2 = 4$$
$$\Sigma_{2,5} = F_2 - F_5 = 13 - 12 = 1$$
$$\Sigma_{3,6} = F_6 - F_3 = 9 - 8 = 1$$

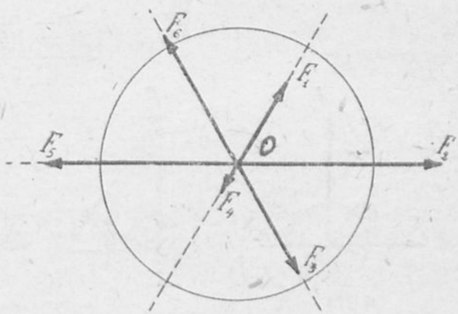
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε ἡ μεταξὺ $\Sigma_{2,5}$ καὶ $\Sigma_{3,6}$ συνισταμένη, δεδομένης τῆς γωνίας $F_2\widehat{O}F_6$ ἴσης μὲ $\vartheta = 120^\circ$, θὰ εἶναι :

$$\Sigma_{2,3,5,6} = \sqrt{1 + 1 + 2\,\sigma\upsilon\nu\vartheta}$$

$$\Sigma_{2,3,5,6} = \sqrt{2 - 2\,\sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$\Sigma_{2,3,5,6} = \sqrt{1} = 1$$



Σχ. 9

ὁπότε ἡ τελικὴ συνισταμένη θὰ εἶναι :

$$\Sigma = \Sigma_{2,3,5,6} + \Sigma_{1,4}$$

$$\Sigma = 1 + 4$$

$$\boxed{\Sigma = 5\ \mathrm{Kg}^*}$$

58. Τρεῖς δυνάμεις ἔχουν ἀντιστοίχως ἐντάσεις $F_1 = 4$ Kg*, $F_2 = 5$ Kg* καὶ $F_3 = 3$ Kg*, ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ἔχουν συνισταμένην $\Sigma = 0$.

Ζητεῖται: Ποῖαι εἶναι αἱ μεταξὺ τῶν δυνάμεων γωνίαι.

Λύσις: Ἐφ' ὅσον ἡ συνισταμένη εἶναι $\Sigma = 0$, τότε αἱ δυνάμεις, ἂν τεθοῦν ἡ μία κατόπιν τῆς ἄλλης, θὰ σχηματίζουν κλειστὸν πολύγωνον, ἤτοι τρίγωνον $F_1F_2F_3$ (ἴδ. σχ. 10).

Ὅπου θὰ εἶναι, ὡς γνωστὸν ἐκ τῆς τριγωνομετρίας :

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{F_1^2 + F_3^2 - F_2^2}{2F_1F_3}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{16 + 9 - 25}{2.4.3}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \qquad \boxed{\varphi = 90^\circ}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

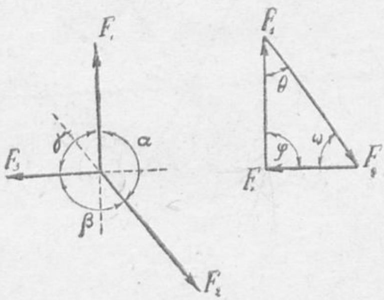
Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὑποτείνουσαν τὴν F_2, ὁπότε:

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{F_3}{F_2}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = 0{,}6$$

$$\boxed{\omega = 53^\circ 9'}$$

$$\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{F_1}{F_2}, \quad \sigma\upsilon\nu\vartheta = 0{,}8$$

$$\boxed{\vartheta = 36^\circ 51'}$$



Σχ. 10

ὁπότε αἱ μεταξὺ τῶν δυνάμεων γωνίαι α, β, γ θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$\alpha = \varphi + \omega = 143^\circ 9'$$
$$\beta = \varphi + \vartheta = 126^\circ 51'$$
$$\gamma = \omega + \vartheta = 90^\circ$$

ἤτοι: $\boxed{\alpha = 143^\circ 9', \quad \beta = 126^\circ 51', \quad \gamma = 90^\circ}$

59. Δύο δυνάμεις παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι ἐνεργοῦν ἐπὶ δύο σημείων ἀπεχόντων κατὰ ἀπόστασιν λ. Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τούτων εἶναι $\Sigma = f_1 + f_2 = 18$ Kg*.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης δυνάμεως, ὡς καὶ ἡ ἀπόστασις λ, δεδομένου ὅτι ἡ συνισταμένη των εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\lambda_1 = 2$ cm ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας καὶ $\lambda_2 = 7$ cm ἀπὸ τῆς μικροτέρας.

Λύσις: Ἔστω f_1 ἡ μεγαλυτέρα δύναμις, τότε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$f_1 + f_2 = \Sigma \qquad (1)$$
$$\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \qquad (2)$$
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda \qquad (3)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει τότε:

$$f_1 + \frac{\lambda_1 f_1}{\lambda_2} = \Sigma, \quad \lambda_2 f_1 + \lambda_1 f_1 = \lambda_2 \Sigma$$

$$f_1 = \frac{\lambda_2 \Sigma}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\boxed{f_1 = 14 \text{ Kg*}}$$

ὁπότε θὰ εἶναι:

$$f_2 = \Sigma - f_1$$

$$\boxed{f_2 = 4 \text{ Kg*}}$$

καί, ἐκ τῆς (3):

$$\lambda = 2 + 7$$

$$\boxed{\lambda = 9 \text{ cm}}$$

60. Δύναμις f=15 Kg* ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος ἔχοντος ἓν σημεῖον ἀκίνητον εἰς ἀπόστασιν λ=350 cm ἀπὸ τῆς δυνάμεως.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ροπὴ τῆς δυνάμεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$P = f.\lambda$$

ἔχομεν:

$$P = 15.350 \text{ Kg*. cm}$$

$$P = 15.3{,}5 \text{ Kg*m}$$

$$\boxed{P = 52{,}5 \text{ Kg*m}}$$

61. Δύο δυνάμεις ἔχουν ἀντιστοίχως ἐντάσεις F_1=6 Kg* καὶ F_2=8 Kg*. Ἐνεργοῦν ἐπί τινος σώματος καὶ κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

Ζητεῖται: Ἂν αἱ δυνάμεις εἶναι παράλληλοι καὶ ἀντίρροποι καὶ ἀπέχουν ἀλλήλων κατὰ λ=3 m, νὰ εὑρεθῇ ποία θὰ εἶναι ἡ συνισταμένη ροπή των ὡς πρὸς σημεῖον (Σ) ἀπέχον λ'=6 m ἀπὸ τῆς F_2 (ἴδ. σχ. 11) καὶ πέραν ταύτης.

Σχ. 11

Λύσις: Ἡ ροπὴ τῆς F_1 θὰ εἶναι:

$$P_1 = F_1 (\lambda + \lambda')$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ δὲ τῆς F_2 κατ' ἀπόλυτον τιμήν:

$$P_2 = F_2\lambda'$$

'Εφ' ὅσον ὅμως ὡς πρὸς τὸ Σ αἱ F_1 καὶ F_2 ἔχουν ἀντίθετον φορὰν τότε εἶναι:

$$P_2 = -F_2\lambda'$$

καὶ ἡ συνισταμένη ῥοπὴ

$$P = P_1 + P_2$$

γίνεται:

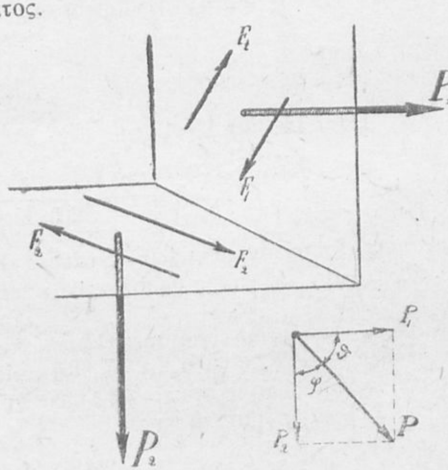
$$P = F_1(\lambda + \lambda') - F_2\lambda'$$

ἤτοι:

$$\boxed{P = 6\ Kg^*m}$$

Μὲ φορὰν τῆς P ὁμόρροπον πρὸς τὴν τῆς P_1.

62. Δύο ζεύγη δυνάμεων ἀποτελοῦνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δυνάμεις $F_1=5$ Kg* ἀπεχούσας μεταξύ των κατὰ $\lambda_1=0,6$ m καὶ $F_2=7$ Kg* ἀπεχούσας κατὰ $\lambda_2=0,5$ m, κεῖνται δὲ ἐπὶ δύο ἐπιπέδων καθέτων μεταξύ των (ἴδ. σχ. 12), ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σώματος.



Σχ. 12

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ διεύθυνσις τῆς περιστροφῆς τοῦ σώματος ὡς καὶ ποία ἡ συνισταμένη ῥοπὴ τῶν δύο ζευγῶν.

Λύσις: Αἱ ῥοπαὶ P_1 καὶ P_2 θὰ εἶναι ἀντιστοίχως

$$P_1 = F_1\lambda_1$$

$$P_2 = F_2\lambda_2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ δὲ συνισταμένη ῥοπὴ P, ὡς διανυσματικὸν ἄθροισμα τῶν P_1 καὶ P_2 θὰ εἶναι:

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

$$P = \sqrt{F_1^2\lambda_1^2 + F_2^2\lambda_2^2}$$

$$P = \sqrt{9 + 12{,}25}$$

$$\boxed{P = 4{,}85 \text{ Kg}^*\text{m}}$$

Ἡ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν F_1 σχηματιζομένη γωνία (φ) τοῦ διανύσματος τῆς ῥοπῆς, ἐκφράζοντος τὸν ἄξονα περιστροφῆς, θὰ εἶναι ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται, τοιαύτη ὥστε:

$$P_2 = P \text{ συνφ}$$

ἐξ οὗ:

$$\text{συνφ} = \frac{P_2}{P}$$

$$\text{συνφ} = \frac{3{,}5}{4{,}85} = 0{,}72165$$

$$\boxed{\varphi \simeq 43^\circ 45'}$$

ὁπότε ἡ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῶν F_2 σχηματιζομένη γωνία (θ) θὰ εἶναι:

$$\vartheta = 90^\circ - \varphi$$

$$\vartheta = 90^\circ - 43^\circ 45'$$

$$\boxed{\vartheta = 46^\circ 15'}$$

63. Δύναμις ἔχει ἔντασιν $F = 12$ Kg*.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ δύο συνιστωσῶν της σχηματιζουσῶν γωνίας $\varphi = 105^\circ$ καὶ $\vartheta = 60^\circ$ μὲ τὴν διεύθυνσίν της.

Λύσις: Ἔστωσαν F_1 καὶ F_2 αἱ συνιστῶσαι καὶ φ ἡ μεταξὺ F καὶ F_1 γωνία, ὁπότε θὰ εἶναι θ ἡ μεταξὺ F καὶ F_2. Ἔστω προσέτι ω ἡ ἔναντι τῆς F γωνία (ἴδ. σχ. 13).

Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου F_1, F_2, F ἔχομεν:

$$\frac{F}{\text{ημω}} = \frac{F_1}{\text{ημθ}} = \frac{F_2}{\text{ημφ}} \qquad (1)$$

$$\omega + (\varphi + \vartheta) = 180^\circ \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν:

$$\omega = 180^\circ - (\varphi + \vartheta)$$

$$\omega = 15^\circ$$

$$\text{ημω} = 0{,}25882$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν :

$$\frac{F}{\eta\mu\omega} = \frac{F_1}{\eta\mu\vartheta}$$

καὶ

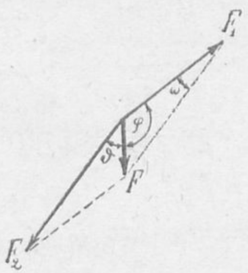
$$F_1 = \frac{F\eta\mu\vartheta}{\eta\mu\omega}$$

$$\boxed{F_1 = 40{,}1 \text{ Kg}^*}$$

ἐν συνεχείᾳ δὲ

$$F_2 = \frac{F\eta\mu\varphi}{\eta\mu\omega}$$

$$\boxed{F_2 = 44{,}7 \text{ Kg}^*}$$



Σχ. 13

64. Δύναμις $f = 1{,}5$ Kg* ἐνεργεῖ ἐπί τινος σώματος.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν πρέπει νὰ τεθῇ μία δύναμις $f' = f$ παράλληλος καὶ ὁμόρροπος πρὸς τὴν f καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ ῥοπὴ P (δυνάμεων $f_1 = 12$ Kg* ἀπεχουσῶν κατὰ $\lambda_1 = 3$ cm) ἥτις, ὁμοῦ μετὰ τῆς δυνάμεως f′ θ' ἀντικαθιστοῦν τὴν f μὲ τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα.

Λύσις: Ἔστω λ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις μεταξὺ f καὶ f′, θὰ ἰσχύσουν τότε αἱ σχέσεις :

$$P = f\lambda$$

$$P = f_1\lambda_1$$

ἐξ οὗ :

$$f\lambda = f_1\lambda_1$$

$$\lambda = \frac{f_1\lambda_1}{f}$$

$$\boxed{\lambda = 24 \text{ cm}}$$

65. Δύο δυνάμεων παραλλήλων ἡ μία ἔχει τιμὴν $f_1 = 30$ Kg*. Ἡ μεταξύ των συνισταμένη εἶναι $\Sigma = 20$ Kg*, ἀπέχει δὲ ἀπὸ τῆς f_1 κατὰ ἀπόστασιν $\lambda_1 = 2$ m.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποῖον σημεῖον, ἐπὶ τῆς συνδεούσης τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς τῶν δυνάμεων εὐθείας, ἡ ῥοπὴ τούτων θὰ εἶναι P=400 Kg*m, ποία θὰ εἶναι ἡ f_2 ὡς καὶ ποία ἡ ἀπόστασις τῶν δύο δυνάμεων (λ).

Λύσις: Ἔστω ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς f_1. Θὰ ἔχομεν τότε:

$$P = \Sigma (x \pm \lambda_1) \tag{1}$$

$$f_2 = \Sigma - f_1 \tag{2}$$

$$\lambda = \frac{(f_1 + f_2)\lambda_1}{- f_2} \tag{3}$$

Προκύπτει ἐν συνεχείᾳ, ἐκ μὲν τῆς (2):

$$f_2 = 20 - 30$$

$$\boxed{f_2 = -10 \text{ Kg*}}$$

ὁπότε ἡ f_2 εἶναι ἀντίρροπος τῆς f_1, ἐκ δὲ τῆς (3):

$$\lambda = \frac{[30 + (-10)].2}{10}$$

$$\boxed{\lambda = 4 \text{ m}}$$

Σημ. Τὸ θετικὸν σημεῖον τῆς λ δεικνύει ὅτι ἡ ἀπόστασις λ, ἐκ τῆς Σ μετρουμένη, εἶναι τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς τὴν τῆς λ_1, ἤτοι ὅτι ἡ συνισταμένη κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας τῆς συνδεούσης τὰς f_1 καὶ f_2.

Τελικῶς εἰς τὸν τύπον (1), δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν P, Σ καὶ λ_1 ἔχομεν:

$$400 = 20\,x \pm 40$$

ἤτοι $$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 18 \text{ m} \\ x_2 = 22 \text{ m} \end{array}}$$

Σημ. Αἱ δύο ἀπόλυτοι τιμαὶ x_1 καὶ x_2 δεικνύουν ὅτι ὑπάρχουν δύο σημεῖα ἑκατέρωθεν τῆς f_1 εἰς τὰ ὁποῖα πληροῦται ὁ ὡς ἄνω ὅρος, ἤτοι τὸ ἓν εἰς ἀπόστασιν x_1=18 m πρὸς τὸ μέρος τῆς f_2, τὸ δ᾽ ἕτερον εἰς ἀπόστασιν x_2=22 m, ἀπὸ τῆς f_1 πάλιν, πρὸς τὸ μέρος τῆς Σ.

66. Ἐπὶ εὐθείας AB ἐνεργοῦν τρεῖς δυνάμεις f_1=10 Kg*, f_2=6 Kg* καὶ f_3=2 Kg*, κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μὲ τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς των εἰς ἀποστάσεις ἀπὸ τοῦ A ἀντιστοίχως $\lambda_1=4$ m, $\lambda_2=7$ m καὶ $\lambda_3=8$ m, οὕτως ὥστε νὰ σχηματίζουν γωνίας μετὰ τῆς AB ἀντιστοίχως $\varphi_1 = 30^o$, $\varphi_2 = 150^o$, $\varphi_3 = 90^o$.

Ζητεῖται: Ποὺ θὰ εὑρίσκεται τὸ ἐπὶ τῆς AB σημεῖον ἐφαρμογῆς (O) τῆς συνισταμένης τῶν f_1, f_2, f_3.

Λύσις: Τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς (O) πρέπει νὰ εὑρίσκεται εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε τὸ σύνολον τῶν ροπῶν τῶν δυνάμεων νὰ εἶναι ὡς πρὸς αὐτὸ ἴσον μὲ μηδέν, ἔστω δὲ ὅτι εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν f_1 καὶ f_2.

Οὕτω προκύπτει ἡ σχέσις:

$$P_{f_1} - (P_{f_2} + P_{f_3}) = 0 \tag{1}$$

ἀλλὰ ἡ ροπὴ τῆς f_1 ὡς πρὸς τὸ O (P_{f_1}) εἶναι:

$$P_{f_1} = f_1 (x - \lambda_1)\ \eta\mu\varphi_1$$

ἂν θεωρηθῇ ὡς x ἡ ἀπόστασις τοῦ O ἀπὸ τοῦ A.

Ἀντιστοίχως θὰ εἶναι, διὰ τὴν P_{f_2}:

$$P_{f_2} = f_2 (\lambda_2 - x)\ \eta\mu\varphi_2$$

καὶ διὰ τὴν P_{f_3}:

$$P_{f_3} = f_3 (\lambda_3 - x)\ \eta\mu\varphi_3$$

ὁπότε ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{10.4.0,5 + 6.7.0,5 + 2.8}{10.0,5 + 6.0,5 + 2}$$

$$x = \frac{57}{10}$$

$$\boxed{x = 5,7 \text{ m}}$$

ἤτοι τὸ σημεῖον O θὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν σημείων ἐφαρμογῆς τῶν f_1 καὶ f_2 καὶ εἰς τὴν ὡς ἄνω ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A.

67. Ἐπὶ τῆς περιφερείας δίσκου ἐνεργεῖ δύναμις $f_1=15$ Kg* εἰς σημεῖόν τι ταύτης A, κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ δίσκου καὶ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας. Δευτέρα δύναμις f_2, ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ κέντρου καὶ κειμένη εἰς τὸ αὐτὸ μὲ τὴν f_1 ἐπίπεδον εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν f_1.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις καὶ ἡ φορὰ τῆς f_2 ὥστε ἡ συνισταμένη (Σ) τῶν δύο δυνάμεων νὰ ἔχῃ σημεῖον ἐφαρμογῆς B εἰς θέσιν κατὰ διάμετρον ἀντίθετον ὡς πρὸς τὸ A, ὡς καὶ ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης ταύτης.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἵνα τὸ σημεῖον Β εἶναι σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς Σ πρέπει αἱ ὡς πρὸς τοῦτο ροπαὶ τῶν f_1 καὶ f_2 νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, ὁπότε ὑποτιθεμένης r τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$P_{f_1} = - P_{f_2}$$

$$2rf_1 = - rf_2$$

καὶ

$$f_2 = - 2f_1$$

$$\boxed{f_2 = - 30 \text{ Kg}^*}$$

Ἤτοι ἡ f_2, διπλασία τῆς f_1, θὰ εἶναι ἀντίρροπος πρὸς ταύτην, ἡ δὲ συνισταμένη θὰ ἔχῃ τιμήν:

$$\Sigma = f_1 + f_2$$

$$\Sigma = 15 - 30$$

$$\boxed{\Sigma = - 15 \text{ Kg}^*}$$

καὶ θὰ εἶναι ὁμόρροπος πρὸς τὴν f_2 ὡς ἔχουσα τὸ αὐτὸ σημεῖον (—).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

68. Τρεῖς δυνάμεις ἐντάσεων ἀντιστοίχως $f_1 = 1$ Kg*, $f_2 = 0{,}5$ Kg* καὶ $f_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Kg*, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου (O) ἰσορροποῦν.

Ζητεῖται: Ποῖαι θὰ εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν διευθύνσεών των σχηματιζόμεναι γωνίαι.

Λύσις: $F_1\widehat{O}F_2 = 120^\circ$, $F_2\widehat{O}F_3 = 90^\circ$, $F_3\widehat{O}F_1 = 150^\circ$.

69. Δύο δυνάμεις $f_1 = 300$ Kg* καὶ $f_2 = 400$ Kg* ἐνεργοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου σχηματίζουσαι γωνίαν $\varphi = 90^\circ$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς συνισταμένης των (Σ).

Λύσις: $\Sigma = 500$ Kg*.

70. Δύο δυνάμεων ὁ λόγος τῶν ἐντάσεών των εἶναι $f_1/f_2 = \sqrt{2}$, ἡ δὲ συνισταμένη των ἔχει ἔντασιν ἴσην μὲ τὴν τῆς μικροτέρας, κατ᾽ ἀπόλυτον τιμήν.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μεταξὺ f_1 καὶ f_2 σχηματιζομένη γωνία (φ).

Λύσις: $\varphi = 135^\circ$.

71. Δίδεται δύναμις $f = 8$ Kg*.

Ζητεῖται: Νὰ ἀναλυθῇ αὕτη εἰς δύο συνιστώσας f_1 καὶ f_2,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σχηματιζούσας γωνίας, μὲ τὴν διεύθυνσιν τῆς f, ἀντιστοίχως $\varphi_1 = 60^0$ καὶ $\varphi_2 = 30^0$.

Λύσις: $f_1 = 4$ Kg*, $f_2 = 4\sqrt{3}$ Kg*.

72. Δίδεται δύναμις f = 12 Kg*, ἐνεργοῦσα ἐπὶ σημείου (Ο) εὐθείας xox', καθέτως πρὸς ταύτην.

Ζητεῖται: I) Νὰ ἀναλυθῇ ἡ f εἰς δύο παραλλήλους συνιστώσας ἐχούσας γινόμενον $f_1 f_2 = 35$ Kg*².

II) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς τῆς f_2 ἐπὶ τῆς εὐθείας xox' (λ_2) ἂν τὸ τῆς f_1 ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ Ο κατὰ $\lambda_1 = 10$ cm, καὶ εἶναι $f_1 > f_2$.

Λύσις: $f_1 = 7$ Kg*, $f_2 = 5$ Kg*, $\lambda_2 = 14$ cm.

ΔΥΝΑΜΙΚΗ

73. Σῶμα μάζης m=40,5 gr, ἀναχωρῆσαν ἐκ τῆς ἠρεμίας, διήνυσε, μετὰ πάροδον χρόνου t=3 sec, διάστημα S=1962 cm, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως f.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως f εἰς μονάδας CGS καὶ εἰς gr*.

Λύσις: Ἡ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς f κίνησις τοῦ σώματος θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη μὲ ἐπιτάχυνσιν

$$\gamma = \frac{f}{m}$$

ὁπότε τὸ διάστημα S θὰ εἶναι :

$$S = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

$$S = \frac{ft^2}{2m}$$

ἐξ οὗ ἔχομεν :

$$f = \frac{2mS}{t^2}$$

$$f = \frac{2.40{,}5.1962}{9}\ \frac{gr.cm.}{sec^2}$$

$$\boxed{f = 17658 \text{ dynes}}$$

ἤτοι

$$f = \frac{2.40{,}5.1962}{9.981}\ gr^*$$

$$\boxed{f = 18\ gr^*}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

74. Σῶμα μάζης m=3924 gr δέχεται τὴν συνεχῆ ἐπίδρασιν δυνάμεως f=4 Kg*.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσίς του γ.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{f}{m} = \gamma$$

ἔχομεν :

$$\gamma = \frac{4}{3924} \frac{Kg^*}{gr}$$

$$\gamma = \frac{4.981.10^3}{3924} \frac{dyne}{gr}$$

ὁπότε, ἁπλοποιοῦντες τὸ κλᾶσμα τῶν τιμῶν ὡς καὶ τὸ τῶν μονάδων, ἐφ᾽ ὅσον εἶναι

$$dyne = gr.cm.sec^{-2}$$

ἔχομεν :

$$\gamma = 10^3 \frac{gr.cm.sec^{-2}}{gr}$$

$$\gamma = 1000 \text{ cm/sec}^2$$

ἤτοι $\boxed{\gamma = 10 \text{ m/sec}^2}$

75. Κινητόν, δεχόμενον τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως f=81 Kg* παρουσιάζει ἐπιτάχυνσιν γ=900 Km/h² (χιλιομέτρων κατὰ τετρ. ὥραν).

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μᾶζα του m.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{f}{m} = \gamma \quad \text{ἔχομεν } m = \frac{f}{\gamma}$$

ὁπότε, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν f καὶ γ, ἔχομεν :

$$m = \frac{81}{900} \frac{Kg^*}{Km.h^{-2}}$$

ἢ

$$m = \frac{81}{900} \frac{Kg^*.h^2}{Km}$$

ὁπότε μετατρέπομεν τὰ ποσὰ Kg*, h², Km εἰς cgs (dyne, sec², cm) καὶ ἔχομεν :

$$m = \frac{81.981.10^3 \times 3600^2}{900.10^5} \frac{dyne.sec^2}{cm}$$

$$m = \frac{81.981.36^2.10^7}{900.10^5} \frac{gr.cm.sec^{-2}.sec^2}{cm}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τελικῶς : $m = 981.11664 \text{ gr}$

$$m = 11442384 \text{ gr}$$

$$\boxed{m = 11442,384 \text{ Kg}}$$

76. Κινητὸν μάζης m=981 gr ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου καί, δεχόμενον συνεχῶς τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως f=620 gr*, ἀποκτᾶ εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t=12 sec ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς του ταχύτητα v=450 cm/sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης (v_0) τοῦ σώματος.

Λύσις: Ἡ ἐπίδρασις τῆς δυνάμεως f θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ σῶμα ὁμαλῶς μεταβαλλομένην κίνησιν, ὁπότε ὁ ἰσχύων τύπος θὰ εἶναι :

$$v = v_0 + \gamma t$$

ὅστις γίνεται

$$v = v_0 + \frac{ft}{m} \qquad (1)$$

ἐφ᾽ ὅσον εἶναι $\gamma = f/m$.

Ἐκ τῆς (1), λύοντες ὡς πρὸς v_0, ἔχομεν :

$$v_0 = v - \frac{ft}{m}$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν v, f κλπ. καὶ ἀνάγοντες ταύτας εἰς τὸ σύστημα CGS, εὑρίσκομεν :

$$v_0 = 450 - \frac{620.12}{981} \quad \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1} - \frac{\text{gr}^*.\text{sec}}{\text{gr}}$$

$$v_0 = 450 - \frac{620.981.12}{981} \quad \text{cm} \cdot \text{sec}^{-1} - \frac{\text{gr.cm.sec}^{-2}.\text{sec}}{\text{gr}}$$

$$v_0 = 450 - 7440 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$v_0 = -6990 \text{ cm/sec}$$

ἤτοι $\boxed{v_0 = -69,9 \text{ m/sec}}$

Ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου τῆς v_0 συμπεραίνομεν προσέτι ὅτι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης θὰ εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς ὡς πρὸς τὴν δύναμιν, ἡ δὲ κίνησις θὰ εἶναι ἐπιβραδυνομένη ἀρχικῶς, ἐπιταχυνομένη δὲ κατὰ τὴν στιγμὴν t.

***77.** Σῶμα μάζης m=1962 gr, ἐν ἠρεμίᾳ εὑρισκόμενον, δέχεται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως f=8 gr*, ἥτις ἐξακολουθεῖ καὶ ἐνεργεῖ ἐπὶ χρόνον t=2 sec, ὁπότε καὶ καταπαύει.

Ζητεῖται: Ποῖον διάστημα (S) θὰ ἔχει διανύσει τὸ κινητὸν μετὰ πάροδον χρόνου t′=80 sec ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἡ προσδιδομένη ὑπὸ τῆς f ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι:

$$\gamma = \frac{f}{m}$$

Αὕτη, εἰς χρόνον t, θὰ ἀναγκάσῃ τὸ σῶμα νὰ διανύσῃ διάστημα

$$S_1 = \frac{\gamma t^2}{2}, \quad S_1 = \frac{ft^2}{2m} \qquad (1)$$

Τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἡ ταχύτης θὰ εἶναι:

$$v = \gamma t, \quad v = \frac{ft}{m}$$

ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ὁποίας τὸ κινητὸν θὰ διαγράψῃ διάστημα S_2 εἰς τὸν ὑπόλοιπον χρόνον $(t'-t)$:

$$S_2 = v(t'-t), \quad S_2 = \frac{ft(t'-t)}{m} \qquad (2)$$

ὁπότε τὸ ὅλον διάστημα S θὰ εἶναι:

$$S = S_1 + S_2$$

ἤτοι, ἐκ τῶν (1) καὶ (2):

$$S = \frac{ft^2}{2m} + \frac{ft(t'-t)}{m}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ταύτης σχέσεως, δι᾽ ἐκτελέσεως τῶν πράξεων, ἔχομεν:

$$S = \frac{ft^2 + 2ftt' - 2ft^2}{2m}$$

$$S = \frac{2ftt' - ft^2}{2m}$$

$$S = \frac{ft(2t'-t)}{2m}$$

ὁπότε, ἀντικαθιστῶμεν τὰς τιμὰς τῶν f, t κλπ. εἰς μονάδας CGS (ὁπότε τὸ f γίνεται f=8.981 dynes) καὶ εὑρίσκομεν:

$$S = \frac{8.981.2\,(2.80-2)}{2.1962}\;\frac{dyne\,.\,sec^2}{gr}$$

$$S = 632\;\frac{gr\,.\,cm\,.\,sec^{-2}.\,sec^2}{gr}$$

$$\boxed{S = 632\ cm}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

78. Σῶμα μάζης m=400 gr κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα v=8829 cm/sec.

Ζητεῖται: Ποία δύναμις (f) πρέπει νὰ ἐνεργήσῃ ἐπ' αὐτοῦ κατὰ φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν τῆς κινήσεως, ὥστε τὸ κινητὸν νὰ ἠρεμήσῃ ἐντὸς χρόνου t=3 sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐπιδράσεως τῆς δυνάμεως.

Λύσις: Ἡ δύναμις f, ὡς ἔχουσα ἀντίθετον πρὸς τὴν κίνησιν φοράν, θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ σῶμα ἐπιβράδυνσιν

$$\gamma = \frac{f}{m}$$

ὁπότε τὸ κινητὸν θὰ ἔχῃ εἰς ἑκάστην στιγμὴν ταχύτητα

$$v = v_0 - \gamma t$$

$$v = v_0 - \frac{ft}{m} \qquad (1)$$

Διὰ νὰ ἠρεμήσῃ ὅμως τὸ κινητὸν ἡ ταχύτης του θὰ πρέπει νὰ εἶναι:

$$v = 0$$

ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$0 = v_0 - \frac{ft}{m}$$

καὶ

$$f = \frac{mv_0}{t}$$

ἤτοι

$$f = \frac{400.8829}{3} \text{ dynes}$$

$$f = \frac{400.8829}{3.981} \text{ gr}^*$$

$$f = 1200 \text{ gr}^*$$

$$\boxed{f = 1{,}2 \text{ Kg}^*}$$

79. Ἐπὶ σώματός τινος, κινουμένου μὲ σταθερὰν ταχύτητα v_0, ἐνεργεῖ σταθερὰ δύναμις f=6 Kg*, ἥτις, μετὰ πάροδον χρόνου t=16 sec, ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιδράσεώς της, ἐπαναφέρει τὸ σῶμα εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν, εἰς ἣν τοῦτο εὑρίσκετο κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς τὸ πρῶτον ἐπιδράσεως.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ δύναμις ἔχῃ τὴν αὐτὴν ὡς πρὸς τὴν κίνησιν διεύθυνσιν καὶ ἡ μᾶζα τοῦ σώματος εἶναι m=490,5 gr, νὰ εὑρεθῇ ποία εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης του, ὡς καὶ ἡ φορὰ ταύτης ὡς πρὸς τὴν τῆς δυνάμεως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Διὰ νὰ ἐπανέλθῃ τὸ σῶμα εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν, εἰς ἣν τὸ πρῶτον ἐνήργησεν ἡ δύναμις, πρέπει νὰ διανυθῇ διάστημα, διανυσματικῶς, ἔχον τιμήν:

$$S = 0$$

Ἐφ᾽ ὅσον ὅμως, τὸ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως διάστημα εἶναι

$$S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$$

τότε προκύπτει:

$$\frac{\gamma t^2}{2} + v_0 t = 0$$

ἢ

$$\frac{ft^2}{2m} + v_0 t = 0$$

καὶ

$$v_0 = -\frac{f.t}{2m}$$

ἤτοι

$$v_0 = -\frac{6.16}{2.490,5}\,\frac{Kg^*.sec}{gr}$$

$$v_0 = -\frac{6.981.10^3.16}{2.490,5}\,\frac{dyn.sec}{gr}$$

$$v_0 = -6.16.10^3\,\frac{gr.cm.sec^{-2}.sec}{gr}$$

$$v_0 = -96000\ cm/sec$$

$$\boxed{v_0 = -960\ m/sec}$$

Ἤτοι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης (v_0=960 m/sec) θὰ ἔχῃ φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν τῆς δυνάμεως.

§ 80. Ἐπὶ ἑνὸς ἀκινήτου σώματος μάζης m=8829 gr ἐνεργεῖ δύναμις f_1=50 Kg* ἐπὶ χρόνον t_1=6 sec, μετὰ ταῦτα αὔτη καταπαύει καὶ ἐνεργεῖ δευτέρα δύναμις f_2=7 Kg* ἐπὶ χρόνον t_2=30 sec, φορᾶς ἀντιθέτου πρὸς τὴν τῆς f_1.

Ζητεῖται: Πόσον διάστημα θὰ ἔχῃ διανύσει τελικῶς τὸ κινητὸν εἰς τὸ πέρας τοῦ χρόνου t_2.

Λύσις: Τὸ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς f_1 διάστημα τοῦ σώματος θὰ εἶναι:

$$S_1 = \frac{f_1 t_1^2}{2m}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ δὲ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς f_2:

$$S_2 = \frac{f_2 t_2^2}{2m}$$

ὁπότε τὸ ὅλον διάστημα θὰ εἶναι:

$$S = S_1 - S_2$$

$$S = \frac{f_1 t_1^2 - f_2 t_2^2}{2m}$$

$$S = \frac{50.6^2 - 7.30^2}{2.8829} \frac{Kg^*.sec^2}{gr}$$

$$S = \frac{(50.6^2 - 7.30^2)\,981.10^3}{2.8829} \frac{dyn.sec^2}{gr}$$

$$S = \frac{-4500.981.10^3}{2.8829} \frac{gr.cm.sec^{-2}.sec^2}{gr}$$

$$S = -25000 \text{ cm}$$

$$\boxed{S = -2500 \text{ m}}$$

81. Σῶμα ρίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον μετὰ χρόνον t=10 sec.

Ζητεῖται: Ποία ἡ ἀρχικὴ ταχύτης του (v_0) καὶ ποῖον τὸ μέγιστον ὕψος (S) εἰς τὸ ὁποῖον θὰ φθάσῃ (εἰς μονάδας CGS), ὑπολογιζομένης τῆς βαρύτητος ὡς g=981 cm/sec².

Λύσις: Ὅταν τὸ σῶμα ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς ἀναχωρήσεώς του τὸ συνολικῶς διανυθὲν διάστημα θὰ εἶναι

$$S_0 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

ἐπειδὴ ὅμως

$$S_0 = 0$$

ἔχομεν:

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t = 0$$

ἤτοι

$$v_0 = \frac{gt}{2}$$

$$v_0 = \frac{981.10}{2} \text{ cm.sec}^{-2}.\text{sec}$$

$$\boxed{v_0 = 4905 \text{ cm/sec}}$$

Ἐν συνεχείᾳ, πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου ὕψους, ὅπερ ἔστω διανύεται εἰς χρόνον t′, ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$S = v_0 t' - \frac{1}{2} g t'^2 \tag{1}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὑπολογιζομένου τοῦ χρόνου t′ ἐκ τοῦ ὅτι κατ᾽ αὐτὸν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ θὰ εἶναι $v=0$, ἤτοι :

$$0 = v_0 - gt'$$

$$t' = \frac{v_0}{g}$$

ὁπότε θέτοντες τὴν τιμὴν ταύτην εἰς τὴν σχέσιν (1) ἔχομεν :

$$S = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g}$$

$$S = \frac{v_0^2}{2g}$$

ἤτοι (ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ v_0 καὶ τοῦ g) :

$$\boxed{S = 12262{,}5 \text{ cm}}$$

82. Παρατηρητὴς ἵσταται ἐπὶ ὑψηλοῦ πύργου καὶ προσβλέπει πρὸς τὸ ἔδαφος. Εἰς στιγμήν τινα ἐκ τῆς βάσεως τοῦ πύργου ρίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω βαρὺ σῶμα, ὅπερ διέρχεται διὰ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ παρατηρητοῦ ἀφ᾽ ἑνὸς εἰς χρόνον $t_1=2$ sec, ἀφ᾽ ἑτέρου (κατὰ τὴν ἐκ τῶν ἄνω ἐπιστροφήν του) εἰς χρόνον $t_2=6$ sec ἀπὸ τῆς ἐξακοντίσεως.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου (h) καὶ ποία ἡ ἀρχικὴ ταχύτης (v_0) τῆς πρὸς τὰ ἄνω ρίψεως τοῦ σώματος ($g=980$ cm/sec²).

Λύσις: Τὸ ὕψος h, ὡς διάστημα ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως, θὰ δίδεται, συναρτήσει τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος, ὑπὸ τοῦ τύπου

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

ὅστις θὰ ἐπαληθεύεται προφανῶς δι᾽ ἀμφοτέρας τὰς τιμὰς t_1 καὶ t_2, ὁπότε ἔχομεν τὸ σύστημα :

$$h = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad (2)$$

$$h = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \qquad (3)$$

ὅπερ λύοντες ὡς πρὸς v_0 καὶ h, ἔχομεν :

$$\boxed{\begin{aligned} h &= 58{,}86 \text{ m} \\ v_0 &= 39{,}24 \text{ m/sec} \end{aligned}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Σημ. Ἀντὶ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν (1) εἰς ἣν δίδομεν μορφὴν τριωνύμου ἴσου πρὸς μηδέν:

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0t + h = 0$$

ὁπότε αἱ τιμαὶ t_1 καὶ t_2, ὡς ρίζαι τούτου, θὰ ἐπαληθεύουν τοὺς ἐκ τῆς ἀλγέβρας τύπους

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_1x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

οἵτινες γίνονται ἀντιστοίχως

$$t_1 + t_2 = \frac{2v_0}{g} \qquad (4)$$

$$t_1t_2 = \frac{2h}{g} \qquad (5)$$

ὁπότε ἐκ μὲν τοῦ (4) ἔχομεν:

$$v_0 = \frac{(t_1 + t_2)g}{2}$$

$$\boxed{v_0 = 39{,}24 \text{ m/sec}}$$

ἐκ δὲ τοῦ (5):

$$h = \frac{t_1t_2g}{2}$$

$$\boxed{h = 58{,}86 \text{ m}}$$

83. Παρατηρητής, ἱστάμενος ἐπὶ ὑψηλοῦ πύργου, ἀφίνει νὰ πέσῃ κατακορύφως βαρὺ σῶμα. Ταυτοχρόνως δεύτερον σῶμα ρίπτεται ἐκ τῆς βάσεως τοῦ πύργου πρὸς τὰ ἄνω, ὁπότε τὰ δύο σώματα κινούμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου συγκρούονται μετὰ χρόνον t=2 sec ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεώς των, ἐνῶ εὑρίσκονται εἰς ὕψος ἴσον μὲ τὰ $^3/_4$ τοῦ ὅλου ὕψους τοῦ πύργου.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου (h) καὶ ποία ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ ἐκ τῶν κάτω κινουμένου βαρέως σώματος ($g = 980$ cm/sec^2).

Λύσις: Μετὰ χρόνον t τὸ ἐκ τῶν ἄνω κινούμενον σῶμα θὰ ἔχῃ διανύσῃ διάστημα:

$$h_1 = \frac{1}{4}h$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὸ δὲ ἐκ τῶν κάτω διάστημα :

$$h_2 = \frac{3}{4} h$$

ὁπότε θὰ εἶναι προφανῶς :

$$h_1 = \frac{1}{2} gt^2 \qquad (1)$$

καὶ

$$h_2 = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν h_1 καὶ h_2 εἰς τὰς (1) καὶ (2) διὰ τῶν ἴσων των ἔχομεν :

$$h = 2gt^2 \qquad (1,α)$$

$$h = \frac{4v_0 t - 2gt^2}{3} \qquad (2,α)$$

ὁπότε δι᾿ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν g καὶ t τῆς (1,α) ἔχομεν τὸ ὕψος τοῦ πύργου :

$$h = 2.980.2^2 \text{ cm} . \text{sec}^{-2} . \text{sec}^2$$

$$\boxed{h = 78,4 \text{ m}}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς v_0 λαμβάνομεν τὴν (2,α), ἣν λύομεν ὡς πρὸς v_0, ὁπότε εἶναι :

$$v_0 = \frac{3h}{4t} + \frac{gt}{2}$$

ὅπου, δι᾿ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν ἔχομεν :

$$v_0 = \frac{3.78,4}{4.2} + \frac{980.2}{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}} + \text{cmsec}^{-2}.\text{sec}$$

$$v_0 = \frac{3.78,4}{4.2} + \frac{980.2.10^{-2}}{2} \frac{\text{m}}{\text{sec}} + \text{msec}^{-2}.\text{sec}$$

$$v_0 = 3.9,8 + 9,8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$\boxed{v_0 = 39,2 \text{ m/sec}}$$

84. Ἀπὸ τοῦ χείλους φρέατος ἀφίενται ἀλληλοδιαδόχως νὰ πέσουν δύο βαρέα σώματα, τὸ δεύτερον κατὰ t=2 sec μετὰ τὸ πρῶτον, ὁπότε ὅταν τοῦτο φθάνει εἰς τὸν πυθμένα τὸ δεύτερον ἀπέχει κατὰ διάστημα S=98 m.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάθος (h) τοῦ φρέατος ὡς καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπὶ πόσον χρόνον (θ) θὰ κινηθῇ ἕκαστον κινητὸν διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸν πυθμένα ($g=9{,}8$ m/sec^2).

Λύσις: Ἔστω h τὸ βάθος τοῦ φρέατος. Τοῦτο διὰ τὸ πρῶτον κινητὸν θὰ εἶναι

$$h = \frac{1}{2} g\theta^2 \qquad (1)$$

Τὴν στιγμὴν ὅμως τῆς ἀφίξεως τοῦ πρώτου, τὸ δεύτερον θὰ ἔχῃ διανύσῃ διάστημα (h—S), εἰς χρόνον (θ—t), ὁπότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$h - S = \frac{1}{2} g(\theta - t)^2 \qquad (2)$$

Λύοντες ἐν συνεχείᾳ ταύτην ὡς πρὸς h καὶ ἐξισοῦντες τὴν ἐκ τῆς (1) τιμὴν τοῦ h μὲ τὴν ἐκ τῆς (2) προκύπτουσαν, ἔχομεν:

$$\frac{1}{2} g\theta^2 = \frac{1}{2} g(\theta - t)^2 + S$$

ὁπότε
$$\frac{1}{2} g\theta^2 = \frac{1}{2} g\theta^2 - g\theta t + \frac{1}{2} gt^2 + S$$

καὶ τελικῶς:
$$\theta = \frac{t}{2} + \frac{S}{gt}$$

$$\boxed{\theta = 6 \text{ sec}}$$

ὁπότε ἐκ τῆς (1) καὶ τῆς τιμῆς $\theta=6$ sec εὑρίσκομεν καὶ τὸ βάθος τοῦ φρέατος h:

$$\boxed{h = 176{,}4 \text{ m}}$$

85. Αὐτοκίνητον, μάζης $m=3$ Tonn, κινεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v_1=19{,}62$ Km/h. Αἰφνιδίως ἐμφανίζεται πρὸ αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν $S=9{,}81$ m ἐμπόδιόν τι.

Ζητεῖται: Ποία συνολικὴ σταθερὰ ἀντίστασις (F) πρέπει, διὰ τοῦ τροχοπεδικοῦ συστήματος, νὰ ἐνεργήσῃ κατὰ φορὰν ἀντίθετον πρὸς τὴν τῆς κινήσεως, ὥστε τὸ αὐτοκίνητον νὰ ἠρεμήσῃ ἀκριβῶς πρὸ τοῦ ἐμποδίου, καὶ πότε (t) θὰ συμβῇ τοῦτο.

Λύσις: Ἡ κίνησις τοῦ ὀχήματος ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐνεργείας τῆς ἀντιστάσεως θὰ εἶναι ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένη, ὁπότε τὸ αὐτοκίνητον θὰ διανύσῃ τὸ διάστημα S εἰς χρόνον t συμφώνως πρὸς τοὺς τύπους:

$$S = v_1 t - \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (1)$$

$$O = v_1 - \gamma t \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δεδομένης ὅμως τῆς ἐπιβραδύνσεως

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

θὰ ἔχωμεν, ἐκ τῶν (1) καὶ (2), τὰς σχέσεις:

$$S = v_1 t - \frac{Ft^2}{2m} \qquad (1,\alpha)$$

$$O = v_1 - \frac{Ft}{m} \qquad (2,\alpha)$$

ὁπότε, ἐκ τῆς (2,α) ἔχομεν τὴν τιμὴν τοῦ χρόνου t:

$$t = \frac{v_1 m}{F} \qquad (3)$$

ἥν, θέτοντες εἰς τὴν (1,α) εὑρίσκομεν

$$S = \frac{v_1^2 m}{F} - \frac{v_1^2 m}{2F}$$

καὶ

$$F = \frac{v_1^2 m}{2S}$$

ἤτοι, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν v_1, m κλπ.

$$F = \frac{19{,}62^2 . 3}{2.9{,}81} \; \frac{Km^2 . Tonn}{h^2 . m}$$

καί, διὰ μετατροπῆς τῶν μονάδων τοῦ S εἰς Km, πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων:

$$F = \frac{19{,}62^2 . 3}{2.9{,}81.10^{-3}} \; \frac{Km^2 . Tonn}{h^2 . Km}$$

$$F = \frac{19{,}62^2 . 3}{2.9{,}81.10^{-3}} \; \frac{Km . Tonn}{h^2}$$

Ἐν συνεχείᾳ, μετατρέποντες τὰς μονάδας μήκους, δυνάμεως, κλπ., εἰς τοιαύτας CGS ἔχομεν:

$$F = \frac{19{,}62^2 . 3 . 10^5 . 10^6}{2.9{,}81.10^{-3}.(3600)^2} \; \frac{cm . gr}{sec^2} = dynes$$

$$F = \frac{19{,}62^2 . 3 . 10^5 . 10^6}{2.9{,}81.10^{-3}.(3600)^2 . 981.10^3} \; Kg^*$$

$$\boxed{F = 462{,}9 \; Kg^*}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τέλος, πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου t ἔχομεν τὴν (3):

$$t = \frac{v_1 m}{F}$$

εἰς ἣν ἀντικαθιστῶμεν τὴν εἰς dynes τιμὴν τῆς F, τὴν εἰς gr τιμὴν τοῦ m καὶ τὴν εἰς cm/sec τοῦ v_1:

$$t = \frac{19{,}62.10^5.3.10^6.2.9{,}81.10^{-3}.3600^2}{36.10^2.19{,}62^2.3.10^5.10^6} \text{ sec}$$

$$\boxed{t = 3{,}6 \text{ sec}}$$

86. Σιδηροδρομικὸς συρμός, βάρους συνολικοῦ B=588,6 Tonn* ἐκκινεῖ ἀπὸ τῆς ἠρεμίας, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως (F), κινούμενος ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ δύναμις αὕτη, ὥστε ὁ συρμὸς νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα v=180 Km/h μετὰ χρόνον t=3 min ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς του.

Λύσις: Ἡ κίνησις τοῦ συρμοῦ, προφανῶς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη, θὰ παρουσιάζῃ μετὰ χρόνον t ταχύτητα:

$$v = \gamma t, \quad v = \frac{Ft}{m}$$

ἐξ ὧν ἔχομεν:

$$F = \frac{mv}{t}$$

$$F = \frac{588{,}6.180}{3} \frac{\text{Tonn . Km}}{\text{h.min}}$$

$$F = \frac{588{,}6.180.10^6.10^5}{3.3600.60} \frac{\text{gr . cm}}{\text{sec}^2} = \text{dynes}$$

$$F = \frac{588{,}6.180.10^6.10^5}{3.3600.60.981.10^3} \text{ Kg*}$$

$$F = 16666 \text{ Kg*}$$

$$\boxed{F = 16{,}666 \text{ Tonn*}}$$

87. Ἐκ τῆς ὀροφῆς ἀνελκυστῆρος πίπτοντος μὲ σταθερὰν ἐπιτάχυνσιν γ=0,8 m/sec², ἀφίεται βαρὺ σῶμα.

Ζητεῖται: Πότε τὸ σῶμα θὰ φθάσῃ εἰς τὸ δάπεδον τοῦ ἀνελκυστῆρος, δεδομένης τῆς ἀποστάσεως δαπέδου - ὀροφῆς λ=4,5 m (g=9,80 m/sec²).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου κινήσεως ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν σχετικὴν ὡς πρὸς τὸν ἀνεκυστῆρα ἐπιτάχυνσιν τοῦ σώματος (γ'). Πρὸς τοῦτο ἔστω h_1 τὸ διανυθὲν ὑπὸ τοῦ ἀνελκυστῆρος διάστημα εἰς χρόνον θ, τοῦτο θὰ εἶναι

$$h_1 = \frac{1}{2}\gamma\theta^2$$

ταυτοχρόνως τὸ ὑπὸ τοῦ σώματος διανυθὲν ἀπόλυτον διάστημα θὰ εἶναι:

$$h_2 = \frac{1}{2} g\theta^2$$

Ἡ διαφορὰ ὅμως $h_2—h_1$ θὰ παριστᾷ τὸ σχετικὸν διάστημα τοῦ σώματος ὡς πρὸς τὸν ἀνελκυστῆρα, ὁπότε

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} g\theta^2 - \frac{1}{2}\gamma\theta^2$$

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2}(g - \gamma)\theta^2$$

ἐξ οὗ προκύπτει ὅτι ἡ εἰς τὸ σχετικὸν διάστημα $h_2 - h_1$ ἀντιστοιχοῦσα ἐπιτάχυνσις εἶναι:

$$\gamma' = g - \gamma$$

Ἐκ ταύτης ἔχομεν, διὰ τὴν ἐντὸς τοῦ ἀνελκυστῆρος κίνησιν:

$$\lambda = \frac{1}{2}(g - \gamma)t^2$$

ὅπου t ὁ ζητούμενος χρόνος, ἤτοι:

$$t = \sqrt{\frac{2\lambda}{g-\gamma}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2.4,5}{9,8-0,8}}\sqrt{\frac{m}{m\,.\,sec^{-2}}}$$

$$\boxed{t = 1\ sec}$$

88. Σῶμά τι ἔχει εἰς τὴν Γῆν βάρος $B = 15$ Kg* (μὲ $g = 9,8$ m/sec²).

Ζητεῖται: Πόσον θὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦ σώματος τούτου εἰς πλανήτην ἔχοντα μᾶζαν ἴσην μὲ τὸ $^1/_6$ τῆς μάζης τῆς Γῆς καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ $^1/_{18}$ τῆς ἀκτῖνος τῆς Γῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἔστω M καὶ r ἡ μᾶζα καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς καὶ M′ καὶ r′ αἱ τοῦ πλανήτου. Θὰ ἰσχύη τότε διὰ μὲν τὰς μάζας ἡ σχέσις:

$$M' = \frac{M}{6}$$

διὰ δὲ τὰς ἀκτῖνας:

$$r' = \frac{r}{18}$$

Ἡ εἰς τὴν Γῆν ἐπιτάχυνσις (g) ὅμως δίδεται ὡς γνωστὸν ὑπὸ τοῦ τύπου

$$g = \frac{KM}{r^2}$$

ὅπου K ἡ σταθερὰ τοῦ Newton.

Θὰ ἔχωμεν τότε διὰ τὸν πλανήτην ἐπιτάχυνσιν βαρύτητος:

$$\gamma = \frac{KM'}{r'^2}$$

ἤτοι

$$\gamma = \frac{KM.18^2}{6.r^2}$$

$$\gamma = \frac{54KM}{r^2}$$

$$\gamma = 54\,g$$

$$\boxed{\gamma = 529{,}2\ \mathrm{m/sec^2}}$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ εἰς τὸν πλανήτην βάρους (B′) τοῦ σώματος ἔχοντος μᾶζαν ἔστω m ἔχομεν:

Ἐκ τοῦ εἰς τὴν Γῆν βάρους:

$$B = mg$$

καὶ ἐκ τοῦ εἰς τὸν πλανήτην

$$B' = m\gamma$$

τὴν σχέσιν:

$$\frac{B}{B'} = \frac{g}{\gamma}$$

ἤτοι

$$B' = \frac{B\gamma}{g}$$

$$B' = 15.54\ \mathrm{Kg}^*$$

$$\boxed{B' = 810\ \mathrm{Kg}^*}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

89. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως $\varphi=30^0$ κυλίεται βαρὺ σῶμα ἄνευ τριβῆς.

Ζητεῖται: Πόσον διάστημα (s) θὰ διανύσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὸ σῶμα, ἐντὸς χρόνου $t=4{,}2$ sec, ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἐπίπεδον ἀπεριορίστου μήκους ($g=9{,}8$ m/sec²).

Λύσις: Ἡ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου κίνησις τοῦ σώματος θὰ παρουσιάζῃ ἐπιτάχυνσιν

$$\gamma = g\,.\,\eta\mu\varphi$$

ὁπότε τὸ διάστημα s θὰ εἶναι:

$$s = \frac{1}{2}\,g.\eta\mu\varphi.t^2$$

$$s = \frac{1}{2}.9{,}8.0{,}5.4{,}2^2$$

$$\boxed{s = 43{,}218 \text{ m}}$$

90. Σῶμα κινούμενον ἄνευ τριβῆς ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως $\varphi=36^0 4' 17''$ ὠθεῖται πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=19{,}6$ m/sec κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἀπεριορίστου μήκους.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον μέγιστον ὕψος ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τῆς ἐκκινήσεώς του θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα.

Λύσις: Ἡ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἐπιβράδυνσις τοῦ σώματος θὰ εἶναι προφανῶς

$$\gamma = g\eta\mu.\varphi$$

ὁπότε τὸ μέγιστον διάστημα τῆς ἐπιβραδυνομένης ταύτης κινήσεως θὰ εἶναι:

$$S = \frac{v_0^2}{2\gamma}, \quad S = \frac{v_0^2}{2g.\eta\mu\varphi} \qquad (1)$$

Τὸ ὕψος ὅμως h, ὡς ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗτινος τὸ S εἶναι ὑποτείνουσα, θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$h = S.\eta\mu\varphi$$

ἥτις, ἐκ τῆς (1), γίνεται:

$$h = \frac{v_0^2}{2g.\eta\mu\varphi}.\eta\mu\varphi$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g}, \quad h = \frac{19{,}6^2}{2.9{,}8}\,\frac{m^2.\,sec^{-2}}{m\,.\,sec^{-2}}$$

$$\boxed{h = 19{,}6 \text{ m}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν προσέτι ὅτι τὸ μέγιστον κατακόρυφον ὕψος σώματος, κινουμένου ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, εἶναι, διὰ δεδομένην ἀρχικὴν ταχύτητα v_0, ἀνεξάρτητον τῆς γωνίας κλίσεως.

91. Δύο διάφορα σώματα ἀφίενται ἐξ ἑνὸς σημείου Α νὰ κυλίσκουν ἐπὶ κεκλιμένων ἐπιπέδων διαφόρων, κλίσεως φ_1, φ_2.

Ζητεῖται: Ποῖος θὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν διανυθέντων ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων διαστημάτων, μετὰ χρόνον t ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεώς των.

Λύσις: Τὸ ἓν σῶμα, ἔχον ἐπιτάχυνσιν

$$\gamma_1 = g\eta\mu\varphi_1$$

θὰ διανύσῃ διάστημα εἰς χρόνον t:

$$S_1 = \frac{1}{2}\gamma_1 t^2$$

ἤτοι

$$S_1 = \frac{1}{2} g\eta\mu\varphi_1.t^2 \qquad (1)$$

ἀντιστοίχως τὸ ἕτερον διάστημα:

$$S_2 = \frac{1}{2} g\eta\mu\varphi_2.t^2 \qquad (2)$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) ἔχομεν τότε:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{{}^1/_2.g\eta\mu\varphi_1.t^2}{{}^1/_2.g\eta\mu\varphi_2.t^2}$$

ἤτοι $\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{\eta\mu\varphi_1}{\eta\mu\varphi_2}}$

Θὰ εἶναι δηλαδὴ τὰ διαστήματα ἀνάλογα πρὸς τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν κλίσεως.

92. Σῶμα ἀφίεται ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρου σημείου (Α) κεκλιμένου ἐπιπέδου, γωνίας κλίσεως $\varphi_1 = 30^o$ καὶ μήκους $S_1 = 10\sqrt{2}$ cm, εἰς τὸ πέρας τοῦ ὁποίου συνέχεται δεύτερον κεκλιμένον ἐπίπεδον, ἀπεριορίστου μήκους, κλίσεως $\varphi_2 = 45^o$.

$\varphi_1 = 30^o$

Ζητεῖται: Πόσον διάστημα (S_2) θὰ διαγράψῃ τὸ κινητὸν εἰς τὸ δεύτερον ἐπίπεδον (ἴδ. σχ. 14).

Λύσις: Ἔστω Β τὸ βάρος τοῦ σώματος. Ἡ εἰς τὸ πέρας τοῦ πρώτου ἐπιπέδου (0) κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ σώματος θὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶναι προφανῶς ἴση μὲ τὴν εἰς τὸ Α θέσει ἐνέργειαν ὡς πρὸς τὸ κατώτατον ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ Ο, ἀπέχον ἔστω h ἐκ τοῦ Α. Ἡ ἐνέργεια αὕτη θὰ εἶναι

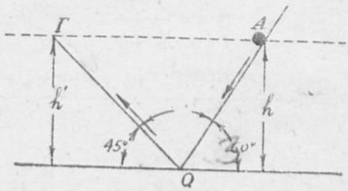
$$w = Bh \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδή :

$$h = S_1 ημφ_1 \qquad (1,α)$$

$$w = BS_1 ημφ_1$$

Ἐκ τῆς θέσεως ταύτης (0) τὸ κινητόν, συνεχῖζον τὴν κίνησίν



Σχ. 14

του, θὰ φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν Γ, ἀνυψοῦν τὸ βάρος του κατὰ διάστημα h′ καὶ καταναλίσκον ἔργον :

$$w' = Bh' \qquad (2)$$

ἐπειδὴ ὅμως, συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας, πρέπει νὰ εἶναι :

$$w = w'$$

ἔχομεν, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) :

$$h = h'$$

καὶ τότε τὸ διάστημα S_2, θὰ εἶναι

$$S_2 = \frac{h}{ημφ_2}$$

ὅπερ, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τοῦ h διὰ τῆς τιμῆς του (1,α), γίνεται

$$S_2 = \frac{S_1 ημφ_1}{ημφ_2}$$

ἤτοι

$$S_2 = \frac{10\sqrt{2}.0,5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ cm}$$

$$\boxed{S_2 = 10 \text{ cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

93. Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood, αἱ δύο βαρεῖαι μᾶζαι ἔχουν ἑκάστη βάρος B=119,6 gr*.

Ζητεῖται: Τί πρόσθετον βάρος (β) πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ὥστε τὸ σύστημα νὰ παρουσιάζῃ ἐπιτάχυνσιν γ=0,6 m/sec² (g=9,8 m/sec²).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood:

$$\gamma = \frac{g.\beta}{2B+\beta} \qquad (1)$$

ἔχομεν:

$$\beta = \frac{2\gamma B}{g-\gamma}$$

$$\beta = \frac{2.0{,}6.119{,}6}{9{,}2} \; \frac{m.sec^{-2}.gr^*}{m.sec^{-2}}$$

$$\boxed{\beta = 15{,}6 \text{ gr}^*}$$

94. Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood διανύεται ὑπὸ τοῦ ὅλου κινητοῦ συστήματος διάστημα S=150 cm ἐντὸς χρόνου t=5 sec, κατὰ τὴν προσθήκη μικροῦ προσθέτου βάρους β=6 gr*.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάρος B ἑκάστης τῶν μεγάλων μαζῶν (g=980 cm/sec²).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$B = \frac{\beta(g-\gamma)}{2\gamma} \qquad (1)$$

ὅπου ἡ ἐπιτάχυνσις γ θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$S = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

ἤτοι θὰ εἶναι

$$\gamma = \frac{2S}{t^2}$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$B = \frac{\beta(t^2 g - 2S)}{4S}$$

ἐξ ἧς ἔχομεν:

$$B = \frac{6(5^2.980-2.150)}{4.150} \; \frac{gr^*(cm)}{cm}$$

$$\boxed{B = 242 \text{ gr}^*}$$

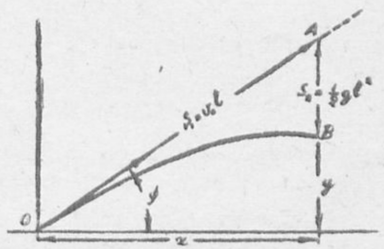
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

95. Βλῆμα ρίπτεται ὑπὸ πυροβόλου ἐκ τοῦ ἐδάφους, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 360$ Km/h ὑπὸ γωνίαν (ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον) $\varphi = 45^0$.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον ὕψος (y) καὶ εἰς ποῖον μῆκος (x) θὰ φθάσῃ τοῦτο μετὰ χρόνον $t = \sqrt{2}$ sec, ὑποτιθεμένης τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος $g = 10$ m/sec² καὶ μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος.

Λύσις: Τὴν κίνησιν τοῦ βλήματος δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς σύνθετον, ἐκ μιᾶς ὁμαλῆς εὐθυγράμμου κινήσεως, ὀφειλομένης εἰς τὴν συνεχῶς διατηρουμένην ταχύτητα v_0, καὶ ἐκ μιᾶς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης, ὀφειλομένης εἰς τὴν ἐπιτάχυνσιν g.

Οὕτω, ἡ θέσις Β εἰς ἣν θὰ φθάσῃ τὸ βλῆμα μετὰ χρόνον t, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς συνισταμένη θέσις τοῦ εὐθέως διαστήματος $S_1 = v_0 t$ (ἴδ. σχ. 15) καὶ τοῦ $S_2 = \frac{1}{2} gt^2$.



Σχ. 15

Ἐκ τούτων ἔχομεν, ὡς ἐκ τοῦ σχηματιζομένου **τριγώνου** ΟΑΓ :

$$x = S_1 \text{ συνφ}$$

$$x = v_0 t \text{ συνφ} \qquad (1)$$

καὶ

$$y = \overline{\text{ΑΓ}} - \overline{\text{ΑΒ}}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$\overline{\text{ΑΓ}} = S_1 \text{ ημφ} = v_0 t \text{ ημφ}$$

$$\overline{\text{ΑΒ}} = \frac{1}{2} gt^2$$

$$y = v_0 t \text{ ημφ} - \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔχομεν τότε, ἐκ μὲν τῆς (1):

$$x = \frac{360 . \sqrt{2} . \sqrt{2}}{2} \ \frac{Km . sec}{h}$$

$$x = \frac{36.10.10^5}{36.10^2} \ \frac{cm . sec}{sec}$$

$$x = 10000 \ cm$$

$$\boxed{x = 100 \ m}$$

ἐκ δὲ τῆς (2) (δεδομένης τῆς σχέσεως ημ 45°=συν 45°):

$$y = 100 - \frac{1}{2} . 10(\sqrt{2})^2 \ m$$

$$\boxed{y = 90 \ m}$$

96. Βλῆμα ῥίπτεται ὑπὸ πυροβόλου ὑπὸ γωνίαν $\varphi = 45^\circ$, μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0 = 127008$ m/h.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ μεγίστη του ὁριζοντία ἀπόστασις (x) εἰς ἣν θὰ συναντήσῃ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τῆς ἐκκινήσεώς του (βεληνεκές).

Λύσις: Ὅταν τὸ βλῆμα θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ μὲ τὸ τῆς ἐκκινήσεως ὁριζόντιον ἐπίπεδον, τότε θὰ εἶναι y=0, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις (2) τῆς ἀσκήσεως 95 θὰ γίνῃ:

$$\frac{1}{2} gt^2 - v_0 t \ \eta\mu\varphi = 0$$

ἐξ ἧς ἔχομεν δύο τιμὰς τοῦ t.

Τὴν
$$t = \frac{2v_0 \ \eta\mu\varphi}{g} \qquad (1)$$

καὶ τὴν
$$t' = 0$$

Τὴν τελευταίαν ταύτην ἀπορρίπτομεν ὡς ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν ἐκκίνησιν, ὁπότε, ἐκ τῆς (1) καὶ τῆς τιμῆς τοῦ x:

$$x = v_0 t \ \sigma\upsilon\nu\varphi$$

ἔχομεν:

$$x = \frac{2v_0^2 . \eta\mu\varphi . \sigma\upsilon\nu\varphi}{g}$$

$$x = \frac{2.(127008)^2 . \sqrt{2} \ \sqrt{2}}{4.9,8} \ \frac{m^2 \ sec^2}{h^2 . m}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$x = \frac{(127008)^2}{9,8.(3600)^2} \; \frac{m \cdot sec^2}{sec^2}$$

$$x = \frac{127008.127008}{127008.10^3} \; m$$

$$\boxed{x = 127,008 \text{ m}}$$

97. Ἔκ τινος σημείου (Ο) ἀναχωρεῖ κινητὸν μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v=90$ m/sec καὶ κινεῖται εὐθυγράμμως ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου.

Ταυτοχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ρίπτεται, ὑπὸ γωνίαν $\varphi=30^0$ βλῆμα, πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ κινητοῦ καὶ οὕτως ὥστε ἡ τροχιὰ τούτου καὶ ἡ τοῦ βλήματος νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κατακορύφου ἐπιπέδου ($g=9,81$ m/sec²).

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος ὥστε τοῦτο κατὰ τὴν πτῶσίν του νὰ εὕρῃ τὸ κινητὸν εἰς ἀπόστασιν $x=1000$ m ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως.

Λύσις: Διὰ νὰ εὕρῃ τὸ βλῆμα τὸ κινητόν, ταυτοχρόνως ἀναχωρῆσαν, πρέπει οἱ χρόνοι κινήσεως ἀμφοτέρων (t) νὰ εἶναι ἴσοι.

Διὰ τὸ βλῆμα ὅμως ἔχομεν (ὡς γνωστὸν ἐκ τῶν προηγουμένων ἀσκήσεων) διὰ ὕψος $y=0$, χρόνον:

$$t = \frac{2v_0 \eta\mu\varphi}{g} \qquad (1)$$

διὰ δὲ τὸ κινητὸν

$$t = \frac{x}{v} \qquad (2)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$\frac{x}{v} = \frac{2v_0\, \eta\mu\varphi}{g}$$

καὶ τελικῶς

$$v_0 = \frac{xg}{2v\, \eta\mu\varphi}$$

ἤτοι:

$$v_0 = \frac{1000.9,81}{2.90.\frac{1}{2}} \; \frac{m \cdot m \cdot sec^{-2}}{m \cdot sec^{-1}}$$

$$\boxed{v_0 = 109 \text{ m/sec}}$$

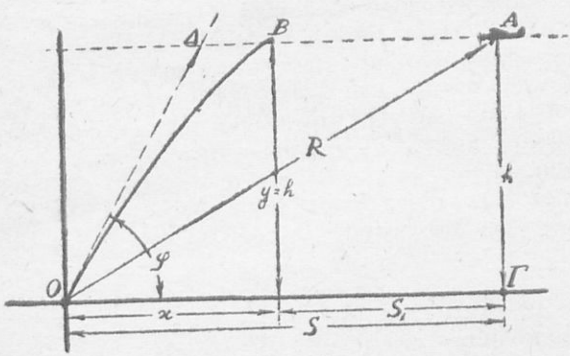
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

98. Ἀεροπλᾶνον, ἱπτάμενον εἰς σταθερὸν ὕψος h=1000 m κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα v=200 m/sec, οὕτως ὥστε τὸ κατακόρυφον ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τῆς εὐθείας τροχιᾶς του νὰ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ τόπου ἔνθα εὑρίσκεται πυροβόλον.

Εἰς στιγμήν τινα, ὅταν ὁ ποῦς τῆς καθέτου τοῦ ἀεροπλάνου ἀπέχει τοῦ πυροβόλου κατὰ ἀπόστασιν S=5000 m ρίπτεται ἐκ τοῦ πυροβόλου βλῆμα ὑπὸ γωνίαν $\varphi=45^{\circ}$.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τοῦ βλήματος (v_0), ὥστε τοῦτο νὰ εὕρῃ τὸ ἀεροπλᾶνον κινούμενον πρὸς τὸ πυροβόλον, καὶ πότε (t) θὰ συμβῇ τοῦτο μετὰ τὴν ἐκσφενδόνισιν τοῦ βλήματος.

Λύσις: Ἔστω Α ἡ θέσις τοῦ ἀεροπλάνου καθ' ἣν στιγμὴν ρίπτεται τὸ βλῆμα (ἴδ. σχ. 16), Ο ἡ θέσις τοῦ πυροβόλου καὶ Β



Σχ. 16

ἡ θέσις καθ' ἣν τὸ βλῆμα πλήττει τὸ ἀεροπλᾶνον.

Εἶναι προφανὲς ὅτι οἱ χρόνοι (t) τῶν τροχιῶν $\overline{OB}$ καὶ $\overline{AB}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσοι.

Τότε τὸ διάστημα ΑΒ (ἤτοι S_1) θὰ εἶναι

$$S_1 = vt \qquad (1)$$

θὰ συνδέεται δὲ προσέτι μὲ τὸ ὅλον διάστημα S καὶ τὴν τετμημένην x τοῦ βλήματος διὰ τοῦ τύπου :

$$S = x + S_1$$

$$S = x + vt$$

$$x = S - vt \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ τετμημένη ὅμως αὕτη (x) πρέπει νὰ εἶναι ἀφ' ἑτέρου, ὡς γνωστὸν ἐκ τῶν προηγουμένων, ἴση μὲ

$$x = v_0 t \,\text{συνφ}$$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται

$$S - vt = v_0 t \,\text{συνφ} \qquad (3)$$

Τέλος, δεδομένου ὅτι τὸ ἀεροπλᾶνον ἵπταται εἰς σταθερὸν ὕψος (h=y), ἔχομεν διὰ τὴν τεταγμένην τοῦ βλήματος τιμήν:

$$y = v_0 t \,\text{ημφ} - \frac{1}{2} g t^2$$

ἤτοι

$$h = v_0 t \,\text{ημφ} - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

Μὲ τὰς (3) καὶ (4) ἔχομεν οὕτω τὸ σύστημα:

$$S - vt = v_0 t \,\text{συνφ} \qquad (3,\alpha)$$

$$h = v_0 t \,\text{ημφ} - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4,\alpha)$$

εἰς ὅ, δεδομένης τῆς ἰσότητος (διὰ $\varphi = 45^0$):

$$\text{ημ}\,45^0 = \text{συν}\,45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

οἱ ὅροι $v_0 t \,\text{ημφ}$ καὶ $v_0 t \,\text{συνφ}$ εἶναι ἴσοι μὲ

$$\frac{v_0 t \sqrt{2}}{2}$$

καὶ τότε ἐκ τῆς (3,α) καὶ (4,α) εὑρίσκομεν:

$$t = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 - 2g(h - S)}}{g}$$

Ἐξ οὗ, ἀπορρίπτοντες τὴν μίαν ἀρνητικὴν λύσιν, δι' ἀντικαταστάσεων τῶν τιμῶν, ἔχομεν

$$\boxed{t = 14{,}7 \text{ sec}}$$

καί, ἐκ τῆς (3,α):

$$v_0 = \frac{S - vt}{t \,\text{συνφ}}$$

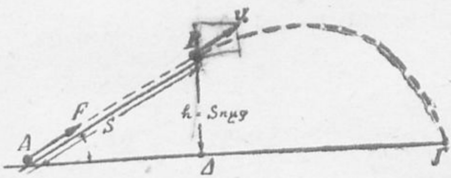
$$\boxed{v_0 = 172{,}4 \text{ m/sec}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

99. Ἐπὶ ἀνωφερικοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, κλίσεως $\varphi = 30^\circ$ καὶ μήκους $S = 100$ cm, ὠθεῖται πρὸς τὰ ἄνω σῶμα μάζης $m = 1$ gr ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως $F = 550$ dynes, ἥτις διαρκεῖ ἀπὸ τῆς κατωτάτης (Α) μέχρι τῆς ἀνωτάτης (Β) θέσεως τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὁποίου ἔχει τὴν διεύθυνσιν.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα, ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου τοῦ σημείου Β, ἐπὶ τοῦ ἀρχικοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τῆς ἐκκινήσεως (μὴ ὑπολογιζομένων τῶν τριβῶν) καὶ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς κινήσεως ($g = 1000$ CGS).

Λύσις: Ἔστω Α ἡ ἀρχικὴ θέσις τοῦ σώματος, Β ἡ τελευταία θέσις καθ' ἣν ἐνεργεῖ ἡ δύναμις, καὶ Γ ἡ τῆς συναντήσεως τοῦ σώματος μὲ τὸ ἀρχικὸν ὁριζόντιον ἐπίπεδον (ἴδ. σχ. 17).



Σχ. 17

Ἔστω προσέτι δὲ h τὸ μῆκος τῆς καθέτου ΒΔ, ὅπερ θὰ εἶναι

$$h = S\,\eta\mu\varphi$$

Κατὰ τὸ διάστημα ΑΒ ἡ κίνησις τοῦ κινητοῦ θὰ γίνεται ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ἐπιταχύνσεως:

$$\gamma = \frac{F - B\,\eta\mu\varphi}{m}$$

ὁπότε ἡ εἰς τὴν θέσιν Β ταχύτης (v_0) θὰ εἶναι:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2S\,(F - B\,\eta\mu\varphi)}{m}}$$

θὰ πρέπει δὲ αὕτη νὰ ἐπαληθεύῃ τὸ ὕψος $y = -h$ διὰ νὰ εὑρεθῇ ἐκ τούτου κατόπιν ὁ χρόνος καὶ ἡ ἀπόστασις ΔΓ ($= x$).

Ἔχομεν ἐξ αὐτῶν τὸ σύστημα:

$$x = \sqrt{\frac{2S\,(F - B\,\eta\mu\varphi)}{m}}\,.\,t\,\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (1)$$

$$-h = \sqrt{\frac{2S\,(F - B\,\eta\mu\varphi)}{m}}\,.\,t\,\eta\mu\varphi - \frac{1}{2}\,g t^2 \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἰς ὃ ἄγνωστοι εἶναι μόνον αἱ τιμαὶ τοῦ x καὶ τοῦ t, ἃς εὑρίσκομεν λύοντες τοῦτο, ὁπότε τελικῶς προκύπτει :

$$\boxed{t \simeq 0{,}371 \text{ sec}}$$

καὶ $$\boxed{x \simeq 26{,}23 \text{ cm}}$$

100. Σῶμα μάζης m=490,5 gr ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως F=1500 gr* ἐπὶ χρόνον t=40 sec.

Ζητεῖται: Πόσον θὰ εἶναι τὸ παραχθὲν ἔργον W εἰς τὸ τέλος τοῦ χρόνου t, ἂν ἡ δύναμις ἐπέδρασε τὸ πρῶτον ὅταν τὸ σῶμα εὑρίσκετο ἐν ἠρεμίᾳ.

Λύσις: Τὸ παραχθὲν ἔργον εἶναι

$$W = F \, . \, S \qquad (1)$$

ὅπου S τὸ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F διανυθὲν διάστημα :

$$S = \frac{1}{2} \gamma t^2$$

$$S = \frac{Ft^2}{2m}$$

συμφώνως πρὸς τὸ ὁποῖον ὁ τύπος (1) γίνεται :

$$W = \frac{F^2t^2}{2m}$$

$$W = \frac{(1500)^2.(40)^2}{2.490{,}5} \; \frac{gr^{*2}.\,sec^2}{gr}$$

$$W = \frac{(1500)^2.(40)^2.(981)^2}{981} \; \frac{dynes^2.\,sec^2}{gr}$$

$$W = (1500)^2.(40)^2.(981) \text{ erg}$$

$$W = 15^2.10^4.4^2.10^2.981 \text{ erg}$$

$$W = \frac{15^2.4^2.981.10^6}{981.10^5} \text{ Kg*m}$$

$$\boxed{W = 36.000 \text{ Kg*m}}$$

101. Αὐτοκινήτου μάζης m=12,96 Tonn, ἡ εἴς τινα στιγμὴν ταχύτης του, ἔχουσα τιμὴν v_1=30 Km/h μεταβάλλεται καί, ἐντὸς χρόνου t=10 sec, γίνεται v_2=40 Km/h.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Πόσον μηχανικὸν ἔργον (W) πρέπει νὰ παραχθῇ ὑπὸ τῆς μηχανῆς διὰ τὴν ὡς ἄνω μεταβολὴν καὶ μὲ ποίαν μέσην ἰσχὺν (J).

Λύσις: Ἡ ἀρχικὴ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ ὀχήματος εἶναι:

$$E_1 = \frac{1}{2} mv_1^2$$

ἡ δὲ τελικὴ

$$E_2 = \frac{1}{2} mv_2^2$$

ἡ διαφορά, παριστάνουσα τὸ παραχθὲν ἔργον, θὰ εἶναι:

$$W = E_2 - E_1$$

$$W = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2$$

$$W = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$$

$$W = \frac{12{,}96(40^2 - 30^2)}{2} \frac{\text{Tonn}\,.\,\text{Km}^2}{h^2}$$

$$W = \frac{12{,}96(40^2 - 30^2).10^6.10^{10}}{2.36^2.10^4} \text{ erg}$$

$$W = \frac{12{,}96(40^2 - 30^2).10^{16}}{2.36^2 10^4.981.10^3.10^2} \text{ Kg}^*.\text{m}$$

$$W = \frac{700.10^5}{2.981} \text{ Kg}^*\text{m}$$

$$W = 35678 \text{ Kg}^*\text{m}$$

καὶ ἡ ἰσχὺς J θὰ εἶναι:

$$J = \frac{W}{t}$$

$$J = \frac{35678}{10} \text{ Kg}^*\text{m/sec}$$

$$J = \frac{35678}{750} \text{ HP}$$

$$\boxed{J = 47{,}824 \text{ HP}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

102. Βαρὺ σῶμα πίπτει ἐξ ὕψους $h = 25$ m ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἀνακλᾶται, χάνων κατὰ τὴν κροῦσίν του τὰ $^4/_5$ τῆς ἐνεργείας του, ἥτις μεταβάλλεται εἰς θερμότητα.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον ὕψος (h') θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα μετὰ τὴν κροῦσιν.

Λύσις: Θεωροῦντες B τὸ βάρος τοῦ σώματος, τὴν εἰς τὸ σημεῖον τῆς κρούσεως κινητικὴν ἐνέργειαν (E_κ) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὡς ἔχουσαν τιμὴν

$$E_\kappa = Bh$$

Ἐξ αὐτῆς ὅμως μένει μόνον τὸ $^1/_5$ διὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ σώματος, ἤτοι ἐνέργεια

$$E = \frac{Bh}{5} \qquad (1)$$

δυναμένη νὰ παράγῃ ἔργον (W) ἱκανὸν διὰ τὴν μετατόπισιν τοῦ βάρους κατὰ τὸ ἄγνωστον διάστημα h', συμφώνως τῷ τύπῳ:

$$W = Bh'$$

ὅστις, διὰ $E = W$ καὶ μὲ βάσιν τὸν (1) γίνεται:

$$\frac{Bh}{5} = Bh'$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὸ h':

$$h' = \frac{h}{5}$$

$$\boxed{h' = 5 \text{ m}}$$

103. Δύναμις F συνεχῶς ἐνεργεῖ ἐπὶ σώματος περιστρεφομένου ἐπὶ περιφερείας κύκλου, διατηρεῖ δὲ τὴν ἀπόλυτον φορὰν καὶ διεύθυνσίν της καθ᾽ ὅλην τὴν περιστροφήν.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἔργον μιᾶς περιστροφῆς.

Λύσις: Κατὰ τὴν μετατόπισιν AB (ἴδ. σχ. 18) τὸ ἔργον θὰ εἶναι προφανῶς

$$W_1 = FR$$

ἂν εἶναι R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου.

Κατὰ τὴν ΒΓ ἀντιστοίχως

$$W_2 = -FR$$

κατὰ δὲ τὰς ΓΔ καὶ ΔΑ ὁμοίως

$$W_3 = -FR$$

$$W_4 = FR$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

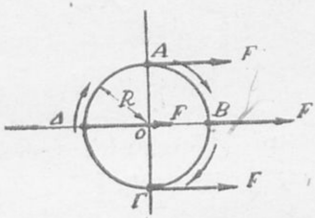
ὁπότε τὸ συνολικὸν ἔργον θὰ εἶναι :

$$W = FR - FR - FR + FR$$

$$\boxed{W = O}$$

Ἐκ τούτων συνάγωμεν ὅτι τὸ ἔργον κλειστῆς μετατοπίσεως δυνάμεως διατηρούσης τὴν φορὰν καὶ τὴν διεύθυνσίν της εἶναι πάντοτε $W = O$.

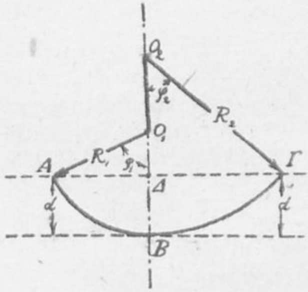
104. Σῶμά τι κυλίεται ἄνευ τριβῆς ἐπὶ κοίλης ἐπιφανείας σφαίρας, ἀκτῖνος καμπυλότητος R_1, ἀφιέμενον ἐλεύθερον ἔκ τινος



Σχ. 18

σημείου A, ἀπέχοντος τῆς ἐφαπτομένης τοῦ κατωτάτου σημείου τῆς σφαίρας (B) κατὰ ἀπόστασιν d.

Δευτέρα κοίλη σφαῖρα (ἀκτῖνος καμπυλότητος R_2) συνέχεται τῆς πρώτης εἰς τὸ κατώτατον σημεῖον (B), ὅπου ὑπάρχει κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο σφαιρῶν (ἴδ. σχ. 19).



Σχ. 19

Ζητεῖται : Ποῖος θὰ εἶναι ὁ λόγος μεταξὺ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν διαγραφομένων τόξων $\widehat{AB}$ ($= \varphi_1$) καὶ $\widehat{B\Gamma}$ ($= \varphi_2$) καὶ τῶν ἀκτίνων R_1, R_2.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα διατηρήσεως τῆς ἐνεργείας τὰ ὕψη d καὶ d′ θὰ εἶναι ἴσα, ἤτοι:

$$d = d'$$

Τότε ἐκ μὲν τοῦ τριγώνου $O_1 A \Delta$ ἔχομεν

$$R_1 - d = R_1 \, \sigma\upsilon\nu\varphi_1$$

ἐκ δὲ τοῦ $O_2 \Gamma \Delta$:

$$R_2 - d = R_2 \, \sigma\upsilon\nu\varphi_2$$

ἐξ ὧν προκύπτει διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη:

$$\frac{R_1 - d}{R_2 - d} = \frac{R_1 \, \sigma\upsilon\nu\varphi_1}{R_2 \, \sigma\upsilon\nu\varphi_2}$$

καὶ

$$\boxed{\frac{\sigma\upsilon\nu \, \widehat{AB}}{\sigma\upsilon\nu \, \widehat{B\Gamma}} = \frac{R_2(R_1 - d)}{R_1(R_2 - d)}}$$

105. Σῶμα μάζης $m = 1079{,}1$ gr περιστρέφεται μὲ γωνιώδη ταχύτητα $\omega = 9 \text{ sec}^{-1}$, ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος $r = 11$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ φυγόκεντρος δύναμίς του (F).

Λύσις: Ἡ φυγόκεντρος δύναμις θὰ εἶναι

$$F = \frac{mv^2}{r}$$

ὅπου $v = \omega r$

ἐξ οὗ ἔχομεν: $$F = m \, . \, r \, . \, \omega^2$$

$$F = 1079{,}1 . 11 . 81 \text{ gr cm sec}^{-2} = \text{dynes}$$

$$F = \frac{1079{,}1 . 11 . 81}{981} \text{ gr}^*$$

$$\boxed{F = 980{,}1 \text{ gr}^*}$$

106. Σῶμα μάζης $m = 2$ gr, συνδεδεμένον διὰ νήματος μήκους $r = 10$ cm περιστρέφεται ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ μὲ σταθερὰν γραμμικὴν ταχύτητα $v_0 = 120$ cm/sec. Ἐν συνεχείᾳ τοῦ προσδίδεται σταθερὰ ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσις γ αὐξάνουσα τὴν γραμμικὴν ταχύτητα.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη (γ) ὥστε τὸ νῆμα νὰ κοπῇ μετὰ χρόνον $t = 6$ sec ἀπὸ τῆς ἐπενεργείας της ὅταν τὸ σῶμα θὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν κατωτάτην θέσιν του, δεδομένου ὅτι τὸ νῆμα ἀντέχει μέχρι δυνάμεως $F = 400$ gr* ($g = 10$ m/sec²).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις : Ὅταν τὸ νῆμα θὰ κοπῇ ὑποτίθεται ὅτι ἡ φυγόκεντρος δύναμις J, μαζὶ μὲ τὴν δύναμιν τοῦ βάρους τοῦ σώματος B, θὰ ἰσοῦνται μὲ τὴν δύναμιν ἀντοχῆς F (πραγματικῶς κατά τι μικροτέραν).

Ἀλλ' ἡ J θὰ εἶναι τότε

$$J = \frac{mv^2}{r}$$

ὅπου

$$v = v_0 + \gamma t$$

ἤτοι

$$J = \frac{m(v_0 + \gamma t)^2}{r}$$

ὁπότε θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις :

$$F = B + J$$

$$F = B + \frac{m(v_0 + \gamma t)^2}{r}$$

ἐξ ὧν προκύπτει ἡ ἐξίσωσις :

$$mt^2\gamma^2 + 2mv_0t\gamma + Br + mv_0^2 - Fr = 0$$

λύοντες δὲ ταύτην ὡς πρὸς γ εὑρίσκομεν :

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_1 &= 52{,}66 \text{ cm/sec}^2 \\ \gamma_2 &= -92{,}66 \text{ cm/sec}^2 \end{aligned}}$$

Ἤτοι θὰ πρέπει, διὰ νὰ ἐπιτευχθῇ τὸ ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα, ἢ νὰ ἐνεργήσῃ μία ἐπιτάχυνσις γ_1 κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως, ἢ μία γ_2 κατ' ἀντίθετον φοράν.

107. Μεταλλικὴ σφαῖρα μάζης m=2 gr περιστρέφεται περὶ κέντρον μέσῳ νήματος, πρακτικῶς ἀβαροῦς, μήκους R = 90 cm μὲ σταθερὰν φυγόκεντρον δύναμιν F=81 gr* ἐπὶ ἐπιπέδου κατακορύφου. Εἴς τινα στιγμὴν κόπτεται τὸ νῆμα, ὅταν ἡ σφαῖρα εὑρίσκεται ἀκριβῶς κάτωθι τοῦ κέντρου περιστροφῆς καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς κατακορύφου (ἴδ. σχ. 20).

Ζητεῖται : Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου ταύτης θὰ φθάσῃ ἡ σφαῖρα, ἐπὶ ἐπιπέδου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν y=10 cm ἀπὸ τῆς θέσεώς της.

Λύσις : Ἐκ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως (F) καὶ τῆς μάζης καὶ ἀκτῖνος (m καὶ R) εὑρίσκομεν τὴν γραμμικὴν ταχύτητα v :

$$v = \sqrt{\frac{FR}{m}} \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

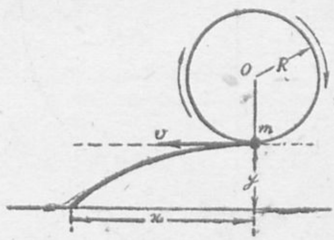
ὑπὸ τὴν ὁποίαν θὰ ἐκσφενδονισθῇ ἡ σφαῖρα ὁριζοντίως, ὁπότε ἔχομεν:

$$y = \frac{1}{2} gt^2$$

$$x = vt$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν:

$$x = v\sqrt{\frac{2y}{g}}$$



Σχ. 20

καί, δι᾿ ἀντικαταστάσεως τοῦ v ἐκ τῆς (1), τελικῶς:

$$x = \sqrt{\frac{F.R}{m}} \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2FRy}{mg}}$$

$$x = \sqrt{\frac{2FRy}{B}}$$

ὅπου B = mg εἶναι τὸ βάρος τῆς σφαίρας.

Δι᾿ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν εὑρίσκομεν:

$$x = \sqrt{\frac{2.81.90.10}{2}} \sqrt{\frac{gr^*.cm.cm}{gr^*}}$$

$$x = \sqrt{81.9.100} \sqrt{cm^2}$$

$$\boxed{x = 270 \text{ cm}}$$

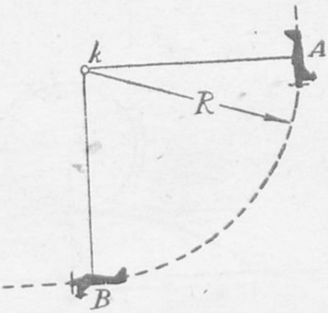
108. Ἀεροπλᾶνον καθέτου ἐφορμήσεως πίπτει κατακορύφως μὲ ταχύτητα v=360 Km/h. Εἴς τινα στιγμὴν μεταβάλλει

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν κίνησίν του εἰς περιστροφικήν, διαγράφον κατακόρυφον τόξον ἀκτῖνος R=0,6 Km (ἴδ. σχ. 21).

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ πόσον θὰ εἶναι, κατὰ τὴν στιγμὴν ὅπου ἡ κίνησις γίνεται ὁριζοντία (B), τὸ σχετικὸν ὡς πρὸς τὸ ἀεροπλᾶνον βάρος τοῦ πιλότου (F′) ἂν τὸ εἰς τὴν γῆν βάρος του εἶναι F=58,8 Kg*.

Λύσις: Τὸ κατὰ τὴν θέσιν B βάρος F′ τοῦ πιλότου θὰ



Σχ. 21

ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ βάρους του (F) καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεώς του (f), ἥτις εἶναι:

$$f = \frac{mv^2}{R}$$

ἂν εἶναι m ἡ μᾶζα του $\left(m = \frac{F}{g}\right)$, ὁπότε ἔχομεν:

$$F' = F + f$$

$$F' = F + \frac{mv^2}{R}$$

$$F' = 58{,}8 + \frac{58{,}8.(360)^2}{0{,}6}\ Kg^* + \frac{Kg.Km^2}{Km.h^2}$$

$$F' = 58{,}8 + \frac{58{,}8.36^2.10^2}{0{,}6}\ Kg^* + \frac{Kg.Km}{h^2}$$

$$F' = 58{,}8 + \frac{58{,}8.36^2.10^2.10^3.10^5}{0{,}6.(3600)^2}\ Kg^* + \frac{gr.cm}{sec^2}$$

$$F' = 58{,}8 + \frac{58{,}8.36^2.10^{10}}{6.36^2.10^3}\ Kg^* + dynes$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$F' = 58,8 + \frac{58,8.36^2.10^{10}}{6.36^2.10^3.980.10^3} Kg^* + Kg^*$$

$$F' = 58,8 + 100\ Kg^*$$

$$\boxed{F' = 158,8\ Kg^*}$$

109. Δίκυκλον ἀκροβασιῶν κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ὁριζοντίως μὲ σταθερὰν ταχύτητα v, ὅτε λαμβάνει κατακόρυφον κυκλικὴν κίνησιν μὲ ἀκτῖνα καμπυλότητος R = 10 m.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ταχύτης v ὥστε τὸ δίκυκλον νὰ μὴ πέσῃ ὅταν θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀνώτατον σημεῖον τῆς περιστροφῆς ($g = 9,8\ m/sec^2$).

Λύσις: Διὰ νὰ μὴ πέσῃ τὸ δίκυκλον πρέπει τοὐλάχιστον τὸ βάρος του B νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν κατὰ τὴν περιστροφήν του φυγόκεντρον δύναμιν (F), ἤτοι:

$$B = F$$

ἀλλ' ἐκ τῶν γνωστῶν σχέσεων

$$B = mg$$

καὶ

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

ἔχομεν:

$$mg = \frac{mv^2}{R}$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν:

$$v = \sqrt{Rg}$$

καὶ τελικῶς

$$v = \sqrt{10.9,8}\ \sqrt{\frac{m.m}{sec^2}}$$

$$v = \sqrt{98}\ m/sec$$

$$\boxed{v = 9,9\ m/sec}$$

110. Ἐντὸς ὑπερπλανητικοῦ ἀεροπλοίου, κινουμένου ἰσοταχῶς εἰς χῶρον ἔνθα δὲν γίνονται αἰσθηταὶ δυνάμεις βαρύτητος, κατασκευάζεται τεχνητὸν πεδίον βαρύτητος διὰ περιστρεφομένου τυμπάνου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἵστανται (ἐπὶ τῆς περιφερείας του), οἱ ἐπιβάται.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ περίοδος περιστροφῆς τοῦ τυμπάνου (T), ἂν τοῦτο ἔχῃ ἀκτῖνα R = 88,2 m, ὥστε οἱ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπιβάται νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ βάρος ὅπερ παρουσιάζουν καὶ εἰς τὴν γῆν, ἤτοι βάρος ὀφειλόμενον εἰς ἐπιτάχυνσιν $g = 9{,}8\ m/sec^2$.

Λύσις: Διὰ νὰ εἶναι τὸ βάρος οἷον καὶ εἰς τὴν γῆν, πρέπει ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις (γ) τοῦ τυμπάνου, εἰς τὴν περιφέρειάν του, νὰ εἶναι

$$\gamma = g$$

Ἀλλὰ εἶναι ὡς γνωστὸν

$$\gamma = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

ὁπότε ἔχομεν ἐκ τούτων τὴν σχέσιν:

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = g$$

καὶ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$T = 6{,}28 \sqrt{\frac{88{,}2}{9{,}8}} \sqrt{\frac{m.sec^2}{m}}$$

$$\boxed{T = 18{,}84\ sec}$$

Ἤτοι ἡ περιστροφὴ πρέπει νὰ λαμβάνῃ χώραν εἰς χρόνον $T = 18{,}84$ sec.

111. Σῶμα μάζης $m = 90$ gr κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα $v = 119{,}9$ cm/sec. Εἰς χρονικήν τινα στιγμὴν ἐνεργεῖ ἐπ' αὐτοῦ δύναμις $F = 0{,}628$ Kg*, κάθετος πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῆς τροχιᾶς του.

Ἡ δύναμις αὕτη, μεταβάλλουσα συνεχῶς φοράν, ἐξακολουθῇ νὰ ἐνεργῇ καθέτως πάντοτε πρὸς τὴν ἑκάστοτε τροχιὰν τοῦ κινητοῦ ἐπὶ χρόνον $t = 11$ sec, μετὰ τὸ πέρας τοῦ ὁποίου τὸ κινητὸν συνεχίζει τὴν εὐθύγραμμον κίνησιν.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ νέα διεύθυνσις καὶ φορὰ τοῦ κινητοῦ μετὰ τὴν κατάπαυσιν τῆς δυνάμεως.

Λύσις: Ἔστω AB ἡ ἀρχικὴ διεύθυνσις καὶ φορὰ κινήσεως τοῦ κινητοῦ (ἴδ. σχ. 22). Ὅταν, εἰς τὴν θέσιν B, ἐνεργήσῃ ἐπ' αὐτοῦ ἡ F, τότε ἡ κίνησίς του θὰ γίνῃ κυκλική, καθ' ὅσον ἡ F, ὡς συνεχῶς κάθετος πρὸς τὴν τροχιάν, θὰ προσδώσῃ εἰς τὸ κινητὸν κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν γ τιμῆς

$$\gamma = \frac{v^2}{R}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος R :

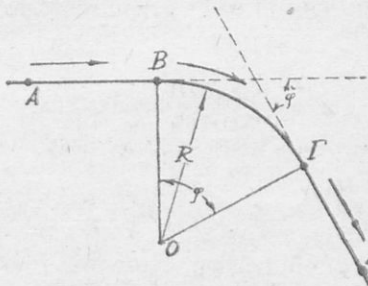
$$R = \frac{v^2}{\gamma}$$

ἤτοι

$$R = \frac{v^2 m}{F} \tag{1}$$

καθ' ὅσον εἶναι $\gamma = F/m$.

Κατὰ τὴν διάρκειαν ὅμως τῆς ἐπιδράσεως τῆς F τὸ κινητὸν



Σχ. 22

θὰ διαγράψῃ τόξον μήκους S, ὅπερ εἰς τὸν χρόνον t θὰ εἶναι:

$$S = vt \tag{2}$$

καθ' ὅσον διατηρεῖται πάντοτε ὡς γραμμικὴ ταχύτης ἡ ἀρχικὴ σταθερὰ v.

Ἀφ' ἑτέρου ὅμως, ὡς ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωστόν, τὸ τόξον S θὰ εἶναι

$$S = \varphi . R \tag{3}$$

ὅπου φ ἡ ἐπίκεντρος (εἰς ἀκτίνια) γωνία.

Ἔχομεν τότε ἐκ τῆς (3) τὴν σχέσιν :

$$\varphi = \frac{S}{R}$$

ἥτις, ὡς ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ R ἐκ τῆς (1) καὶ τοῦ S ἐκ τῆς (2), γίνεται :

$$\varphi = \frac{vt}{\frac{v^2 m}{F}}$$

$$\varphi = \frac{Ft}{mv} \tag{4}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅπου προφανῶς ἡ τιμὴ τῆς φ μᾶς δίδει τὴν διεύθυνσιν τῆς νέας τροχιᾶς ΓΔ ὡς πρὸς τὴς ἀρχικὴν ΑΒ.

Δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῆς (4) εὑρίσκομεν:

$$\varphi = \frac{0{,}628.11}{90.119{,}9} \; \frac{\text{Kg}^{*}.\text{sec}}{\text{gr.cm.sec}^{-1}}$$

$$\varphi = \frac{0{,}628.11.10^{3}.981}{90.119{,}9} \; \frac{\text{dynes.sec}}{\text{gr.cm.sec}^{-1}}$$

$$\varphi = \frac{628.11.981}{90.119{,}9} \; \frac{\text{gr.cm.sec}^{-2}.\text{sec}^{2}}{\text{gr.cm}}$$

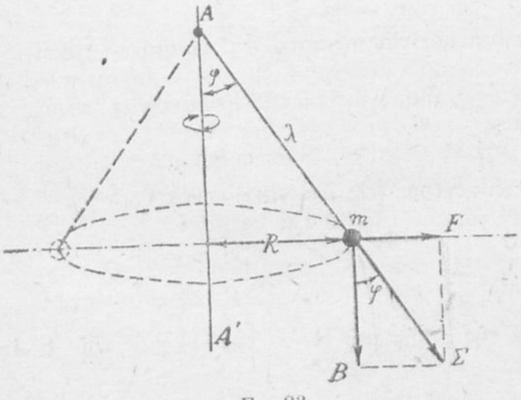
$$\varphi = \frac{628.10791}{10791} \text{ ἀκτίνια}$$

$$\varphi = 628 \text{ ἀκτίνια}$$

$$\boxed{\varphi = 100 \text{ περιστροφαὶ}}$$

ἤτοι τὸ κινητὸν θὰ διαγράψῃ, ἐντὸς τοῦ χρόνου t, 100 φορὰς περιφέρειαν κύκλου καὶ θὰ συνεχίσῃ τὴν κίνησίν του κατὰ τὴν ἀρχικὴν φορὰν καὶ διεύθυνσιν.

112. Σφαιρικὸν σῶμα ἐξαρτᾶται διὰ στερεοῦ ἀβαροῦς νή-



Σχ. 23

ματος μήκους λ = 100 cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α περιστρεφομένου κατακορύφου ἄξονος (ἴδ. σχ. 23).

Ζητεῖται: Ἂν τὸ ὅλον σύστημα περιστρέφεται μὲ σταθε-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρὰν συχνότητα $N = 2\ sec^{-1}$, ποία θὰ εἶναι ἡ μεταξὺ τοῦ ἄξονος καὶ τοῦ νήματος σχηματιζομένη γωνία φ ($g = 987\ cm/sec^2$).

Λύσις: Διὰ νὰ διαγράφῃ ἡ μᾶζα κύκλον σταθερᾶς ἀκτῖνος, πρέπει ἡ συνισταμένη Σ, τοῦ βάρους της (Β) καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεώς της (F), νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διευθύνσεως τοῦ νήματος λ, ὁπότε διὰ τὴν τήρησιν τῆς συνθήκης ταύτης πρέπει νὰ ἰσχύῃ μεταξὺ τῶν Β καὶ F ἡ σχέσις :

$$F = B\varepsilon\varphi\varphi \qquad (1)$$

ὡς ἐκ τοῦ τριγώνου mΒΣ ἐξάγεται.

Ἡ F ὅμως ἀφ᾽ ἑτέρου θὰ εἶναι :

$$F = 4\pi^2 mRN^2 \qquad (2)$$

ὅπου R ἡ κατὰ τὴν περιστροφὴν ἀπόστασις τοῦ m ἀπὸ τοῦ ἄξονος.

Δι᾽ ἐξισώσεως τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει τότε ἡ σχέσις :

$$B\varepsilon\varphi\varphi = 4\pi^2 mRN^2$$

ἥτις, διὰ $B = mg$, γίνεται :

$$mg\varepsilon\varphi\varphi = 4\pi^2 mRN^2$$

καί, ἐπειδὴ εἶναι $R = \lambda\eta\mu\varphi$, τότε :

$$g.\varepsilon\varphi\varphi = 4\pi^2\lambda N^2\eta\mu\varphi$$

ἐξ ἧς :

$$\frac{g.\eta\mu\varphi}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = 4\pi^2\lambda N^2\eta\mu\varphi$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{g}{4\pi^2\lambda N^2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{987}{4.9{,}87.100.2^2}\ \frac{cm.sec^{-2}}{cm.sec^{-2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{987}{987.16}$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{1}{16} = 0{,}0625$$

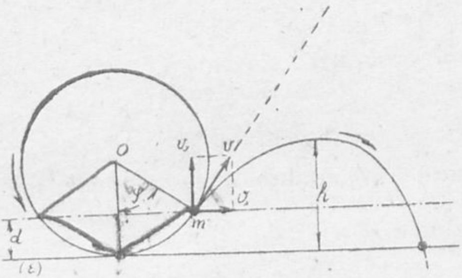
καὶ (ἐκ τῶν πινάκων) :

$$\boxed{\varphi \simeq 86^{o}25'}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

113. Σῶμα βάρους $B = 1,5\ gr^*$ περιστρέφεται, μέσῳ τεταμένου νήματος μήκους $\lambda = 16\ cm$, ἐπὶ τῆς περιφερείας κατακορύφου κύκλου μὲ φυγόκεντρον δύναμιν $F = 12\ gr^*$. Εἴς τινα στιγμήν, ὅταν ἀκριβῶς τὸ νῆμα σχηματίζει γωνίαν $\varphi = 60^0$ μὲ τὴν διερχομένην διὰ τοῦ κέντρου περιστροφῆς κατακόρυφον, τὸ σῶμα ἀφίεται ἐλεύθερον καὶ διαγράφει παραβολικὴν τροχιάν.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον μέγιστον ὕψος h θὰ ἀνέλθῃ, ἀπὸ τοῦ



Σχ. 24

ὁριζοντίου ἐπιπέδου (ε) τοῦ διερχομένου διὰ τῆς κατωτάτης δυνατῆς θέσεως τοῦ σώματος.

Λύσις: Ἐκ τῆς μάζης καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως εὑρίσκομεν τὴν γραμμικὴν ταχύτητα τῆς περιστροφῆς, ἥτις θὰ εἶναι:

$$v = \sqrt{\frac{F.\lambda}{m}}, \qquad (1)$$

αὕτη, κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐκσφενδονήσεως τοῦ σώματος, θὰ σχηματίζῃ μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον γωνίαν φ, θὰ δύναται ὡς ἐκ τούτου νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο συνιστώσας.

Εἰς μίαν κατακόρυφον (v_y), τιμῆς

$$v_y = v\eta\mu\varphi \qquad (2)$$

καὶ μίαν ὁριζόντιον (v_x), τιμῆς

$$v_x = v\sigma\upsilon\nu\varphi$$

Ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν (E_κ), ἣν κέκτηται κατὰ τὴν πρὸς τὰ ἄνω κίνησίν του τὸ σῶμα, ἥτις θὰ εἶναι

$$E_\kappa = \frac{1}{2}\, m v_y^2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι (ἐκ τῆς 2):

$$E_\kappa = \frac{1}{2} m v^2 \eta\mu^2\varphi$$

ἤτοι (ἐκ τῆς 1):

$$E_\kappa = \frac{1}{2} m \left(\sqrt{\frac{F\lambda}{m}}\right)^2 \eta\mu^2\varphi$$

$$E_\kappa = \frac{F\lambda\eta\mu^2\varphi}{2}$$

Ἐκ τῆς κινητικῆς ταύτης ἐνεργείας εὑρίσκομεν τὸ ὕψος (h — d) εἰς ὃ δύναται ν' ἀνυψωθῇ τὸ βάρος Β τοῦ σώματος, ὁπότε θὰ εἶναι

$$E_\kappa = B\,(h - d)$$

ἤτοι

$$\frac{F\lambda\eta\mu^2\varphi}{2} = B\,(h - d)$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν:

$$h = \frac{F\lambda\eta\mu^2\varphi}{2B} + d \qquad (3)$$

ἥτις, διὰ

$$d = \lambda\,(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

γίνεται:

$$h = \frac{F\lambda\eta\mu^2\varphi}{2B} + \lambda\,(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$$

$$h = \frac{12.16.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2.1,5} + 16\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{h = 56 \text{ cm}}$$

114. Σῶμα μάζης m=5 gr περιστρέφεται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος R=981 cm μὲ γωνιώδη ἐπιτάχυνσιν ω'=0,1 sec^{-2}.

Ζητεῖται: Ἂν τὸ σῶμα ἐξεκίνησεν ἐκ τῆς ἠρεμίας, ποία θὰ εἶναι ἡ φυγόκεντρος δύναμίς του (F) μετὰ πάροδον χρόνου t = 6 sec.

Λύσις: Ἐκ τῆς γωνιώδους εὑρίσκομεν τὴν γραμμικὴν ἐπιτάχυνσιν (γ) τοῦ σώματος:

$$\gamma = \omega'.R \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐκ ταύτης τὴν μετὰ χρόνον t γραμμικὴν ταχύτητα (v), ἥτις θὰ εἶναι :

$$v = \gamma t$$

ἤτοι, ἐκ τῆς (1) :

$$v = \omega' R t \qquad (2)$$

Τέλος, ἐκ τῆς γραμμικῆς ταχύτητος καὶ τῶν R καὶ m, τὴν φυγόκεντρον δύναμιν :

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

ἤτοι, ἐκ τῆς (2) :

$$F = mRt^2\omega'^2$$

$$F = 5.981.6^2.0,1^2 \qquad gr.cm.sec^{-2}$$

$$F = \frac{5.981.36.10^{-2}}{981}\ gr^*$$

$$\boxed{F = 1,8\ gr^*}$$

115. Διάφορα αὐτοκίνητα κινοῦνται μὲ γραμμικὴν ταχύτητα v=10 m/sec ἐπὶ ὁριζοντίου δρόμου καὶ εἰς στροφὴν ἀκτῖνος καμπυλότητος R=1000 m.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ κλίσις (φ) τοῦ δρόμου εἰς τὰ σημεῖα καμπῆς, ὥστε ἡ συνισταμένη (Σ) τοῦ βάρους καὶ τῆς φυγοκέντρου δυνάμεως νὰ ἐξακολουθῇ νὰ πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως ἑκάστου ὀχήματος.

Λύσις: Ἔστω F ἡ φυγόκεντρος δύναμις, αὕτη θὰ εἶναι προφανῶς :

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

ὅπου m ἡ ὑποτιθεμένη μᾶζα τοῦ ὀχήματος.

Ἡ μεταξὺ βάρους (B) καὶ F συνισταμένη θὰ εἶναι τότε

$$\Sigma = \sqrt{F^2 + B^2}$$

$$\Sigma = m\sqrt{\frac{g^2R^2 + v^4}{R^2}}$$

Ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὅμως ὀρθογωνίου τριγώνου ΘFΣ (ἴδ. σχ. 25) ἔχομεν

$$\frac{F}{\eta\mu\varphi} = \frac{\Sigma}{\eta\mu 90^0}$$

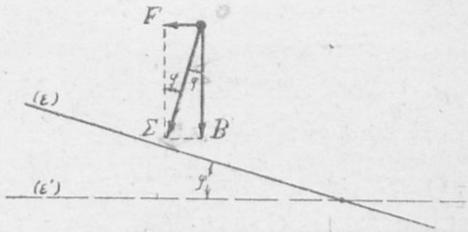
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι : $$\frac{mv^2}{R\eta\mu\varphi} = m\sqrt{\frac{g^2R^2 + v^4}{R^2}}$$

ἐξ οὗ : $$\eta\mu\varphi = \frac{v^2}{\sqrt{g^2R^2 + v^4}}$$

$$\eta\mu\varphi \simeq \frac{100}{9810} \simeq 0,01019$$

$$\boxed{\varphi \simeq 35'}$$



Σχ. 25

116. Μεταλλικὴ στεφάνη τροχοῦ ἔχει μᾶζαν $m = 4$ Kg καὶ διάμετρον $d = 0,80$ m.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας (K) τῆς στεφάνης, ἂν θεωρηθῇ ὅτι ἡ μᾶζα της εὑρίσκεται ὅλη συγκεντρωμένη εἰς τὴν περιφέρειάν της.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$K = \Sigma mr^2$$

ἔχομεν διὰ διάφορα σημεῖα τῆς περιφερείας, διὰ

$$r_1 = r_2 = r_3 ..... = r$$

$$K = m_1r^2 + m_2r^2 + m_3r^2 + ...$$

$$K = r^2(m_1 + m_2 + m_3 + ...)$$

$$K = mr^2, \qquad K = \frac{md^2}{4}$$

ἤτοι : $$K = \frac{4.0,8^2}{4}$$

$$\boxed{K = 0,64 \text{ Kg.m}^2}$$

117. Τροχός, ἀκτῖνος R=1 m, ροπῆς ἀδρανείας K=107,91 Kg.m² δέχεται τὴν ἐπίδρασιν ζεύγους δυνάμεως ἐντάσεως ἑκά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στης F=2,5 Kg*, ἐνεργουσῶν ἐφαπτομενικῶς εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου του.

Ζητεῖται: Πόσος χρόνος (t) χρειάζεται ἵνα ὁ τροχὸς ἀποκτήσει ταχύτητα v=5 m/sec εἰς τὴν περιφέρειάν του, ἀναχωρῶν ἐκ τῆς ἠρεμίας, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ὡς ἄνω ζεύγους.

Λύσις: Ἡ ροπὴ τοῦ ζεύγους τῶν δυνάμεων θὰ εἶναι προφανῶς

$$P = 2FR$$

Ἡ γωνιώδης ἐπιτάχυνσις τῶν τροχῶν, θὰ εἶναι, ἀφ' ἑνός:

$$\omega' = \frac{P}{K}$$

ἤτοι

$$\omega' = \frac{2FR}{K} \qquad (1)$$

ἀφ' ἑτέρου δέ, ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\omega' = \frac{\omega}{t} \qquad (2)$$

ὅπου ω ἡ γωνιώδης ταχύτης εἰς χρόνον t.

Ἀλλ' ἐκ τῆς γνωστῆς σχέσεως γωνιώδους καὶ γραμμικῆς ταχύτητος (v) ἔχομεν:

$$v = \omega R$$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται

$$\omega' = \frac{v}{tR}$$

ἡ δὲ (1) λαμβάνει τότε τὴν μορφήν:

$$\frac{v}{tR} = \frac{2FR}{K}$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τὸν ζητούμενον χρόνον t:

$$t = \frac{vK}{2FR^2}$$

$$t = \frac{5.107{,}91}{2.2{,}5.1^2}\ \frac{m.Kg}{sec.Kg^*}$$

$$t = \frac{5.107{,}91.10^2}{2.2{,}5.981}\ \frac{cm\,.\,gr}{sec\,.\,dynes}$$

$$t = \frac{10791}{981}\ sec$$

$$\boxed{t = 11\ sec}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

118. Βαρὺς τροχὸς περιστρέφεται μὲ σταθερὰν γωνιώδη ταχύτητα $\omega_0 = 49{,}05 \ sec^{-1}$, ὅτε ἐπ᾿ αὐτοῦ ἐνεργεῖ ροπὴ δυνάμεων τιμῆς $P = 16{,}3 \ Kg^*m$, φορᾶς ἀντιθέτου πρὸς τὴν τῆς περιστροφῆς.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας (K) τοῦ τροχοῦ, δεδομένου ὅτι οὗτος ἠρεμεῖ μετὰ χρόνον $t = 5$ sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς πρώτης ἐπιδράσεως τῶν δυνάμεων.

Λύσις: Ἔστω ω′ ἡ γωνιώδης ἐπιβράδυνσις τοῦ τροχοῦ, αὕτη ἀφ᾿ ἑνὸς θὰ εἶναι:

$$\omega' = \frac{P}{K} \qquad (1)$$

θὰ συνδέεται, ἀφ᾿ ἑτέρου, μὲ τὴν ἀρχικὴν γωνιώδη ταχύτητα (ω_0) καὶ τὴν τελικὴν (ω) διὰ τοῦ τύπου

$$\boxed{\omega = \omega_0 - \omega' t}$$

ἐξ οὗ προκύπτει (δι᾿ $\omega = 0$):

$$\omega' = \frac{\omega_0}{t} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν τότε:

$$\frac{P}{K} = \frac{\omega_0}{t}$$

καὶ

$$K = \frac{Pt}{\omega_0}$$

$$K = \frac{16{,}3.5}{49{,}05} \ \frac{Kg^*.m.sec}{sec^{-1}}$$

$$K = \frac{16{,}3.5.981}{49{,}05.10^2} \ Kg.m^2$$

$$\boxed{K = 16{,}3 \ Kg.m^2}$$

119. Στερεὸν σῶμα περιστρέφεται ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος $R = 117$ cm μὲ γραμμικὴν ἐπιτάχυνσιν $\gamma = 13 \ cm/sec^2$.

Ζητεῖται: Πότε ἡ κεντρομόλος δύναμίς του θὰ γίνῃ ἴση μὲ τὴν δύναμιν (F) τὴν προσδίδουσαν εἰς τὸ σῶμα τὴν γραμμικὴν ἐπιτάχυνσιν γ, ἂν τοῦτο ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας.

Λύσις: Ἡ προσδίδουσα τὴν γ δύναμις εἶναι:

$$F = m\gamma \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅπου m ἡ μᾶζα τοῦ βαρέος σώματος, ἡ δὲ φυγόκεντρος:

$$F' = \frac{mv^2}{R} \qquad (2)$$

ὅπου $v = \gamma t$
ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$F' = \frac{m(\gamma t)^2}{R} \qquad (3)$$

Τότε, διὰ νὰ ἰσχύσῃ ἡ ζητουμένη σχέσις:

$$F = F'$$

ἔχομεν, ἐκ τῶν (1) καὶ (3):

$$m\gamma = \frac{m\gamma^2 t^2}{R}$$

καί:

$$t = \sqrt{\frac{R}{\gamma}}$$

ἤτοι

$$t = \sqrt{\frac{117}{13}}\sqrt{\frac{cm}{cm.sec^{-2}}}$$

$$\boxed{t = 3\ sec}$$

120. Ἐπὶ σώματος ἀναχωροῦντος ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ περιστρεφομένου ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος R=121 cm, ἐνεργεῖ συνεχῶς δύναμις F=0,3 Kg* ἧς ἡ διεύθυνσις σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν, μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, $\varphi = 30^0$.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ μᾶζα τοῦ περιστρεφομένου σώματος εἶναι m=1090 gr, πόση θὰ εἶναι ἡ κεντρομόλος δύναμις (F') καὶ πόση ἡ γραμμικὴ ταχύτης (v) τοῦ σώματος μετὰ χρόνον t=11 sec ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως.

Λύσις: Ἡ σταθερὰ δύναμις F ἀναλύεται εἰς δύο ἄλλας δυνάμεις καθέτως μεταξύ των, ὧν ἡ ἐπιτρόχιος F_ε εἶναι:

$$F_\varepsilon = F\eta\mu\varphi$$

καὶ προσδίδει εἰς τὸ σῶμα ἐπιτρόχιον ἐπιτάχυνσιν:

$$\gamma = \frac{F\eta\mu\varphi}{m}$$

ἤτοι μετὰ χρόνον t, ταχύτητα:

$$v = \gamma t$$

$$v = \frac{Ft\eta\mu\varphi}{m} \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὑπὸ τὴν ταχύτητα ταύτην ἡ φυγόκεντρος δύναμις θὰ εἶναι τότε

$$F' = \frac{mv^2}{R}$$

$$F' = \frac{m.F^2t^2\eta\mu^2\varphi}{m^2R}$$

$$F' = \frac{F^2t^2\eta\mu^2\varphi}{mR} \qquad (2)$$

Ὁπότε, ἐκ τῆς (1) ἔχομεν

$$v = \frac{0,3.11.0,5}{1090}\,\frac{Kg^*.sec}{gr}$$

$$v = \frac{0,3.11.0,5.981.10^3}{1090}\,\frac{dynes.sec}{gr}$$

$$\boxed{v = 14,85 \text{ m/sec}}$$

ἐκ δὲ τῆς (2):

$$F' = \frac{0,3^2.11^2.0,5^2}{1090.121}\,\frac{Kg^{*2}.sec^2.}{gr.cm}$$

$$F' = \frac{0,3^2.11^2.0,5^2}{1090.121}\,\frac{Kg^*.Kg^*.sec^2}{gr.cm}$$

$$F' = \frac{0,3^2.11^2.0,5^2.10^3.981}{1090.121}\,Kg^*.\,\frac{gr.cm}{sec^2}\,\frac{sec^2}{gr.cm}$$

$$\boxed{F' = 20,25 \text{ Kg}^*}$$

121. Μοχλὸς Α′ εἴδους δέχεται εἰς τὰ ἄκρα του δυνάμεις βάρους $F_1 = 3,2$ Kg* καὶ $F_2 = 2$ Kg*, ἔχει δὲ ὑπομόχλιον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν $l_1 = 26$ cm ἀπὸ τῆς F_1.

Ζητεῖται: Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ μοχλοῦ, ὥστε οὗτος νὰ ἰσορροπεῖ ἐπὶ τοῦ ὑπομοχλίου.

Λύσις: Διὰ νὰ πληροῦται ἡ συνθήκη ἰσορροπίας πρέπει αἱ ῥοπαὶ τῶν F_1 καὶ F_2 ὡς πρὸς τὸ ὑπομόχλιον νὰ εἶναι ἴσαι καὶ ἀντίθετοι, ὁπότε, θεωρουμένης l_2 τῆς ἀποστάσεως τῆς F_2 ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου, ἔχομεν:

$$F_1l_1 = F_2l_2$$

$$l_2 = \frac{F_1l_1}{F_2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ἧς εὑρίσκεται τὸ ὅλον μῆκος τοῦ μοχλοῦ l :

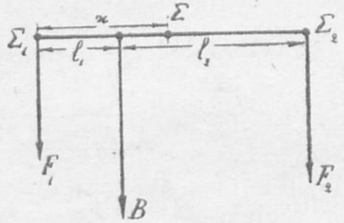
$$l = l_1 + l_2$$

$$l = l_1 + \frac{F_1 l_1}{F_2}$$

$$\boxed{l = 67{,}6 \text{ cm}}$$

122. Ράβδου μὴ ἐλαστικῆς μήκους l=12 m τὸ βάρος εἶναι B=10 Kg καὶ ἔχει σημεῖον ἐφαρμογῆς εἰς σημεῖόν τι εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν $l_1 = 2$ m ἀπὸ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Σ_1 (ἴδ. σχ. 26) εἰς ὃ ἐνεργεῖ βάρος F_1=5 Kg*.

Ζητεῖται: Ἂν εἰς τὸ ἕτερον ἄκρον τῆς ράβδου (Σ_2) ἐνεργῇ



Σχ. 26

δύναμις F_2=4 Kg*, εἰς ποῖον σημεῖον (Σ) πρέπει νὰ στηριχθῇ αὕτη ὥστε νὰ ἰσορροπῇ.

Λύσις: Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἡ ράβδος πρέπει τὸ ἄθροισμα τῶν ροπῶν τῶν B, F_1 καὶ F_2 ὡς πρὸς Σ νὰ εἶναι μηδέν :

$$P_{F_1} + P_{F_2} + P_B = 0$$

ὁπότε, ἔστω x ἡ ἀπόστασις τοῦ Σ ἀπὸ τοῦ Σ_1, προκύπτει :

$$P_{F_1} = - F_1 x$$

$$P_{F_2} = F_2 (l - x)$$

$$P_B = B (l_1 - x)$$

ἐξ οὗ $$F_1 x + F_2 (l - x) + B (l_1 - x) = 0$$

καὶ $$x = \frac{B l_1 + F_2 l}{F_1 + F_2 + B}$$

$$x = \frac{10.2 + 4.12}{19} \; \frac{\text{Kg*.m}}{\text{Kg*}}$$

$$\boxed{x = 3{,}579 \text{ m}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

123. Τεσσάρων παραλλήλων δυνάμεων, ὧν τὰ σημεῖα ἐφαρμογῆς (Α, Β, Γ, Δ) κεῖνται ἐπ' εὐθείας, αἱ ἐντάσεις ἔχουν τὰς κάτωθι σχέσεις:

$$F_A = -F_B$$

$$F_\Gamma = -F_\Delta$$

εἶναι δὲ προσέτι

$$F_A(AB) = F_\Gamma(\Gamma\Delta) \qquad (1)$$

Ζητεῖται: Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τέσσαρες δυνάμεις ἰσορροποῦν.

Λύσις: Ἡ μεταξὺ F_A καὶ F_B ροπὴ ζεύγους ὡς πρὸς οἱοδήποτε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου θὰ εἶναι:

$$P_1 = F_A(AB)$$

ἡ μεταξὺ F_Γ καὶ F_Δ, ἀντιστοίχως:

$$P_2 = -F_\Gamma(\Gamma\Delta)$$

καθ' ὅσον τὰ δύο ζεύγη παρουσιάζουν ἀντίθετον φορὰν περιστροφῆς.

Θὰ εἶναι τότε ἡ συνολικὴ ροπὴ

$$P = P_1 + P_2$$

$$P = F_A(AB) - F_\Gamma(\Gamma\Delta)$$

καὶ ἐπειδή, ὡς ἐκ τῆς (1) εἶναι $F_A(AB) = F_\Gamma(\Gamma\Delta)$:

$$P = F_A(AB) - F_A(AB)$$

$$\boxed{P \equiv 0}$$

124. Κυλινδρικὸς κοχλίας ἔχει βῆμα h=0,628 cm, περιστρέφεται δὲ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν ζεύγους ροπῆς P=0,3 Kg*m.

Ζητεῖται: Ποίαν ἀντίστασιν (F) δύναται νὰ ὑπερνικήσῃ κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεώς του.

Λύσις: Τὸ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ ζεύγους παραγόμενον κατὰ μίαν περιστροφὴν ἔργον (W) εἶναι:

$$W = 2\pi P$$

ἴσον ἀφ' ἑτέρου μὲ τὸ ἔργον τῆς μετατοπίσεως τῆς ἀντιστάσεως κατὰ ἓν βῆμα:

$$W = Fh$$

ἐξ ὧν ἔχομεν:

$$2\pi P = Fh$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ
$$F = \frac{2\pi P}{h}$$

$$F = \frac{6{,}28.0{,}3}{0{,}628}\ \frac{Kg^{*}m}{cm}$$

$$F = \frac{6{,}28.0{,}3.10^{2}}{0{,}628}\ \frac{Kg^{*}.cm}{cm}$$

$$\boxed{F = 300\ Kg^{*}}$$

125. Κατὰ τὴν περιστροφὴν κοχλίου καταναλίσκεται ἔργον $W = 0{,}32\ Kg^{*}m$ διὰ τέσσαρας περιστροφάς του, ὁπότε ὁ κοχλίας εἰσέρχεται ἐντὸς ὑλικοῦ κατὰ διάστημα $S = 0{,}16$ cm.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βῆμα καὶ ποία ἡ ἀντίστασις τοῦ ὑλικοῦ.

Λύσις: Ἡ εἰς μίαν περιστροφὴν μετατόπισις τοῦ κοχλίου, ἴση μὲ τὸ βῆμά του h, θὰ εἶναι:

$$h = \frac{S}{4} \tag{1}$$

ὁπότε ἡ ἐμφανιζομένη ἀντίστασις (F) θὰ εἶναι:

$$F = \frac{W}{h}, \quad F = \frac{4W}{S} \tag{2}$$

ὁπότε, ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$h = \frac{0{,}16}{4}\ cm \qquad \boxed{h = 0{,}04\ cm}$$

ἐκ δὲ τῆς (2):

$$F = \frac{4.0{,}32}{0{,}16}\ \frac{Kg^{*}.m}{cm}$$

$$F = \frac{4.0{,}32.10^{2}}{0{,}16}\ \frac{Kg^{*}.cm}{cm}$$

$$\boxed{F = 800\ Kg^{*}}$$

126. Ἐπὶ τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς πρισματικοῦ σφηνὸς ἐφαρμόζεται δύναμις $F = 2\ Kg^{*}$, ὁπότε ἡ ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας ὑπερνικωμένη ἀντίστασις εἶναι $F' = 2{,}6\ Kg^{*}$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ γωνία ἀνοίγματος φ τοῦ σφηνός.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ σφηνός:

$$F' = \frac{F}{2\eta\mu\frac{\varphi}{2}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὑρίσκομεν :

$$\eta\mu\ \frac{\varphi}{2} = \frac{F}{2F'}$$

$$\eta\mu\ \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2,6}\ ,\quad \eta\mu\ \frac{\varphi}{2} = 0,38462$$

$$\frac{\varphi}{2} \simeq 22^{o}38'$$

$$\boxed{\varphi \simeq 11^{o}19'}$$

127. Ζυγοῦ εὐπαθείας ἑκάστη φάλαξ ἔχει μῆκος $\lambda=80$ cm. Κατὰ τὴν προσθήκην μικροῦ βάρους $\beta=3$ gr* ὁ ζυγὸς ἀποκλίνει κατὰ γωνίαν $\varphi=45^{o}$ εἰς νέαν θέσιν ὅπου ἰσορροπῇ.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν κάτωθι τοῦ ὑπομοχλίου (h) εὑρίσκεται τὸ κέντρον βάρους τοῦ ζυγοῦ ἂν ἡ συνολικὴ μᾶζα τῶν κινητῶν τμημάτων του εἶναι $M=240$ gr.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ καθορίζοντος τὴν εὐπάθειαν τοῦ ζυγοῦ :

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\beta\lambda}{Bh}$$

(ὅπου B τὸ βάρος τοῦ ζυγοῦ) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν h :

$$h = \frac{\beta\lambda}{B\varepsilon\varphi\varphi}$$

ἥτις, διὰ $\varepsilon\varphi\varphi=1$, εἶναι :

$$h = \frac{3.80}{240}\ \frac{gr^{*}.cm}{gr^{*}}$$

$$\boxed{h = 1\ cm}$$

128. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον τῆς μιᾶς φάλαγγος ζυγοῦ ἐν ἰσορροπίᾳ προστίθεται μικρὸν βάρος $\beta=6$ gr*. Τὸ μῆκος ἑκάστης φάλαγγος εἶναι $\lambda=25$ cm, τὸ βάρος τῶν κινητῶν τμημάτων $B=40$ gr*, τὸ δὲ σημεῖον ἐφαρμογῆς τούτου εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $h=\sqrt{2}$ cm κάτωθι τοῦ ὑπομοχλίου.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ροπὴ (P) ὑπὸ τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται ὁ ζυγὸς ὅταν σχηματίζει γωνίαν κλίσεως $\varphi=45^{o}$ ὡς καὶ ποία, κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν, ἡ γωνιώδης ἐπιτάχυνσις τοῦ ὅλου συστήματος (ω') δεδομένου ὅτι ὁ ζυγὸς παρουσιάζει ροπὴν ἀδρανείας $K=1962$ gr.cm².

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Αἱ κατὰ τὴν γωνίαν φ ῥοπαὶ τῶν β καὶ Β ὡς πρὸς τὸ ὑπομόχλιον θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$P_{\beta} = \beta . \lambda \sigma \upsilon \nu \varphi$$
$$P_{B} = - B . h \eta \mu \varphi$$

ἡ συνολικὴ δὲ ῥοπὴ θὰ εἶναι τότε:

$$P = \beta \lambda \sigma \upsilon \nu \varphi - B h \eta \mu \varphi$$

$$P = \frac{6.25\sqrt{2}}{2} - 40\sqrt{2} . \sqrt{2} \quad gr^{*}.cm$$

$$P = 3.25\sqrt{2} - 80 \quad gr^{*}.cm$$

$$\boxed{P = 26{,}06 \ gr^{*}.cm}$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς γωνιώδους ἐπιταχύνσεως χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον τῆς δυναμικῆς:

$$\frac{P}{K} = \omega'$$

ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$\omega' = \frac{26{,}06}{1962} \frac{gr^{*}.cm}{gr.cm^{2}}$$

$$\omega' = \frac{26{,}06.981}{1962} \frac{(gr.cm.sec^{-2})cm}{gr.cm^{2}}$$

$$\boxed{\omega' = 13{,}03 \ sec^{-2}}$$

129. Μαθηματικὸν ἐκκρεμὲς κινεῖται ἐντὸς πεδίου βαρύτητος $g = 980 \ cm.sec^{-2}$.

Ζητεῖται: Ποίαν γραμμικὴν ἐπιτάχυνσιν θὰ παρουσιάζῃ ὅταν σχηματίζει γωνίαν $\varphi = 30^{0}$ μὲ τὴν κατακόρυφον θέσιν ἰσορροπίας.

Λύσις: Ἔστω Β καὶ m τὸ βάρος καὶ ἡ μᾶζα τοῦ ὑλικοῦ ἄκρου τοῦ ἐκκρεμοῦς. Εἰς τὴν ὑπὸ γωνίαν φ θέσιν ἡ προσδίδουσα τὴν κίνησιν δύναμις θὰ εἶναι ἡ F_1, κάθετος πρὸς τὴν ἀκτῖνα περιστροφῆς (ἴδ. σχ. 27), τιμῆς:

$$F_1 = B \eta \mu \varphi$$

Ἡ δύναμις αὕτη προσδίδει εἰς τὴν κινουμένην μᾶζαν ἐπιτάχυνσιν $\gamma = \frac{F_1}{m}$, ἤτοι:

$$\gamma = \frac{B \eta \mu \varphi}{m}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί, ἐφ' ὅσον $g = B/m$, τελικῶς:

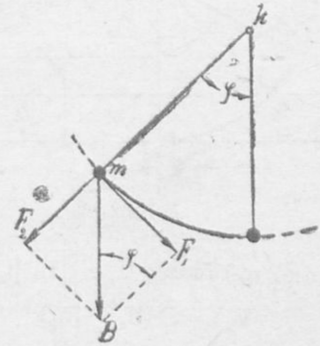
$$\gamma = g \cdot \eta\mu\varphi$$

$$\gamma = 980 \cdot 0{,}5 \text{ cm sec}^{-2}$$

$$\boxed{\gamma = 490 \text{ cm/sec}^2}$$

130. Εἰς τὴν αὐτὴν ὡς ἄνω ἄσκησιν (129) ἡ γωνία εἶναι $\varphi = 60^0$, ἡ δὲ μᾶζα τοῦ ἐκκρεμοῦς $m = 2{,}6$ gr.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ τάσις τοῦ νήματος (F_2) τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ ποία ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσίς του.



Σχ. 27

Λύσις: Ἐκ τῆς ἀναλύσεως τοῦ βάρους B ἔχομεν:

$$F_2 = B \text{ συνφ}$$

ὅπου B τὸ βάρος τῆς μάζης m.

Ἤτοι: $$F_2 = 2{,}6 \cdot 0{,}5 \text{ gr}^*$$

$$\boxed{F_2 = 1{,}3 \text{ gr}^*}$$

Διὰ δὲ τὴν κεντρομόλον ἐπιτάχυνσιν (γ_κ) ἔχομεν

$$\gamma_\kappa = \frac{F_2}{m}, \quad \gamma_\kappa = \frac{B \text{ συνφ}}{m}$$

$$\gamma_\kappa = g \text{ συνφ}$$

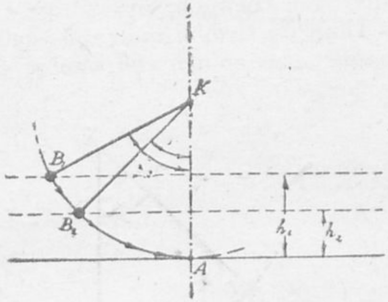
$$\boxed{\gamma_\kappa = 490 \text{ cm/sec}^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

131. Τὸ βαρὺ ἄκρον μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς ἀφίεται ἐλεύθερον ἔκ τινος ὕψους $h_1 = 7{,}6$ cm ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου (ε) τῆς κατωτάτης δυνατῆς θέσεώς του (ἴδ. σχ. 28).

Ζητεῖται: Ποίαν γραμμικὴν ταχύτητα v θὰ παρουσιάζῃ τὸ βάρος τοῦτο ὅταν φθάσῃ εἰς ὕψος $h_2 = 3{,}1$ cm ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ε.

Λύσις: Ἔστω Β τὸ βάρος τοῦ ἄκρου τοῦ ἐκκρεμοῦς. Τοῦτο



Σχ. 28

κατὰ τὴν πτῶσιν ἀπὸ τοῦ ὕψους h_1 εἰς τὸ h_2 θὰ παράγῃ ἔργον:

$$W = B(h_1 - h_2) \tag{1}$$

ὅπερ θὰ ἰσοῦται μὲ τὴν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ κινουμένου σώματος, οὗτινος ἔστω m ἡ μᾶζα:

$$W = \frac{1}{2} mv^2 \tag{2}$$

ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{1}{2} mv^2 = B(h_1 - h_2)$$

$$\frac{v^2}{2} = g(h_1 - h_2)$$

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$v = \sqrt{2.981(7{,}6 - 3{,}1)} \text{ cm/sec}$$

$$v = \sqrt{2.981.4{,}5} \text{ cm/sec}$$

$$\boxed{v \simeq 94 \text{ cm/sec}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

132. Ἐκκρεμὲς ἀφίεται ἔκ τινος θέσεως, ὕψους $h_1=4,951$ cm (ἴδ. σχ. 28 προηγ. ἀσκ.), ὠθούμενον μὲ ἀρχικὴν γραμμικὴν ταχύτητα $v_0 = 9,8$ cm/sec.

Ζητεῖται: Μετὰ τὴν διέλευσιν διὰ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας, μέχρι ποίου ὕψους (h_2) θὰ φθάσῃ ($g=980$ cm.sec^{-2}).

Λύσις: Ἡ ἕνεκα τῆς ἀρχικῆς ταχύτητος ἐνέργεια τοῦ ἐκκρεμοῦς, μάζης ἔστω, m, εἶναι:

$$W_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

ἡ ἕνεκα τῆς πτώσεως h τοῦ βάρους ἀντιστοίχως:

$$W_1 = B \cdot h_1 = m g h_1.$$

Ὡς ἐκ τούτου ἡ συνολικὴ ἐνέργεια ἣν θὰ κέκτηται τὸ σύστημα εἰς τὴν κατωτάτην δυνατὴν θέσιν του θὰ εἶναι:

$$W = W_0 + W_1$$

$$W = \frac{1}{2} m v_0^2 + m g h_1$$

$$W = m\left(\frac{v_0^2}{2} + g h_1\right) \qquad (1)$$

Ὑπὸ τὴν ἐνέργειαν ταύτην τὸ βάρος Β θὰ ἀνυψωθῇ εἰς τὸ μέγιστον ὕψος h_2 συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν

$$W = B h_2$$

$$W = m g h_2$$

ἥτις, ὡς ἐκ τῆς (1), γίνεται:

$$m g h_2 = m\left(\frac{v_0^2}{2} + g h_1\right)$$

$$g h_2 = \frac{v_0^2}{2} + g h_1$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν:

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2g} + h_1$$

$$h_2 = \frac{9,8^2}{2.980} + 4,951 \text{ cm}$$

$$h_2 = 0,049 + 4,951 \text{ cm}$$

$$\boxed{h_2 = 5 \text{ cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

133. Ἐκκρεμὲς περιόδου Τ, ὑπακοῦον εἰς τοὺς νόμους τοῦ μαθηματικοῦ, ἀφίεται ἐλεύθερον ἀπὸ μιᾶς θέσεως σχηματιζούσης γωνίαν φ μὲ τὴν κατακόρυφον.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ κατωτάτου ἄκρου τοῦ ἐκκρεμοῦς ὅταν τοῦτο διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου.

Λύσις: Τὸ κατώτατον ἄκρον τοῦ ἐκκρεμοῦς, κατὰ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς τὴν γωνίαν φ θέσιν, ἀπέχει τοῦ κατωτέρου ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἀπόστασιν h, ἥτις εἶναι:

$$h = \lambda(1 - \text{συνφ})$$

ὅπου λ τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι ἡ εἰς τὴν κατακόρυφον θέσιν ἐνέργειά του εἶναι:

$$W = Bh$$

$$W = B\lambda(1 - \text{συνφ})$$

ὅπου Β τὸ βάρος του, ἤτοι:

$$W = mg\lambda(1 - \text{συνφ}) \qquad (1)$$

Ἡ ἐνέργεια αὕτη, ὡς κινητική, θὰ εἶναι ἀφ' ἑτέρου:

$$W = \frac{mv^2}{2} \qquad (2)$$

ὅπου v ἡ ζητουμένη ταχύτης, ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$mg\lambda(1 - \text{συνφ}) = \frac{mv^2}{2}$$

ἐξ οὗ:

$$v^2 = 2g\lambda(1 - \text{συνφ}) \qquad (3)$$

Τὸ μῆκος ὅμως λ, ἐκ τοῦ τύπου:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

εἶναι:

$$\lambda = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

ὡς ἐκ τούτου ἡ (3) γίνεται:

$$v^2 = \frac{g^2T^2}{2\pi^2}(1 - \text{συνφ})$$

καὶ τελικῶς $\boxed{v = \frac{gT}{\pi}\sqrt{\frac{1 - \text{συνφ}}{2}}}$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

134. Εἰς τὸ ἐκκρεμὲς τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως δίδεται ἡ γωνία $\varphi = 60^\circ$, ὁπότε ἡ ταχύτης v ἔχει ἀριθμητικὴν τιμήν, εἰς μονάδας CGS, ἴσην μὲ τὸ g ἐκπεφρασμένον εἰς τὰς αὐτὰς μονάδας (CGS).

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ περίοδος καὶ ποῖον τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$v = \frac{gT}{\pi}\sqrt{\frac{1-\text{συν}\varphi}{2}}$$

ἔχομεν (διὰ $v = g$):

$$1 = \frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{1-0{,}5}{2}}$$

$$T = 4\pi$$

$$\boxed{T = 12{,}56 \text{ sec}}$$

ὁπότε διὰ τὸ μῆκος λ, ἐκ τοῦ τύπου

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

λαμβάνομεν:

$$\lambda = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

$$\lambda = \frac{g \cdot 16\pi^2}{4\pi^2}$$

$$\lambda = 4g$$

$$\boxed{\lambda = 39{,}24 \text{ m}}$$

135. Μαθηματικὸν ἐκκρεμές, ἀποτελούμενον ἐκ μικρᾶς μάζης m συνδεδεμένης διὰ νήματος μήκους $\lambda = 60$ cm, ἀφίεται ἀπό τινος θέσεως σχηματιζούσης γωνίαν $\varphi = 60^\circ$ μὲ τὴν κατακόρυφον (ἴδ. σχ. 29) νὰ κινηθῇ ἐλευθέρως ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος. Μόλις ἡ μᾶζα φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν τῆς κατακορύφου (Α) κόπτεται τὸ νῆμα, ὁπότε ἡ m συνεχίζει τὴν κίνησίν της ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου (E) ἐφαπτομένου τῆς κατωτάτης θέσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον μῆκος (S) θὰ φθάσῃ ἡ μικρὰ μᾶζα, ἂν ὁ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου συντελεστὴς τριβῆς εἶναι $\eta = 0{,}3$.

Λύσις: Τὸ ἀρχικὸν ὕψος h τῆς μάζης ἀπὸ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον εἶναι προφανῶς:

$$h = \lambda\,(1 - \text{συν}\varphi) \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε ἡ εἰς τὴν θέσιν ταύτην ἐνέργειά του θὰ εἶναι

$$E = Bh$$

$$E = B\lambda\,(1 - \text{συνφ}) \qquad (2)$$

ἂν B εἶναι τὸ βάρος τῆς μάζης m.

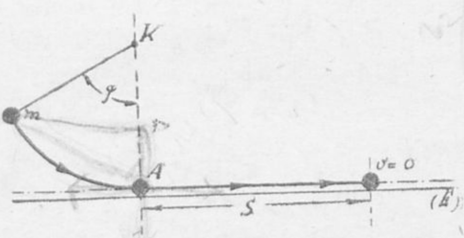
Ἡ ἐνέργεια ὅμως αὕτη, ὡς κινητικὴ (εἰς τὸ A), θὰ εἶναι ἀφ' ἑτέρου:

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 \qquad (3)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (2) καὶ (3), ἔχομεν τὰς σχέσεις:

$$B\lambda\,(1 - \text{συνφ}) = \frac{mv^2}{2}$$

$$mg\lambda\,(1 - \text{συνφ}) = \frac{mv^2}{2}$$



Σχ. 29

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὴν ταχύτητα v, ἥτις θὰ εἶναι ἀρχικὴ διὰ τὴν ἐπὶ τοῦ (*E*) ἐπιβραδυνομένην κίνησιν:

$$v = \sqrt{2g\lambda\,(1 - \text{συνφ})}$$

Ἔχομεν τότε, συμφώνως πρὸς τοὺς κανόνας τῆς ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένης κινήσεως, τὸν τύπον:

$$S = vt - \frac{1}{2}\,\gamma t^2 \qquad (4)$$

ὅπου:

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

ἤτοι (ἐπειδὴ $F = B\eta$):

$$\gamma = \frac{B\eta}{m}, \quad \gamma = g\eta \qquad (5)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ὅπου ὁ χρόνος t, ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν ἠρεμίαν, θὰ εἶναι:

$$t = \frac{v}{\gamma}, \qquad t = \frac{\sqrt{2g\lambda(1 - \text{συν}\varphi)}}{g\eta} \tag{6}$$

ὁπότε ὁ (4), ἐκ τῶν τιμῶν τῶν (5) καὶ (6) γίνεται:

$$S = \frac{\lambda(1 - \text{συν}\varphi)}{\eta} \tag{7}$$

ἤτοι:

$$S = \frac{60(1 - 0,5)}{0,3}\ \text{cm}$$

$$\boxed{S = 100\ \text{cm}}$$

136. Εἰς τὴν αὐτὴν ὡς ἄνω ἄσκησιν δίδεται τὸ αὐτὸ μῆκος λ καὶ ὁ αὐτὸς συντελεστὴς τριβῆς η.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία φ ὥστε τὸ διάστημα S νὰ εἶναι μέγιστον καὶ πόσον θὰ εἶναι τότε τοῦτο.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου (7) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως:

$$S = \frac{\lambda(1 - \text{συν}\varphi)}{\eta}$$

παρατηροῦμεν ὅτι, ὑπὸ σταθερὰ λ καὶ η τὸ S γίνεται μέγιστον ὅταν

$$\text{συν}\varphi = 0$$

$$\varphi = 90^\circ$$

ὁπότε ὁ ὅρος (1 — συνφ), μικρότερος τῆς μονάδος διὰ κάθε ἄλλην γωνίαν, γίνεται ἴσος μὲ τὴν μονάδα διὰ γωνίαν $\varphi = 90^\circ$.

Τότε θὰ εἶναι προφανῶς:

$$S = \frac{\lambda}{\eta}, \qquad S = \frac{60}{0,3}\ \text{cm}$$

ἤτοι:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi &= \frac{\pi}{2} \\ S &= 200\ \text{cm} \end{aligned}}$$

137. Ἐκκρεμές, ἔχον μῆκος $\lambda = 2$ m ἀφίεται ἐλεύθερον ἀπό τινος θέσεως σχηματιζούσης γωνίαν $\varphi = 45^\circ$. Ἐπὶ τῆς κατακορύφου τῆς θέσεως ἰσορροπίας καὶ εἰς ἀπόστασιν h ἀπὸ τῆς κατωτάτης θέσεως τοῦ ἐκκρεμοῦς τίθεται ἄξων (Α) κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως (ἴδ. σχ. 30).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις h ὥστε τὸ ἐκκρεμές, ὑπὸ τὸ νέον μῆκός του νὰ διαγράψῃ ἡμίσειαν περιστροφὴν καὶ νὰ πέσῃ ἐν συνεχείᾳ κατακορύφως.

Λύσις: Τὸ ἀρχικὸν ὕψος d, συναρτήσει τῆς γωνίας φ καὶ τοῦ μήκους λ, εἶναι:

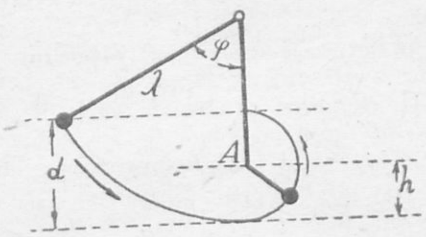
$$d = \lambda(1 - \text{συν}\varphi)$$

ὡς ἐκ τούτου ἡ εἰς τὴν κατωτάτην θέσιν ἐνέργειά του θὰ εἶναι:

$$W = B\lambda(1 - \text{συν}\varphi)$$

ὅπου B τὸ βάρος του.

Ἵνα ἐν συνεχείᾳ τὸ ἐκκρεμὲς διαγράψῃ, ὑπὸ τὸ νέον μῆκος



Σχ. 30

του, ἡμίσειαν μόνον περιστροφὴν πρέπει τὸ βάρος του B ν' ἀνυψωθῇ εἰς ὕψος

$$h' = 2h$$

καταναλίσκον ἐνέργειαν

$$W' = B \cdot 2h$$

ἴσην ἀκριβῶς μὲ τὴν W, ἐξ οὗ:

$$B\lambda(1 - \text{συν}\varphi) = B \cdot 2h$$

καὶ

$$h = \frac{\lambda(1 - \text{συν}\varphi)}{2}$$

$$h = \frac{2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}\ \text{m}$$

$$h \simeq 0{,}293\ \text{m}$$

$$\boxed{h \simeq 29{,}3\ \text{cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

138. Φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς βάρους $B = 50\ gr^*$ τὸ σημεῖον ἐξαρτήσεως ἀπέχει τοῦ κέντρου βάρους του κατὰ ἀπόστασιν $\lambda = 24$ cm. Τιθέμενον εἰς αἰώρησιν μικροῦ πλάτους παρουσιάζει περίοδον $T = 3{,}14$ sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας του.

Λύσις: Ἔστω Κ ἡ ροπὴ ἀδρανείας τοῦ ἐκκρεμοῦς. Αὕτη θὰ συνδέεται μὲ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ φυσικοῦ ἐκκρεμοῦς:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{mg\lambda}}$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν

$$K = \frac{mg\lambda T^2}{4\pi^2} \qquad (1)$$

καί, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν m, T κλπ. εἰς μονάδας CGS:

$$K = \frac{50.981.24.3{,}14^2}{4.3{,}14^2}\ gr\,.\,cmsec^{-2}.\,cm\,.\,sec^2$$

$$\boxed{K = 294300\ gr\,.\,cm^2}$$

139. Φυσικὸν ἐκκρεμές, περιόδου $T = 2$ sec, ἀπομακρύνεται ἐκ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας του κατὰ γωνίαν $\varphi = 30^0$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ εἰς τὴν θέσιν του ταύτην γωνιώδης ἐπιτάχυνσίς του (ω′).

Λύσις: Πρὸς εὕρεσιν τῆς ω′ λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$\frac{P}{K} = \omega' \qquad (1)$$

ὅπου Κ ἡ ροπὴ ἀδρανείας καὶ Ρ ἡ ροπὴ τῆς κινούσης δυνάμεως ὡς πρὸς τὸ σημεῖον αἰωρήσεως.

Ἡ Κ εἶναι (ὡς ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς ἀσκ. 138):

$$K = \frac{mg\lambda T^2}{4\pi^2} \qquad (2)$$

ἡ δὲ Ρ (ροπὴ τῆς ἐπιτροχίου συνιστώσης τοῦ βάρους Β):

$$P = \lambda B \eta\mu\varphi \qquad (3)$$

ὁπότε ἡ (1), ἐκ τῶν (2) καὶ (3) γίνεται:

$$\frac{\lambda B \eta\mu\varphi}{\dfrac{mg\lambda T^2}{4\pi^2}} = \omega'$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ
$$\omega' = \frac{4\pi^2 \eta\mu\varphi}{T^2} \qquad (4)$$

$$\omega' = \frac{4.9,87.0.5}{4}\ sec^{-2}$$

$$\boxed{\omega' = 4,935\ sec^{-2}}$$

140. Δίδεται τὸ αὐτὸ ἐκκρεμὲς τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως μὲ ἄγνωστον τὴν γωνίαν φ.

Ζητεῖται: Ι. Ὑπὸ ποίαν γωνίαν ἡ γωνιώδης ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι μεγίστη καὶ ΙΙ. Ὑπὸ ποίαν θὰ εἶναι ἐλαχίστη καὶ πόση.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου (4) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως:

$$\omega' = \frac{4\pi^2 \eta\mu\varphi}{T^2}$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ω′ θὰ εἶναι μεγίστη ὅταν τὸ ημφ=1, ἤτοι ὅταν φ=90°.

Τότε θὰ εἶναι
$$\omega'_{\mu\epsilon\gamma} = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\boxed{\omega'_{\mu\epsilon\gamma} = 9,87\ sec^{-2}}$$

Ἀντιθέτως δὲ ἡ ω′ θὰ εἶναι ἐλαχίστη ὅταν καὶ τὸ ημφ εἶναι ἐλάχιστον, ἤτοι ὅταν ημφ=0 καὶ φ=0°, ὁπότε θὰ εἶναι:

$$\boxed{\omega'_{\dot{\epsilon}\lambda\alpha\chi.} = 0}$$

Ἐκ τούτου ἐξάγομεν ὅτι εἰς τὴν κατακόρυφον θέσιν ἡ ταχύτης θὰ διατηρηθῇ σταθερὰ ἐπὶ ἐλάχιστόν τι χρονικὸν διάστημα.

141. Ἀλτὴρ ΑΒ (ἴδ. σχ. 31) μήκους d, στερεῶς συνδεδεμένος διὰ ῥάβδου ΓΣ καθέτου εἰς τὸ κέντρον του, ἀποτελεῖ φυσικὸν ἐκκρεμὲς αἰωρούμενον περὶ τὸ σημεῖον Σ μὲ ἐπίπεδον αἰωρήσεως τὸ ΑΒΣ.

Ζητεῖται: Ἂν αἱ σφαιρικαὶ μᾶζαι Α καὶ Β εἶναι ἴσαι (m), τὸ δὲ μῆκος ΓΣ εἶναι λ καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα πρακτικῶς ἀβαρῆ, ποῖος θὰ εἶναι ὁ τύπος ὁ δίδων τὴν περίοδον (Τ) τοῦ ἐκκρεμοῦς.

Λύσις: Τὸ ἐκκρεμὲς ὡς φυσικόν, θὰ ἀκολουθῇ τὸν τύπον:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{M\lambda g}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅπου ἡ ροπὴ ἀδρανείας K θὰ ἔχῃ τιμήν :

$$K = K_A + K_B \qquad (1)$$

καὶ ὅπου K_A καὶ K_B αἱ ροπαὶ ἀδρανείας τῶν A καὶ B ὡς πρὸς τὸ Σ. Ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν :

$$K_A = m\,.\,(A\Sigma)^2$$

καὶ ἐπειδὴ

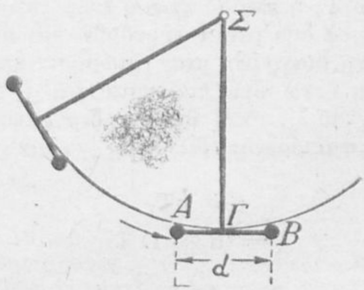
$$(A\Sigma)^2 = (A\Gamma)^2 + (\Gamma\Sigma)^2$$

$$(A\Sigma)^2 = \frac{d^2}{4} + \lambda^2$$

$$(A\Sigma)^2 = \frac{d^2 + 4\lambda^2}{4}$$

τότε :

$$K_A = \frac{m\,(d^2 + 4\lambda^2)}{4}$$



Σχ. 31

ὁπότε, ἐφ᾽ ὅσον $K_A = K_B'$, ἡ (1) γίνεται :

$$K = \frac{m\,(d^2 + 4\lambda^2)}{2}$$

καὶ ἡ περίοδος T, διὰ M = 2m, εὑρίσκεται :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m\,(d^2 + 4\lambda^2)}{4m\,\lambda g}}$$

$$\boxed{T = \pi \sqrt{\frac{(d^2 + 4\lambda^2)}{\lambda g}}}$$

142. Λαμβάνεται ὁ ἀνωτέρω τύπος τοῦ ἀλτῆρος—ἐκκρεμοῦς.

Ζητεῖται: Νὰ ἀποδειχθῇ ὁ τύπος τοῦ μαθηματικοῦ ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς δι᾽ αὐτοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Τοῦ ἀντιστοίχου ἁπλοῦ ἐκκρεμοῦς τὸ μῆκος d θὰ εἶναι:

$$d = 0$$

ὁπότε ὁ τύπος

$$T = \pi\sqrt{\frac{d^2 + 4\lambda^2}{\lambda g}}$$

γίνεται:

$$T = \pi\sqrt{\frac{4\lambda^2}{\lambda g}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}}$$

143. Δύο ἐκκρεμῆ, ἁπλᾶ μαθηματικά, περιόδου ἀντιστοίχως $T_1 = 20$ sec καὶ $T_2 = 18$ sec ἀφίενται ταυτοχρόνως ἔκ τινος θέσεως ὥστε τὰ μήκη των νὰ εἶναι παράλληλα.

Ζητεῖται: Μετὰ πόσον χρόνον (t) τὰ μήκη των θὰ γίνουν ἐκ νέου παράλληλα, κινούμενα πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν.

Λύσις: Ἔστω T_1 ἡ περίοδος τοῦ ἑνὸς ἐκκρεμοῦς καὶ T_2 ἡ τοῦ ἄλλου. Ἵνα τὰ δύο ταῦτα εὑρεθοῦν καὶ πάλιν παράλληλα πρέπει τὸ ἓν νὰ ἔχῃ διαγράψῃ μίαν αἰώρησιν ἐπὶ πλέον τοῦ ἄλλου. Ὡς ἐκ τούτου ἔστω ὅτι παρουσιάζεται ἡ ζητουμένη θέσις μετὰ n αἰωρήσεις τοῦ λ_1, τὸ λ_2 θὰ ἔχῃ διαγράψῃ τότε $(n + 1)$ αἰωρήσεις, τὸ δὲ φαινόμενον θὰ λάβῃ χώραν μετὰ χρόνον t, ὅπου:

$$t = nT_1 \qquad (1)$$

$$t = (n + 1)\,T_2$$

καὶ

$$nT_1 = (n + 1)\,T_2$$

ἐξ οὗ:

$$n = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \qquad (2)$$

$$\eta = \frac{18}{20-18}$$

$$\boxed{\eta = 9 \text{ αἰωρήσεις}}$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται

$$t = 9.20 \text{ sec}$$

$$\boxed{t = 180 \text{ sec}}$$

144. Δύο ἐκκρεμῆ, περιόδου ἀντιστοίχως T_1 καὶ T_2, ἀναχωροῦν ἐκ τῆς αὐτῆς θέσεως.

Ζητεῖται: Ποία σχέσις πρέπει νὰ ἰσχύῃ μεταξὺ T_1 καὶ T_2

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὥστε τὰ ἐκκρεμῆ, παράλληλα, νὰ εὑρεθοῦν μετὰ χρόνον t εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν.

Λύσις: Διὰ νὰ πληροῦται ὁ ζητούμενος ὅρος πρέπει δ λόγος

$$n = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

(ἴδ. σχέσιν (2) προηγουμένης ἀσκήσεως) νὰ μὴ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος ἢ περιοδικός, ἤτοι ἡ διαίρεσις $T_2 : (T_1 - T_2)$ νὰ εἶναι τελεία.

145. Εἰς τὰ δύο ἐκκρεμῆ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως αἱ περίοδοι εἶναι $T_1 = 4{,}6$ sec καὶ $T_2 = 2{,}6$ sec.

Ζητεῖται: Μετὰ πόσας αἰωρήσεις τοῦ ἔχοντος τὴν περίοδον T_1 θὰ εὑρίσκωνται τὰ ἐκκρεμῆ παράλληλα, εἰς τὴν αὐτὴν θέσιν καὶ θὰ κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν;

Λύσις: Ὁ τύπος

$$\eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

γίνεται

$$\eta = \frac{2{,}6}{2}$$

$$\eta = 1{,}3$$

τοῦ δὲ η τὸ ἐλάχιστον ἀκέραιον πολλαπλάσιον εἶναι 13 ὁπότε ἔχομεν τὸ ζητούμενον

$$\boxed{\eta' = 13}$$

146. Ράβδος μήκους $\lambda = 1{,}2$ m καὶ τομῆς $s = 50$ mm² ὑφίσταται ἐφελκυσμὸν διὰ δυνάμεως $F = 15$ Kg*, ὁπότε ἐπιμηκύνεται κατὰ μῆκος $d = 0{,}03$ m χωρὶς νὰ ὑπερβῇ τὸ ὅριον ἐλαστικότητος.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μέτρον ἕλξεως (E) τοῦ ὑλικοῦ τῆς ράβδου.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἐλαστικότητος:

$$d = \frac{\lambda F}{Es}$$

ἔχομεν:

$$E = \frac{\lambda F}{ds}$$

$$E = \frac{1{,}2.15}{0{,}03.50} \; \frac{\text{m}.\text{Kg}^*}{\text{m}.\text{mm}^2}$$

$$\boxed{E = 12 \ \text{Kg}^*/\text{mm}^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

147. Σφαῖρα μάζης $m_1=6$ gr κινουμένη μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v_1=4$ cm/sec εὐθυγράμμως, συγκρούεται κεντρικῶς μὲ ἠρεμοῦσαν σφαῖραν μάζης $m_2=2$ gr.

Ζητεῖται: Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ ταχύτητες τῶν σφαιρῶν μετὰ τὴν κροῦσιν, ὑποτιθεμένην τελείως ἐλαστικήν.

Λύσις: Ἔστω $v_2=0$ ἡ ἀρχικὴ ταχύτης τῆς σφαίρας m_2, καὶ v_1' καὶ v_2' ἀντιστοίχως αἱ μετὰ τὴν κροῦσιν ταχύτητες.

Ἔχομεν σύστημα τῶν ἐξισώσεων τῆς κεντρικῆς κρούσεως:

$$m_1v_1^2+m_2v_2^2=m_1v_1'^2+m_2v_2'^2$$

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

ὅπερ γίνεται:

$$m_1v_1^2=m_1v_1'^2+m_2v_2'^2$$

$$m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2'$$

ἤτοι, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν:

$$96=6v_1'^2+2v_2'^2 \qquad (1)$$

$$24=6v_1'+2v_2' \qquad (2)$$

ἐξ ὧν ἔχομεν τὰς τιμὰς τῶν v_1' καὶ v_2' λύοντες τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2), ὁπότε αἱ μετὰ τὴν κροῦσιν ταχύτητες εὑρίσκονται:

$$\boxed{\begin{aligned} v_1' &= 2 \text{ cm/sec} \\ v_2' &= 6 \text{ cm/sec} \end{aligned}}$$

148. Βαρὺ σῶμα βάρους $B=20$ Kg* πίπτει ἐξ ὕψους τινος, ἡ δὲ πτῶσις του διαρκεῖ ἐπὶ χρόνον $t=4$ sec, ὁπότε τὸ σῶμα συναντᾶ ἐλαστικὸν δάπεδον, ὅπερ πιέζει οὕτω μὲ δύναμιν F, ὑποτιθεμένην σταθεράν.

Ζητεῖται: Ἐπὶ πόσον χρόνον (t′) θὰ πιέζεται τὸ δάπεδον ὑπὸ τοῦ σώματος ἂν ἡ ἐμφανιζομένη δύναμις ἀντιδράσεως εἶναι $F=80$ Kg*.

Λύσις: Κατὰ τὴν κροῦσιν τὸ πῖπτον σῶμα θὰ παρουσιάζῃ ποσότητα κινήσεως:

$$E=mv \qquad (1)$$

ἐπειδὴ ὅμως:

$$m=\frac{B}{g}$$

καὶ

$$v=gt$$

ἡ (1) γίνεται:

$$E=Bt$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ ποσότης ὅμως αὕτη, θὰ διατηρηθῇ σταθερὰ κατὰ τὴν κροῦσιν ὁπότε θὰ εἶναι

$$E = Ft'$$

ἐξ οὗ ἔχομεν : $$Bt = Ft'$$

καὶ $$t' = \frac{Bt}{F}$$

$$t' = \frac{20.4}{80} \frac{Kg^*. sec}{Kg^*}$$

$$\boxed{t' = 1 \text{ sec}}$$

149. Σῶμα πίπτει κατακορύφως, συναντᾷ δὲ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἐξ ὕψους τινος h=75 cm. Μετὰ τὴν κροῦσιν, μὴ τελείως ἐλαστικήν, ἡ ποσότης κινήσεώς του ἐλαττοῦται εἰς τὸ $^1/_5$ τῆς ἀκριβῶς πρὸ τῆς κρούσεως.

Ζητεῖται: Μέχρι ποίου ὕψους h′ θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα ἀνακλώμενον.

Λύσις: Τὸ διάστημα h διαγράφεται ὑπὸ τοῦ σώματος ἐντὸς χρόνου t ἐκ τοῦ τύπου

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

ἤτοι $$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ὁπότε ἡ ἀκριβῶς πρὸ τῆς κρούσεως ποσότης κινήσεώς του θὰ εἶναι

$$E = B . t$$

$$E = B \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

τὸ δὲ $^1/_5$ αὐτῆς θὰ εἶναι :

$$E' = \frac{B}{5} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ἴσον ἀφ' ἑτέρου μὲ τὸ γινόμενον τῆς μάζης τοῦ σώματος ἐπὶ τὴν νέαν του ταχύτητα

$$\frac{B}{5} \sqrt{\frac{2h}{g}} = mv$$

ἐξ οὗ : $$v = \frac{B}{5m} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v = \frac{1}{5} \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐπειδὴ εἶναι :

$$h' = \frac{v^2}{2g} \qquad (2)$$

ἔχομεν, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) :

$$h' = \frac{2gh}{25.2g}$$

$$h' = \frac{h}{25}$$

$$\boxed{h' = 3 \text{ cm}}$$

150. Διὰ πυροβόλου ὅπλου, συνολικῆς μάζης $M = 10$ Tonn βάλλεται βλῆμα μάζης $m = 50$ Kg, ὁπότε τὸ πυροβόλον ὀπισθοχωρεῖ μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v = 4$ m/sec.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἀρχικὴ ταχύτης (v_0) τοῦ βλήματος.

Λύσις: Κατὰ τὴν βολὴν ἡ ποσότης κινήσεως τοῦ βλήματος καὶ τοῦ παλινδρομοῦντος πυροβόλου θὰ εἶναι ἴσαι, ὁπότε ἔχομεν

$$Mv = mv_0$$

ἐξ οὗ

$$v_0 = \frac{Mv}{m}$$

$$v_0 = \frac{10.4}{50} \frac{\text{Tonn . m}}{\text{Kg . sec}}$$

$$v_0 = \frac{4.10^4}{5.10} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$\boxed{v_0 = 800 \text{ m/sec}}$$

151. Ἐλαστικὴ σφαῖρα πίπτουσα ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐξ ὕψους τινος ἀρχικοῦ h χάνει, εἰς ἑκάστην κροῦσιν, ἐνέργειαν, μετατρεπομένην εἰς θερμότητα, κατὰ τρόπον ὥστε ἡ ποσότης κινήσεως μεθ' ἑκάστην κροῦσιν νὰ γίνεται τὸ $\frac{1}{n}$ τῆς πρὸ τῆς κρούσεως.

Ζητεῖται: Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ ἀριθμοῦ κρούσεων (x) καὶ τελικοῦ ὕψους (y).

Λύσις: Ὡς εἰς τὴν ἄσκ. 149 εἴδομεν, τὸ μετὰ τὴν πρώτην κροῦσιν ὕψος h' θὰ εἶναι

$$h' = \frac{h}{n^2}$$

ἤτοι

$$h' = \frac{1}{n^2} . h$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τούτου εὑρίσκομεν ὅτι τὸ ὕψος h'', μετὰ τὴν δευτέραν κροῦσιν, θὰ εἶναι

$$h'' = \frac{1}{n^2} . h'$$

καθ' ὅσον τὸ h' θὰ εἶναι ἀρχικὸν διὰ τὴν δευτέραν κροῦσιν, ἤτοι :

$$h'' = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} h$$

διὰ τὴν τρίτην θὰ ἔχομεν

$$h''' = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot h$$

κ.ο.κ., ὁπότε τελικῶς ἡ σχέσις τοῦ μετὰ τὴν x-στὴν κροῦσιν ὕψους y μὲ τὸ ἀρχικὸν h γίνεται

$$y = \left(\frac{1}{n^2}\right)^x . h$$

$$\boxed{y = \frac{h}{n^{2x}}}$$

152. Σῶμα ὀλισθαίνων ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀρχίζει καὶ κινεῖται μόλις ἡ κλίσις γίνει φ.

Ζητεῖται: Ποία ἐπιτάχυνσιν θὰ δεικνύῃ τοῦτο ὑπὸ γωνίαν κλίσεως θ>φ, ὑποτιθεμένου τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς σταθεροῦ.

Λύσις: Ὁ συντελεστὴς τριβῆς n εἶναι προφανῶς

$$n = \varepsilon\varphi\varphi$$

Ὑπὸ γωνίαν θ τὸ σῶμα, βάρους ἔστω B, πιέζει τὸ ἐπίπεδον διὰ δυνάμεως

$$P = B\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

μὲ συνιστῶσαν παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον

$$F_1 = B\eta\mu\theta$$

Κατὰ τὴν ὀλίσθησιν ὅμως τοῦ σώματος, πλὴν τῆς F_1 ἐνεργεῖ καὶ ἡ τριβὴ (F_2) κατ' ἀντίθετον φορὰν καὶ μὲ τιμὴν

$$F_2 = nP$$

$$F_2 = B\sigma\upsilon\nu\theta . \varepsilon\varphi\varphi$$

ὁπότε ἡ ἐπὶ τοῦ σώματος συνισταμένη Σ εἶναι

$$\Sigma = F_1 - F_2$$

$$\Sigma = B\eta\mu\theta - B\sigma\upsilon\nu\theta . \varepsilon\varphi\varphi$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ δ' ἐπιτάχυνσις γ:

$$\gamma = \frac{\Sigma}{m} = \frac{B\eta\mu\vartheta - B\sigma\upsilon\nu\vartheta . \varepsilon\varphi\varphi}{m}$$

$$\boxed{\gamma = g\,(\eta\mu\vartheta - \sigma\upsilon\nu\vartheta\,.\,\varepsilon\varphi\varphi)}$$

153. Σῶμα ὠθεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=294{,}3$ cm/sec, ὁπότε ἠρεμεῖ μετὰ χρόνον $t=3$ sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς καθ' ἣν ἡ ἀρχικὴ ταχύτης ἦτο v_0.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς τριβῆς (n) μεταξὺ ὀλισθαίνοντος σώματος καὶ ἐπιπέδου.

Λύσις: Ἔστω F ἡ δύναμις τριβῆς καὶ m ἡ μᾶζα τοῦ σώματος. Ἡ ἐπιβράδυνσις τῆς κινήσεως θὰ εἶναι προφανῶς

$$\gamma = \frac{F}{m} \qquad (1)$$

ὅπου, ὡς ἐκ τῆς κινητικῆς γνωστόν, θὰ εἶναι

$$\gamma = \frac{v_0}{t}$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$\frac{v_0}{t} = \frac{F}{m}$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι

$$F = Bn$$

ὅπου B τὸ βάρος τοῦ σώματος, ἔχομεν:

$$\frac{v_0}{t} = \frac{Bn}{m}$$

$$\frac{v_0}{t} = gn$$

καὶ

$$n = \frac{v_0}{tg}$$

$$n = \frac{294{,}3}{3.981}$$

$$n = \frac{1}{10}$$

$$\boxed{n = 0{,}1}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

154. Βαρὺ σῶμα ὀλισθαίνει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=2$ m/sec.

Ζητεῖται: Ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ ἐπιπέδου καὶ ὀλισθαίνοντος σώματος εἶναι $n=0,01$, πόσον διάστημα θὰ διανυθῇ μέχρις οὗ τὸ σῶμα ἠρεμήσῃ.

Λύσις: Ὑπὸ συντελεστὴν τριβῆς n ἡ δύναμις τριβῆς, συναρτήσει τοῦ βάρους B τοῦ σώματος, εἶναι:

$$F = Bn$$

ἡ δὲ ἐπιβράδυνσις

$$\gamma = \frac{Bn}{m}, \quad \gamma = gn$$

ὁπότε τὸ ζητούμενον διάστημα (h) δὲν θὰ εἶναι εἰ μὴ τὸ μέγιστον διάστημα ἐπιβραδυνομένης κινήσεως μὲ $\gamma=gn$, ἤτοι:

$$h = \frac{v_0^2}{2\gamma}$$

$$h = \frac{v_0^2}{2gn}$$

$$h = \frac{4}{2.9,81.0,01} \; \frac{m^2.sec^{-2}}{m.sec^{-2}}$$

$$\boxed{h = 20,38 \text{ m}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

155. Σῶμα μάζης $m=1962$ gr ἐν ἠρεμίᾳ εὑρισκόμενον δέχεται δύναμιν $F=2$ gr* ἐπὶ χρόνον $t=15$ sec.

Ζητεῖται: Ποῖαν ταχύτητα (v) θὰ παρουσιάζῃ μετὰ τὸν χρόνον t ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐνεργείας τῆς F.

Λύσις: $v=15$ cm/sec.

156. Σῶμα μάζης $m=13$ gr ἐκκινεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως σταθερᾶς F, ὁπότε μετὰ χρόνον $t=2$ sec ἡ ταχύτης του γίνεται $v=4$ cm/sec.

Ζητεῖται: Πόση εἶναι ἡ F.

Λύσις: $F=26$ dynes.

157. Βαρὺ σῶμα, βάρους $B=10$ Kg*, πίπτει ἐπὶ χρόνον $t=10$ sec.

Ζητεῖται: Πόσον ἔργον θὰ παράγῃ κατὰ τὴν πτῶσίν του ταύτην (W).

Λύσις: $W=4905$ Kg*. m

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

158. Σῶμα μάζης $m=4$ gr, ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ διανύει διάστημα $S=158$ cm ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως $F=316$ dynes.

Ζητεῖται: Ἐπὶ πόσον χρόνον (t) ἐπέδρασεν ἡ δύναμις.

Λύσις: $t=2$ sec.

159. Σῶμα βάρους $B=120$ gr* τίθεται ἐπὶ ἐπιπέδου ἐπιφανείας.

Ζητεῖται: Ποίαν κλίσιν (φ) πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ ἐπιφάνεια ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἵνα τοῦτο πιέζεται ὑπὸ τοῦ σώματος διὰ δυνάμεως $F=60$ gr*.

Λύσις: $\varphi=60^\circ$.

160. Σῶμά τι κινούμενον μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v_0=20$ cm/sec ὑφίσταται εἰς στιγμήν τινα τὴν ἐπίδρασιν καθέτου δυνάμεως $F=1000$ dynes, ἥτις συνεχῶς ἐνεργοῦσα ἐπὶ τοῦ σώματος, ἀναγκάζει τοῦτο νὰ διαγράψῃ $n=10$ στροφὰς ἐντὸς χρόνου $t=62{,}8$ sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μᾶζα (m) τοῦ σώματος καὶ ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος (R) τῆς ἐμφανιζομένης περιστροφῆς.

Λύσις: $m=50$ gr, $R=20$ cm.

161. Σῶμα μάζης $m=40$ gr κινεῖται εὐθυγράμμως μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v_1=40$ cm/sec.

Ζητεῖται: Ἐπὶ πόσον χρόνον (t) πρέπει ἐπ᾿ αὐτοῦ νὰ ἐνεργήσῃ δύναμις $F=30$ dynes, παράλληλος καὶ ὁμόρροπος ὡς πρὸς τὴν κίνησιν, ὥστε ἡ ταχύτης του νὰ γίνῃ $v_2=70$ cm/sec.

Λύσις: $t=40$ sec.

162. Σῶμα μάζης $M=50$ Kg πίπτει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ἐξ ὕψους τινος $h=1962$ cm.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι εἰς τὸ τέλος τῆς πτώσεώς του ἡ κινητικὴ ἐνέργειά του (W), ποία ἡ ταχύτης του (v) καὶ ποῖος ὁ χρόνος τῆς πτώσεως (t).

Λύσις: $W=981$ Kg*m, $v=19{,}62$ cm/sec, $t=2$ sec.

163. Εἰς μηχανὴν τοῦ Atwood ἕκαστον ἀντίβαρον ἔχει μᾶζαν $M=1{,}5$ Kg.

Ζητεῖται: Ποία πρόσθετος μᾶζα (m) πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ ἑνὸς τῶν ἀντιβάρων, εὑρισκομένων ἐν ἠρεμίᾳ, ὥστε τὸ σύστημα νὰ ἀποκτήσῃ ταχύτητα $v=460$ cm/sec ἐντὸς χρόνου $t=2$ sec (διὰ $g=980$ CGS).

Λύσις: $m=920$ gr.

164. Σιδηρόδρομος, βάρους συνολικοῦ $B=216$ Tonn*, κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v=29{,}43$ Km/h, ὁριζοντίως καὶ εὐθυγράμμως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: I. Ποία συνολικὴ δύναμις ἀντιστάσεως (F) πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἀντιθέτως πρὸς τὴν φορὰν τῆς κινήσεως, ὥστε ὁ σιδηρόδρομος νὰ ἠρεμήσῃ ἐντὸς χρόνου $t=0,5$ ὥρας. II. Ποῖον τὸ ἀπαιτούμενον ἔργον (W) διὰ τὴν ὡς ἄνω μεταβολήν.

Λύσις: $F=100$ Kg*, $W=735750$ Kg*m.

165. Ἐντὸς κλειστοῦ ὀχήματος, κινουμένου εὐθυγράμμως μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v=45,78$ m/sec, ἵσταται ὄρθιος ἐπιβάτης βάρους $B=90$ Kg*. Εἰς στιγμήν τινα ἡ ταχύτης τοῦ ὀχήματος ἀρχίζει νὰ ἐλαττοῦται μὲ σταθερὰν ἐπιβράδυνσιν ὁπότε τὸ κινητὸν ἠρεμεῖ ἐντὸς χρόνου $t=4,2$ sec.

Ζητεῖται: Μὲ ποίαν δῦναμιν (F) πρέπει νὰ στηριχθῇ ὁ ἐπιβάτης ἐπὶ τοῦ πρὸ αὐτοῦ τοιχώματος τοῦ ὀχήματος, διὰ νὰ μὴ κινηθῇ ἐκ τῆς σχετικῆς θέσεώς του.

Λύσις: $F=100$ Kg*.

166. Περιστρεφόμενος δίσκος μὲ ἀρχικὴν γωνιώδη ταχύτητα $\omega=9,81$ sec^{-1}, ἠρεμεῖ ἐντὸς χρόνου $t=4$ sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς καθ᾽ ἣν ἐνεργεῖ ἐπὶ τοῦ δίσκου ζεῦγος σταθερᾶς ροπῆς $P=0,5$ Kg*m.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ροπὴ ἀδρανείας (K) τοῦ δίσκου.

Λύσις: $K=20000$ Kg . cm^2.

167. Εἰς τὸ ἄκρον νήματος μήκους $\lambda=10$ cm ἐξαρτᾶται βαρεῖα σφαῖρα, τίθεται δὲ τὸ ὅλον εἰς περιστροφικὴν κίνησιν ἐν κατακορύφῳ ἐπιπέδῳ.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνιώδης ἐπιτάχυνσις (ω') τοῦ στρεφομένου συστήματος, ὥστε ἡ βαρεῖα μᾶζα, ἀναχωροῦσα ἐκ τῆς θέσεως τῆς κατακορύφου ἰσορροπίας, μετὰ $n=6,25$ περιστροφὰς ἀφιεμένη νὰ ἀνέλθῃ εἰς ὕψος $h=39,25$ cm ἄνωθι τοῦ κέντρου περιστροφῆς.

Λύσις: $\omega'=981$ sec^{-2}.

168. Στερεὸν σῶμα, περιστρεπτὸν περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου βάρους του, παρουσιάζει ροπὴν ἀδρανείας $K=200$ CGS καὶ ἠρεμεῖ, ὅτε ἐπ᾽ αὐτοῦ ἐνεργεῖ ζεῦγος δυνάμεων σταθερᾶς ροπῆς $P=90$ dynes . cm. Εἰς ἀπόστασιν $R=400$ cm ἀπὸ τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ὑπάρχει συνδεδεμένη ἐπὶ τοῦ περιστρεφομένου σήματος μικρὰ μᾶζα $m=1$ gr.

Ζητεῖται: Μετὰ πάροδον χρόνου $t=10$ sec ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιδράσεως τοῦ ζεύγους ποία θὰ εἶναι ἡ φυγόκεντρος δύναμις (F) ἣν ὑφίσταται ἡ μᾶζα m.

Λύσις: $F=810$ dynes.

169. Ἐκκρεμὲς μαθηματικὸν μάζης $m=1$ gr καὶ μήκους

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$\lambda=981$ cm ἀφίεται ἐλεύθερον ἔκ τινος θέσεως, σχηματιζούσης γωνίαν $\varphi=60^{\circ}$ μὲ τὴν κατακόρυφον τῆς ἰσορροπίας.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ γωνιώδης ταχύτης τοῦ ἐκκρεμοῦς (ω) ὅταν τοῦτο διέρχεται διὰ τῆς κατακορύφου τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως ὡς καὶ ποία ἡ κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμὴν κινητική του ἐνέργεια (E).

Λύσις: $\omega=1$ sec^{-1} (1 ἀκτίνιον κατὰ sec), $E=490{,}5$ gr*.cm.

170. Ἀεροπλάνον ἵπταται ὁριζοντίως εἰς ὕψος $h=1960$ m καὶ μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v=360$ Km/h.

Ζητεῖται: Ἂν εἰς στιγμήν τινα ἀφίσῃ μίαν βόμβαν νὰ πέσῃ εἰς ποῖον σημεῖον αὕτη θὰ εὕρῃ τὸ ἔδαφος (x) ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου τῆς διερχομένης ἐκ τοῦ ἀεροπλάνου τὴν στιγμὴν ἐγκαταλείψεως τῆς βόμβας ($g=9{,}8$ m/sec²).

Λύσις: $x=2$ Km.

171. Ἐπὶ εὐπαθοῦς ζυγοῦ, συνολικοῦ βάρους τῶν κινητῶν τμημάτων του $B=100$ gr*, κέντρου βάρους εἰς ἀπόστασιν $h=4$ cm ἀπὸ τοῦ ὑπομοχλίου, μήκους ἑκάστης φάλαγγος $\lambda=40$ cm, τίθεται πρὸς ζύγισιν μικρὸν βάρος β.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ β, ὥστε τοῦτο νὰ δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ τοῦ ζυγοῦ μὲ ἀπόκλισιν ἀντιστοιχοῦσαν εἰς γωνίαν ἔχουσαν $\varepsilon\varphi\varphi=0{,}0035$.

Λύσις: $\beta=0{,}035$ gr*.

172. Μεταλλικὴ λεία στέγη οἰκήματος παρουσιάζει κλῖσιν, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, $\varphi=45^{\circ}$. Τὸ ἀνώτατον σημεῖόν της ἀπέχει τοῦ ἐδάφους κατὰ $h_1=15$ m, τὸ δὲ κατώτατον κατὰ $h_2=10$ m.

Ζητεῖται: Ἂν ἀφεθῇ ἐκ τοῦ ἀνωτάτου σημείου νὰ ὀλισθήσῃ ἐπὶ τῆς στέγης σῶμά τι ἄνευ τριβῆς μὲ ποίαν ταχύτητα (v) θὰ φθάσῃ τοῦτο εἰς τὸ ἔδαφος ὡς καὶ ποῖαι θὰ εἶναι αἱ συνιστῶσαι τῆς ταχύτητος ταύτης κατὰ τὴν κάθετον (v_y) καὶ τὴν ὁριζοντίαν διεύθυνσιν (v_x), διὰ $g=9{,}8$ m/sec².

Λύσις: $v \simeq 16{,}8$ m/sec, $v_y \simeq 15{,}65$ m/sec, $v_x \simeq 7$ m/sec.

173. Τροχὸς περιστρέφεται μὲ σταθερὰν γωνιώδη ταχύτητα $\omega_1=320$ sec^{-1}. Εἴς τινα στιγμὴν ἐνεργεῖ ἐπ' αὐτοῦ ζεῦγος δυνάμεων ῥοπῆς $P=100$ CGS ὅπερ, ἐντὸς χρόνου $t=36$ sec, μειώνει τὴν γωνιώδη ταχύτητα εἰς $\omega_2=318$ sec^{-1}.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας (K) τοῦ τροχοῦ εἰς μονάδας CGS.

Λύσις: $K=1800$ gr.cm².

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

174. Μαθηματικὸν ἐκκρεμές, περιόδου $T=6{,}28$ sec ἀφίεται ἔκ τινος θέσεως, σχηματιζούσης γωνίαν $\varphi=60^\circ$ μὲ τὴν κατακόρυφον τῆς ἰσορροπίας.

Ζητεῖται: Ποίαν ταχύτητα γραμμικὴν (v) θὰ παρουσιάζη τὸ ἄκρον του διερχόμενον διὰ τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας.

Λύσις: $v=9{,}81$ cm/sec.

175. Κινητὸν ὀλισθαίνει ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως $\varphi=30^\circ$. Ἀφοῦ διανύση ἐπ' αὐτοῦ διάστημά τι $S=39{,}2$ m ἐγκαταλείπει τὸ ἐπίπεδον καὶ συνεχίζει τὴν κίνησιν ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου παρουσιάζοντος ὡς πρὸς τὸ κινητὸν συντελεστὴν τριβῆς $n=\sqrt{2}$ ($g=9{,}8$ m/sec^2).

Ζητεῖται: Μετὰ πόσον χρόνον τὸ κινητὸν θὰ ἠρεμήση (t) ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεώς του, ὡς καὶ πόσον διάστημα (h) θὰ διανύση ὁριζοντίως.

Λύσις: $t=5$ sec, $h\simeq13{,}82$ m.

176. Ἐπὶ κατακορύφου τροχοῦ ῥοπῆς ἀδρανείας $K=7$ Kg.m^2, στρεφομένου περὶ τὸ κέντρον του, ἐνεργεῖ δύναμις σταθερὰ ἐντάσεως $F=0{,}21$ Kg* ἐφαπτομενικῶς πρὸς τὴν περιφέρειάν του, ἀκτῖνος $R=2$ m.

Ζητεῖται: Πόσον χρόνον (t) πρέπει νὰ ἐνεργήση ἡ δύναμις ἐπὶ τοῦ ἀρχικῶς ἠρεμοῦντος τροχοῦ, ὥστε οὗτος ν' ἀποκτήση γωνιώδη ταχύτητα $\omega=1{,}962$ sec^{-1}, ὡς καὶ πόσον ἔργον (W) θὰ καταναλωθῇ διὰ τὴν ἐπίτευξιν τῆς ταχύτητος ταύτης.

Λύσις: $t=3{,}33$ sec, $W=1{,}3734$ Kg*.m.

177. Κινητὸν σῶμα, μάζης $m=5$ gr ἐνῷ παρουσιάζει σταθεράν, κατὰ τὸ μέτρον καὶ φοράν, ταχύτητα $v_0=10$ cm/sec, δέχεται ἀποτόμως τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως $F=20\sqrt{2}$ dyn, σχηματιζούσης συνεχῶς, μὲ τὴν τροχιάν του, γωνίαν $\varphi=45^\circ$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς περιστροφῆς τοῦ σώματος (R) καὶ ποία ἡ ἐπιτρόχιος γραμμικὴ ταχύτης του (v) μετὰ πάροδον χρόνου $t=\frac{1}{4}$ sec, ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως.

Λύσις: $R=25$ cm, $v=11$ cm/sec.

178. Σῶμά τι πίπτει ἔκ τινος ὕψους $h=4{,}9$ m εἰς σημεῖον κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως $\varphi=45^\circ$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ταχύτης (v) μεθ' ἧς τὸ σῶμα, ἀνακλώμενον θὰ ἐγκαταλύψη τὸ ἐπίπεδον, ὑποτιθεμένου ὅτι κατὰ τὴν κροῦσιν χάνονται τὰ $\frac{5}{9}$ τῆς κτηθείσης κατὰ τὴν πτῶσιν ἐνεργείας, ὡς καὶ ποία ἡ διεύθυνσις (ϑ) τῆς ταχύτητος ταύτης μὲ τὴν κατακόρυφον.

Λύσις: $v=6{,}53$ m/sec, $\vartheta=90^\circ$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

179. Σῶμα κινεῖται, ὀλισθαῖνον, ἐπὶ ἀνωφερικῆς ὁδοῦ, κλίσεως $\varphi=30^0$ μὲ ταχύτητα σταθεράν. Δίδεται ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ αὐτοῦ καὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου $n=\frac{1}{2\sqrt{3}}$, καὶ ἡ μᾶζα τοῦ σώματος $m=204$ gr.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως (F) ἥτις, ὠθοῦσα τὸ σῶμα ἐκ τῶν κάτω μὲ διεύθυνσιν τὴν τοῦ ἐπιπέδου, θὰ διατηρῇ σταθερὰν τὴν ἀνοδικὴν κίνησιν ἅπαξ τὸ σῶμα ἀποκτήσῃ ταχύτητά τινα.

Λύσις: $F=153$ gr*.

180. Ἐλαστικὴ σφαῖρα, πίπτουσα ἐξ ὕψους τινος $h_1=60$ cm ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, μετὰ τὴν πρώτην κροῦσιν ἀνέρχεται εἰς ὕψος $h_2=24$ cm.

Ζητεῖται: Ποία ἡ ἀπώλεια (n) τῆς κινητικῆς ἐνεργείας της.

Λύσις: $n=60\,\%$.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

181. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα διαστάσεων, λαμβάνονται ὡς θεμελειώδεις διαστάσεις αἱ τοῦ ἔργου (W), τοῦ μήκους (L) καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως (G).

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθοῦν εἰς τὸ σύστημα τοῦτο (W, L, G) αἱ διαστάσεις: I. τῆς ταχύτητος, II. τῆς μάζης, III. τῆς δυνάμεως, IV. τοῦ χρόνου.

Λύσις: Διὰ τὰς διαστάσεις τῆς ταχύτητος (v) ἔχομεν, ἐκ τῶν γνωστῶν τύπων:

$$v=\gamma t \tag{1}$$

$$S=\frac{1}{2}\gamma t^2 \tag{2}$$

τὸν

$$S=\frac{v^2}{2\gamma}$$

ἐξ οὗ

$$v=\sqrt{2S\gamma}$$

$$[v]=[S^{\frac{1}{2}}]\ [\gamma^{\frac{1}{2}}]$$

$$\boxed{[v]=L^{\frac{1}{2}}G^{\frac{1}{2}}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ τὴν μᾶζαν (m) ἔχομεν, ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ἔργου

$$W = F.S$$

τὸν

$$F = \frac{W}{S} \qquad (3)$$

καὶ ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου καὶ τοῦ

$$m = \frac{F}{\gamma}$$

τελικῶς

$$m = \frac{W}{S\gamma}$$

$$[m] = \frac{W}{LG}$$

$$\boxed{[m] = WL^{-1}\,G^{-1}}$$

Διὰ τὴν δύναμιν, ἐκ τοῦ ἀνωτέρω τύπου (3) ἔχομεν

$$[F] = \frac{W}{L}$$

$$\boxed{[F] = WL^{-1}}$$

Διὰ δὲ τὸν χρόνον (t) λαμβάνομεν τελικῶς τὸν τύπον

$$S = \frac{1}{2}\,\gamma t^2$$

ἐξ οὗ

$$t = \sqrt{\frac{2S}{\gamma}}$$

$$[t] = \frac{[S^{\frac{1}{2}}]}{[\gamma^{\frac{1}{2}}]}$$

$$\boxed{[t] = L^{\frac{1}{2}}\,G^{-\frac{1}{2}}}$$

182. Δίδεται αὐθαίρετον σύστημα μὲ θεμελειώδεις διαστάσεις τὰς τῆς δράσεως (D), τῆς ἰσχύος (J) καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως (G).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ διαστάσεις: I. τοῦ χρόνου (t), II. τοῦ ἔργου (W), III. τοῦ διαστήματος (S) καὶ IV. τῆς ταχύτητος (v).

Λύσις: Ἔστω d ἡ δρᾶσις συστήματός τινος, αὕτη θὰ εἶναι

$$d = W \cdot t \qquad (1)$$

ὅπου W εἶναι

$$W = J \cdot t \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν τότε:

$$\frac{d}{t} = Jt$$

$$t^2 = \frac{d}{J}$$

$$[t] = \left[\sqrt{\frac{d}{J}}\right]$$

$$\boxed{[t] = D^{\frac{1}{2}} J^{-\frac{1}{2}}}$$

Διὰ τὸ ἔργον W ἔχομεν:

$$W = \frac{d}{t}$$

$$[W] = \frac{D}{[t]}$$

$$[W] = \frac{D}{D^{\frac{1}{2}} J^{-\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{[W] = D^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}}}$$

Διὰ τὸ διάστημα:

$$S = \frac{1}{2} \gamma t^2$$

ἐξ οὗ

$$[S] = G \cdot [t]^2$$

$$[S] = G\,[D^{\frac{1}{2}} J^{-\frac{1}{2}}]^2$$

$$\boxed{S = DJ^{-1}G}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τελικῶς δέ, διὰ τὴν ταχύτητα ἔχομεν :

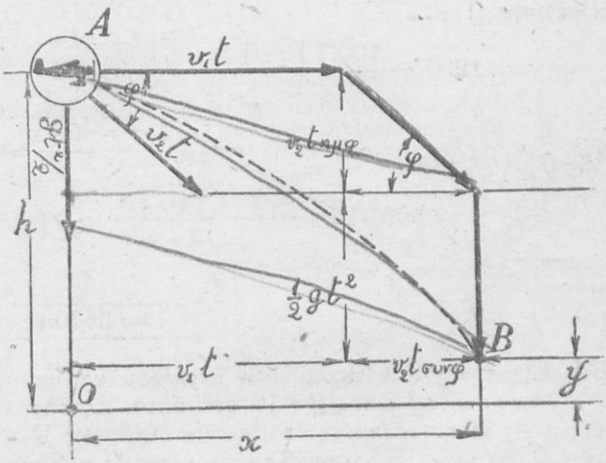
$$v = \gamma t$$

ἐξ οὗ :

$$[v] = G\,[t]$$

$$\boxed{[v] = D^{\frac{1}{2}} J^{-\frac{1}{2}} G}$$

183. Ἀεροπλάνον ἱπτάμενον εἰς σταθερὸν ὕψος h=1200 m κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα v_1=300 m/sec, ὅτε ρίπτεται ἐξ αὐτοῦ πύραυλος μὲ σχετικὴν ταχύτητα v_2=100 m/sec ὑπὸ γωνίαν φ=45° ὡς πρὸς τὴν τροχιὰν κινήσεως τοῦ ἀεροπλάνου (ἴδ. σχ. 32, θέσις Α).



Σχ. 32

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ εἰς ποῖον ὕψος (y) καὶ ποῖον μῆκος (x), ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου κατὰ τὴν ρίψιν, θὰ ἐκραγῇ ὁ πύραυλος, ἂν εἶναι ἐγκαιροφλεγὴς μὲ χρόνον ἐκρήξεως $t=7\sqrt{2}$ sec ἀπὸ τῆς ἐκσφενδονίσεως (g=9 m/sec²).

Λύσις: Ἡ κίνησις τοῦ πυραύλου θὰ εἶναι συνισταμένη τριῶν κινήσεων, ἤτοι:

α) Μιᾶς ὁριζοντίου μὲ σταθερὰν ταχύτητα v_1.

β) Μιᾶς κατακορύφου μὲ ἐπιτάχυνσιν g.

γ) Μιᾶς ὑπὸ γωνίαν φ μὲ σταθερὰν ταχύτητα v_2.

Ὡς ἐκ τούτου (ὡς εἰς τὸ σχῆμα 32 φαίνεται) θεωροῦντες ἀν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τιστοίχως S_1, S_2 καὶ S_g τὰ διαστήματα τῶν κινήσεων μὲ ταχύτητας v_1, v_2 καὶ τῆς μὲ g, ἔχομεν :

$$S_1 = v_1 t$$

$$S_2 = v_2 t$$

$$S_g = \frac{1}{2} g t^2$$

ὁπότε εἶναι :

$$y = h - v_2 t ημφ - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

$$x = v_1 t + v_2 t\ συνφ \qquad (2)$$

καί, ἐκ μὲν τῆς (1) :

$$y = 1200 - \frac{100.7\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\,9.49.2$$

$$\boxed{y = 59\ m}$$

ἐκ δὲ τῆς (2) :

$$x = 300.7\sqrt{2} + \frac{100.7\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 2970 + 700$$

$$\boxed{x = 3670\ m}$$

184. Εἰς τὴν βάσιν κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως φ=30° τίθεται σῶμα βάρους B=10 gr*, ὅπερ, ἐκ τῆς ἠρεμίας του τίθεται εἰς κίνησιν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως F=10 gr* ἥτις ὠθεῖ τοῦτο μέχρι τῆς κορυφῆς ἐπὶ διάστημά τι S=981 cm.

Ζητεῖται : I. Ποία θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ σώματος (v) εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ ἐπιπέδου. II. Ποία ἡ μεγίστη ἀπόστασις (x) εἰς ἣν τὸ σῶμα θὰ συναντήσῃ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τῆς βάσεως πέραν τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου τοῦ ἀνωτάτου σημείου τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου. III. Ποῖον τὸ μέγιστον ὕψος (y) εἰς ὃ θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα, ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου βάσεως.

Λύσις : Ἡ δύναμις F, ὁμοῦ μετὰ τῆς συνιστώσης τοῦ βάρους B κατὰ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ σώματος, δίδουν εἰς τοῦτο ἐπιτάχυνσιν :

$$γ = \frac{F - Bημφ}{m}$$

ὅπου m ἡ μᾶζα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ βάρος B.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ὡς ἐκ τούτου τὸ σῶμα, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἐπιταχύνσεως ταύτης, θὰ παρουσιάζῃ (μετὰ διάστημα S) ταχύτητα:

$$v = \sqrt{2\gamma S} \qquad (1)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου ὕψους (y) λαμβάνομεν τὴν κατακόρυφον συνιστῶσαν τῆς ταχύτητος ταύτης (v_y) ἥτις θὰ εἶναι:

$$v_y = v \, . \, ημφ$$

$$v_y = \sqrt{2\gamma S} \, . \, ημφ \qquad (2)$$

ὁπότε τὸ μέγιστον ὕψος y θὰ εἶναι

$$y = \frac{v_y^2}{2g} + S\, ημφ \qquad (3)$$

τὸ δὲ μῆκος x εὑρίσκομεν ὡς κάτωθι:

Ὑπολογίζομεν τὸν χρόνον t, ὃν χρειάζεται τὸ σῶμα διὰ νὰ πέσῃ εἰς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ἐκ τοῦ τύπου:

$$-S\, ημφ = v_y\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

ὃν θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$x = v_x \, . \, t$$

ὅπου $v_x = v\, συνφ$, ὁπότε:

$$x = \sqrt{2\gamma S} \, . \, συνφ \, . \, t \qquad (4)$$

Εὑρίσκομεν τότε, δι᾽ ἀντικαταστάσεων τῶν τιμῶν τῶν S, F κλπ.:

I) Ἐκ τῆς (1):

$$\boxed{v = 981 \text{ cm/sec}}$$

II) Ἐκ τῶν (2), (3) καὶ τῆς τιμῆς τῆς v:

$$\boxed{y = 613{,}12 \text{ cm}}$$

III) Ἐκ τῆς (4) καὶ τῆς τιμῆς τοῦ t:

$$\boxed{x \simeq 1373 \text{ cm}}$$

185. Σῶμά τι βάρους B=5 Kg* πίπτει ἐξ ὕψους τινος h_1=90 cm ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, ὁπότε μετὰ τὴν κροῦσιν ἀνέρχεται εἰς νέον ὕψος h_2=15 cm.

Ζητεῖται: Ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ ἀπώλεια ἐνεργείας λαμβάνει χώραν κατὰ τὴν κροῦσιν, νὰ εὑρεθῇ πόση θὰ εἶναι αὕτη εἰς μονάδας Joule.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἡ πρὸ τῆς κρούσεως ἐνέργεια εἶναι

$$W_1 = Bh_1 \qquad (1)$$

ἡ ἐναπομένουσα μετὰ τὴν κροῦσιν:

$$W_2 = Bh_2$$

ὁπότε ἡ ἀπωλεσθεῖσα (W) θὰ εἶναι

$$W = Bh_1 - Bh_2$$

$$W = B(h_1 - h_2)$$

ὁπότε

$$W = 5.75 \text{ Kg*.cm}$$

$$W = \frac{5.75.981}{10^4} \text{ Joule}$$

$$\boxed{W = 36{,}79 \text{ Joule}}$$

186. Κινητὸν ἀναχωρεῖ ἔκ τινος σημείου μὲ ἐπιτάχυνσιν γ, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἀκολουθεῖ δὲ τροχιὰν εὐθεῖαν.

Δεύτερον κινητὸν ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου μετὰ πάροδον χρόνου θ, μὲ τὴν αὐτὴν ἐπιτάχυνσιν καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ διεύθυνσιν.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ σχετικὴ κίνησις τοῦ ἑνὸς ὡς πρὸς τὸ ἄλλο.

Λύσις: Ἔστω ὅτι τὸ δεύτερον κινητόν, ἀναχωρῆσαν ἐκ τῆς ἠρεμίας του, ἐκινήθη ἐπὶ χρόνον t. Ἡ εἰς τοῦτον ἀντιστοιχοῦσα ταχύτης του θὰ εἶναι προφανῶς:

$$v = \gamma t$$

Τὴν αὐτὴν ὅμως στιγμὴν τὸ πρῶτον κινητόν, κινηθὲν κατὰ $t + \vartheta$ χρόνον θὰ παρουσιάζῃ ταχύτητα

$$v' = \gamma(t + \vartheta)$$

τῆς αὐτῆς ὡς πρὸς τὴν τῆς v φορᾶς.

Ὡς ἐκ τούτου ἡ σχετικὴ ταχύτης τοῦ πρώτου κινητοῦ ὡς πρὸς τὸ δεύτερον, εἴς τινα στιγμὴν t, θὰ εἶναι

$$u = v' - v$$

$$u = \gamma t + \gamma\vartheta - \gamma t$$

$$\boxed{u = \gamma\vartheta}$$

Ἐξ αὐτοῦ ὅμως ἐξάγομεν ὅτι ἡ ταχύτης αὐτη (u) εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χρόνου t, ἤτοι εἶναι σταθερά, ὅπερ σημαίνει ὅτι

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἡ κίνησις τοῦ ἑνὸς κινητοῦ ὡς πρὸς τὸ ἄλλο εἶναι ὁμαλὴ μὲ ταχύτητα ἐξαρτημένην μόνον ἀπὸ τὴν ἀπόλυτον ἐπιτάχυνσιν (γ) καὶ τὴν καθυστέρησιν (θ) τῆς ἐκκινήσεως τῶν κινητῶν.

187. Βαρὺ σῶμα μάζης m καὶ γνωστοῦ βάρους B=12 Kg* ζυγιζόμενον διὰ δυναμομέτρου ἀκριβείας ἐντὸς ἀνελκυστῆρος εὑρίσκεται ἔχον τιμὴν B′=12,036 Kg*.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ἀνελκυστῆρος (γ) καὶ ποία ἡ φορὰ τῆς κινήσεώς του (g=981 cm/sec)².

Λύσις: Τὸ σῶμα m ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως B′ θὰ παρουσιάζῃ ἐπιτάχυνσιν ὡς πρὸς τὸν ἀνελκυστῆρα:

$$g' \neq g$$

τιμῆς:

$$g' = \frac{B'}{m} \qquad (1)$$

ἥτις ὡς σταθερὰ θὰ εἶναι:

$$g' = g + \gamma \qquad (2)$$

ὅπου g ἡ τῆς βαρύτητος ὑπὸ βάρος B.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν τότε:

$$\frac{B'}{m} = g + \gamma$$

ἤτοι

$$\gamma = \frac{B'g}{B} - g$$

$$\boxed{\gamma = 2{,}943 \text{ cm/sec}^2}$$

μὲ φορὰν κινήσεως τοῦ ἀνελκυστῆρος ἐκ τῶν κάτω.

188. Διὰ ζυγοῦ μὴ ἀκριβείας ζυγίζεται σῶμά τι ἀλληλοδιαδόχως ἐπὶ τῶν δύο δίσκων τοῦ ζυγοῦ καὶ εὑρίσκεται τὸ βάρος του, εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ἀντιστοίχως B_1 καὶ B_2.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν βάρος (B) τοῦ σώματος.

Λύσις: Ἡ μὴ ἀκρίβεια τοῦ ζυγοῦ, ὀφείλεται εἰς διαφορὰν τῶν φαλάγγων, αἵτινες ἔστωσαν λ_1 καὶ λ_2. Τότε κατὰ τὰς δύο ζυγίσεις θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις ροπῶν:

$$B\lambda_1 = B_1\lambda_2$$

$$B\lambda_2 = B_2\lambda_1$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ὧν:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{B_1}{B}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{B}{B_2}$$

καὶ

$$\frac{B_1}{B} = \frac{B}{B_2}$$

$$B^2 = B_1 B_2$$

$$\boxed{B = \sqrt{B_1 B_2}}$$

189. Δίδεται ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς εἰς τὸν ἰσημερινὸν ἴση μὲ $R = 6300$ Km.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις (γ) εἰς τὸν ἰσημερινόν, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι μία περιστροφὴ γίνεται εἰς χρόνον ἀκριβῶς 24 ὡρῶν.

Λύσις: Ἡ κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις, ὡς ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\gamma_\kappa = \frac{F_\kappa}{m}$$

ὅπου F_κ ἡ κεντρομόλος δύναμις, θὰ εἶναι:

$$\gamma_\kappa = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

ἤτοι

$$\gamma_\kappa = \frac{4.3,14^2.6300}{24^2} \frac{Km}{h^2}$$

$$\gamma_\kappa = \frac{4.3,14^2.63.63.10^2.10^5}{24^2.36^2.10^4} \frac{cm}{sec^2}$$

$$\boxed{\gamma_\kappa = 3,33 \text{ cm/sec}^2}$$

190. Ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος $S=400$ m ἀπὸ τῆς βάσεως πύργου, καὶ κειμένου εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, ρίπτεται βλῆμα μὲ κατεύθυνσιν τὴν κορυφὴν τοῦ πύργου καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=200$ m/sec.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον ὕψος (d) κάτωθεν τῆς κορυφῆς τὸ βλῆμα θὰ εὕρῃ τὸν πύργον ἂν οὗτος ἔχῃ ὕψος $h=30$ m.

Λύσις: Ἡ ἀπόστασις S' μεταξὺ τοῦ σημείου ἐκσφενδονί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

σεως τοῦ βλήματος καὶ τῆς κορυφῆς θὰ εἶναι, ὡς ἐκ τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου τριγώνου:

$$S' = \sqrt{S^2 + h^2} \qquad (1)$$

ὁπότε θὰ ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$S' = v_0 t$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν:

$$t = \frac{S'}{v_0} \qquad (2)$$

Ἀλλ' εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον t τὸ σῶμα, μετέχον τῆς ἕνεκα τῆς βαρύτητος κινήσεως, θὰ διανύσῃ διάστημα d ὅπου:

$$d = \frac{1}{2} g t^2$$

ὅπερ, ἐκ τῆς (2) καὶ (1), γίνεται:

$$d = \frac{gS'^2}{2v_0^2}$$

$$d = \frac{g(S^2 + h^2)}{2v_0^2}$$

$$d = \frac{9{,}81\,(400^2 + 30^2)}{2.200^2} \frac{m \,.\, m^2 .\, sec^2}{sec^2 . m^2}$$

$$\boxed{d = 19{,}73 \text{ m}}$$

191. Λαμβανομένης τῆς ἐτησίας περὶ τὸν ἥλιον περιστροφῆς τῆς γῆς ὡς γενομένης εἰς χρόνον T=365,24 ἡμέρας, δίδεται ἡ ἐκτὶς τῆς ἐκλιπτικῆς (ὑποτιθεμένης περιφερείας κύκλου) ἴση μὲ R=23440 γηΐνας ἀκτῖνας μήκους r=6371 Km.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῆς μάζης τοῦ Ἡλίου πρὸς τὴν τῆς γῆς (M_H/M_Γ), ἂν ἡ ἐπὶ τῆς γηΐνης ἐπιφανείας τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος εἶναι g=9,859 m/sec².

Λύσις: Πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου M_H/M_Γ στηριζόμεθα εἰς τὸ ὅτι, κατὰ τὴν γηΐνην περιστροφὴν περὶ τὸν ἥλιον, ἡ ἐπὶ τῆς γῆς φυγόκεντρος φύναμις (F_φ) θὰ εἶναι ἴση, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, μὲ τὴν μεταξὺ ἡλίου καὶ γῆς ἕλξιν (F_N) συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Newton.

Ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν, ἀφ' ἑνός:

$$F_\varphi = \frac{4\pi^2 M_\Gamma \,.\, R}{T^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀφ᾽ ἑτέρου:

$$F_N = \frac{kM_H \,.\, M_\Gamma}{R^2}$$

ἐξ ὧν προκύπτει (διὰ $F_\varphi = F_N$):

$$\frac{4\pi^2 .\, M_\Gamma \,.\, R}{T^2} = \frac{kM_H \,.\, M_\Gamma}{R^2}$$

καὶ διαιροῦντες τὴν ἐξίσωσιν διὰ r^2:

$$\frac{4\pi^2 .\, M_\Gamma \,.\, R^3}{T^2 r^2} = \frac{kM_\Gamma M_H}{r^2} \qquad (1)$$

ἀλλὰ ἐκ τῆς βαρύτητος εἶναι γνωστὸν ὅτι:

$$g = \frac{kM_\Gamma}{r^2}$$

ὡς ἐκ τούτου ἡ σχέσις (1) γίνεται:

$$gM_H = \frac{4\pi^2 .\, M_\Gamma \,.\, R^3}{T^2 r^2}$$

καὶ ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τὸν ζητούμενον λόγον:

$$\frac{M_H}{M_\Gamma} = \frac{4\pi^2 R^3}{gT^2 r^2}$$

ἤτοι:

$$\frac{M_H}{M_\Gamma} = \frac{4 . 3{,}14^2 . 23440^3 . 6371^3}{9{,}859 . 365{,}25^2 . 6371^2} \; \frac{\text{Km} \,.\, \text{sec}^2}{\text{m} \,.\, \text{ἡμερ}^2}$$

$$\frac{M_H}{M_\Gamma} = \frac{4 . 23440^3 . 6371 . 10^3}{365{,}25 . 86400^2} \; \frac{\text{m} \,.\, \text{sec}^2}{\text{m} \,.\, \text{sec}^2}$$

καὶ τελικῶς:

$$\boxed{\frac{M_H}{M_\Gamma} \simeq 330600}$$

192. Σῶμα ρίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0. Μετὰ χρόνον ϑ δεύτερον σῶμα ρίπτεται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν μὲ ταχύτητα v_0'.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ σχετικὴ κίνησις τῶν δύο κινητῶν, ἤτοι ἡ σχετικὴ ταχύτης των καὶ ἡ ἀπόστασίς των εἰς ἕκαστον χρόνον t.

Λύσις: Ἔστω μετὰ χρόνον t, ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου, v ἡ ἀπόλυτος ταχύτης τούτου. Αὕτη θὰ εἶναι:

$$v = v_0 - gt \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε ἡ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ταχύτης v' τοῦ δευτέρου, ἀναχωρήσαντος μετὰ χρόνον ϑ, θὰ εἶναι :

$$v' = v_0' - g(t - \vartheta) \qquad (2)$$

ὁπότε ἡ σχετικὴ ταχύτης u θὰ εἶναι :

$$u = v - v' \qquad (3)$$

καθ᾽ ὅσον εἰς τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεώς των τὰ σώματα ὁδεύουν πρὸς τὴν αὐτὴν φοράν.

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν τότε, θέτοντες τὰς τιμὰς τῶν v καὶ v' ἐκ τῶν (1) καὶ (2) :

$$u = v_0 - gt - v_0' + g(t - \vartheta)$$

$$u = v_0 - gt - v_0' + gt - g\vartheta$$

$$\boxed{u = v_0 - v_0' - g\vartheta}$$

Διὰ τὴν εἰς ἑκάστην στιγμὴν ἀπόστασιν (y) τῶν δύο κινητῶν, αὕτη θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν εἰς τὴν αὐτὴν στιγμὴν διαστημάτων :

$$y = S - S'$$

ὅπου εἶναι

$$S = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

$$S' = v_0'(t - \vartheta) - \frac{1}{2} g(t - \vartheta)^2$$

ὁπότε :

$$y = v_0 t - v_0' t + v_0' \vartheta - gt\vartheta + \frac{1}{2} g\vartheta^2$$

$$\boxed{y = v_0'\vartheta + \frac{1}{2} g\vartheta^2 + (v_0 - v_0' - g\vartheta)\, t}$$

193. Δίδεται ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς $R = 6300$ Km.

Ζητεῖται: Πόσος θὰ ἔπρεπε νὰ ἦτο ὁ χρόνος (T) μιᾶς ἡμερησίας περιστροφῆς ὥστε τὰ σώματα, εἰς τὸν ἰσημερινόν, νὰ μὴ παρουσιάζουν βάρος.

Λύσις: Διὰ νὰ πληροῦται ἡ ζητουμένη συνθήκη πρέπει τὸ βάρος ἑκάστου σώματος (B) νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὴν φυγόκεντρον δύναμίν του (F), ὅπου εἶναι :

$$B = mg$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ

$$F = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

ἐξ ὧν ἔχομεν:

$$mg = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

καὶ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

$$T = 6{,}28 \sqrt{\frac{63.10^2.10^3}{9{,}81.36^2.10^4} \frac{m \,.\, h^2}{m}}$$

$$\boxed{T = 1{,}39 \text{ ὧραι}}$$

194. Σῶμά τι κινούμενον μὲ σταθερὰν ταχύτητα v, γνωστήν, ὑφίσταται τὴν ἐπίδρασιν δυνάμεως F, καθέτου πρὸς τὴν τροχιάν του, ἥτις καμπυλώνει ταύτην μὲ ἀκτῖνα καμπυλότητος R.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μᾶζα τοῦ σώματος συναρτήσει τῶν v, F καὶ R.

Λύσις: Ἡ δύναμις F ὡς κεντρομόλος δίδει εἰς τὸ σῶμα ἐπιτάχυνσιν κεντρομόλον

$$\gamma_\kappa = \frac{F}{m}$$

ἴσην ἀφ᾿ ἑτέρου μέ:

$$\gamma_\kappa = \frac{v^2}{R}$$

ὁπότε ἔχομεν:

$$\frac{F}{m} = \frac{v^2}{R}$$

καὶ ἐξ αὐτοῦ

$$\boxed{m = \frac{RF}{v^2}}$$

195. Δίδεται μηχανὴ τοῦ Atwood μὲ γνωστὰ τὰ μεγάλα βάρη (B), τὸ πρόσθετον βάρος β καὶ τὴν ἐπιτάχυνσιν τοῦ ὅλου συστήματος (γ). Δίδεται ἐπίσης εἰς τὸν αὐτὸν τόπον ἐκκρεμὲς μαθηματικόν, περιόδου αἰωρήσεως T=1 sec.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος (λ) τοῦ ἐκκρεμοῦς, συναρτήσει τῶν δεδομένων τῆς μηχανῆς τοῦ Atwood.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$g = \frac{(2B + \beta)\gamma}{\beta}$$

εὑρίσκομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν g τοῦ τόπου, ἣν θέτοντες εἰς τὸν τύπον:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda}{g}}$$

ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\lambda \cdot \beta}{(2B + \beta)\gamma}}$$

ἥν, διὰ T=1, λύομεν ὡς πρὸς λ καὶ ἔχομεν:

$$\boxed{\lambda = \frac{(2B + \beta)\gamma}{4\pi^2\beta}}$$

196. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς πύργου ρίπτεται σῶμά τι πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0.

Μετὰ πάροδον χρόνου ϑ=12 sec ἀφίεται δεύτερον σῶμα ἐλεύθερον νὰ πέσῃ πρὸς τὰ κάτω, ὁπότε τὰ δύο σώματα συναντῶνται φθάνοντα ταυτοχρόνως εἰς τὸ ἔδαφος, μετὰ χρόνον t=14 sec ἀπὸ τῆς ἐκσφενδονήσεως τοῦ πρώτου.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου h καὶ ποία ἡ ἀρχικὴ ταχύτης v_0.

Λύσις: Τὰ σώματα θὰ διαγράψουν διαστήματα ὁμαλῶς μεταβαλλομένης κινήσεως καὶ δή, τὸ μέν πρῶτον συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν:

$$h = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

(καθ' ὅσον τὸ h εἶναι ἀντίρροπον ὡς πρὸς τὸ v_0) τὸ δὲ δεύτερον συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν:

$$h = \frac{1}{2} g (t - \vartheta)^2 \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (2) ἔχομεν τότε

$$h = \frac{9{,}8}{2}(14 - 12)^2$$

$$\boxed{h = 19{,}6 \text{ m}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ h καὶ τῆς (1) εὑρίσκομεν:

$$v_0 = \frac{1}{2}gt - \frac{h}{t}$$

$$v_0 = \frac{1}{2}9,8.14 - \frac{19,6}{14}$$

$$\boxed{v_0 = 67,2 \text{ m/sec}}$$

197. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως $\varphi = 30^\circ$ ὠθεῖται ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω σῶμά τι, παρουσιάζον συντελεστὴν τριβῆς μὲ τὸ ἐπίπεδον $n = \sqrt{3}\,.\,10^{-2}$.

Ζητεῖται: Μὲ ποίαν ἀρχικὴν ταχύτητα (v_0) πρέπει νὰ ἐκκινήσει τὸ σῶμα ὥστε νὰ διανύσῃ ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου διάστημα S=10,3 m (g=10 m/sec²).

Λύσις: Αἱ εἰς τὸ ἀνερχόμενον σῶμα προσδίδουσαι ἐπιβράδυνσιν δυνάμεως εἶναι:

I. Ἡ συνιστῶμα (B′) τοῦ βάρους B τοῦ σώματος:

$$B' = B\eta\mu\varphi \qquad (1)$$

II. Ἡ τριβὴ F, συνδεδεμένη μὲ τὴν κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον συνιστῶσαν (P) τοῦ βάρους διὰ τῆς σχέσεως:

$$F = Pn$$

ἤτοι, ἐφ' ὅσον εἶναι

$$P = B\sigma\upsilon\nu\varphi$$

διὰ τῆς σχέσεως:

$$F = Bn.\sigma\upsilon\nu\varphi \qquad (2)$$

ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκεται ἡ συνισταμένη δύναμις (Σ) ἡ προσδίδουσα τὴν ἐπιβράδυνσιν γ:

$$\Sigma = B\eta\mu\varphi + Bn.\sigma\upsilon\nu\varphi$$

ἐξ ἧς ἡ γ:

$$\gamma = g\eta\mu\varphi + gn.\sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\gamma = g(\eta\mu\varphi + n.\sigma\upsilon\nu\varphi) \qquad (3)$$

Μὲ γνωστὴν τὴν ἐπιβράδυνσιν ταύτην εὑρίσκομεν τότε τὴν ἀρχικὴν ταχύτητα (v_0) τὴν ἀπαιτουμένην διὰ τὸ μέγιστον διάστημα S, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον:

$$v_0 = \sqrt{2\gamma S}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅστις γίνεται, ὡς ἐκ τῆς (3):

$$v_0 = \sqrt{2Sg(\eta\mu\varphi + n.\sigma\upsilon\nu\varphi)}$$

$$v_0 = \sqrt{2.10{,}3.10\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,\sqrt{3}}{2.100}\right)}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2.10{,}3.10.103}{200}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{103^2}{100}}$$

$$\boxed{v_0 = 10{,}3 \text{ m/sec}}$$

198. Εἰς τὰ ἄκρα ράβδου ὁριζοντίως περιστρεφομένης, ἄνευ τριβῆς, εὑρίσκονται συνδεδεμέναι δύο μᾶζαι ὅμοιαι m εἰς ἀπόστασιν R_1=120 cm ἀπὸ τοῦ κέντρου, τὸ δὲ ὅλον σύστημα περιστρέφεται μὲ γωνιώδη ταχύτητα σταθερὰν ω_1=3,1 sec^{-1}.

Ζητεῖται: Πόση θὰ γίνῃ ἡ γωνιώδης ταχύτης (ω_2) ἂν αἱ μᾶζαι πλησιάσουν εἰς ἀπόστασιν R_2=40 cm.

Λύσις: Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ ροπὴ ἀδρανείας (K_1) τοῦ ὅλου συστήματος εἶναι:

$$K_1 = 2mR_1^2$$

εἰς δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν αὕτη γίνεται

$$K_2 = 2mR_2^2$$

Ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τὴν εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἀντιστοιχοῦσαν κινητικὴν ἐνέργειαν τοῦ συστήματος βάσει τοῦ τύπου

$$W = \frac{1}{2} K\omega^2$$

ὁπότε ἔχομεν:

$$W_1 = mR_1^2\omega_1^2$$

καὶ

$$W_2 = mR_2^2\omega_2^2$$

ἐπειδὴ ὅμως εἶναι:

$$W_1 = W_2$$

ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν:

$$R_1^2\omega_1^2 = R_2^2\omega_2^2$$

$$R_1\omega_1 = R_2\omega_2$$

καὶ

$$\omega_2 = \frac{R_1\omega_1}{R_2}$$

$$\boxed{\omega_2 = 9{,}3 \text{ sec}^{-1}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

199. Δύο ζεύγη ἀντίρροπα ῥοπῆς ἀντιστοίχως $P_1 = 16{,}5$ Kg*m καὶ $P_2 = -7{,}5$ Kg*m ἐνεργοῦν ἐπὶ σώματος τινὸς προσδίδοντα εἰς τοῦτο περιστροφὴν περὶ ἄξονα, κάθετον πρὸς τὰ ἐπίπεδά των καὶ κατακόρυφον, μὲ γωνιώδη ἐπιτάχυνσιν $\omega' = 29{,}43\ \sec^{-2}$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας τοῦ σώματος (K).

Λύσις: Ἡ συνολικὴ ῥοπὴ τῶν ζευγῶν εἶναι

$$P = P_1 + P_2$$

ὁπότε συμφώνως πρὸς τὸν τύπον

$$\frac{P}{K} = \omega'$$

$$K = \frac{P}{\omega'}$$

$$K = \frac{P_1 + P_2}{\omega'}$$

ἔχομεν

$$K = \frac{9}{29{,}43}\ \mathrm{Kg^*.m.sec^2}$$

$$K = \frac{9.981}{29{,}43.10^2}\ \mathrm{Kg.m^2}$$

$$\boxed{K = 3\ \mathrm{Kg.m^2}}$$

200. Εἰς τὸ σῶμα τῆς αὐτῆς ὡς ἄνω ἀσκήσεως τὰ ζεύγη ἐνεργοῦν ἐπὶ χρόνον t=10 sec.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι τότε ἡ κινητικὴ ἐνέργεια (W) τοῦ συστήματος.

Λύσις: Εἰς τὸν τύπον :

$$W = \frac{1}{2} K\omega^2$$

θέτομεν

$$\omega = \omega'.t$$

ὁπότε εὑρίσκομεν

$$W = \frac{1}{2} K.\omega'^2.t^2$$

$$W = \frac{1}{2} 3.29{,}43^2.10^2\ \frac{\mathrm{Kg.m^2.sec^2}}{\mathrm{sec^4}}$$

$$W = \frac{3.29{,}43^2.10^4}{2.981}\ \mathrm{Kg^*.m}$$

$$\boxed{W = 13243{,}5\ \mathrm{Kg^*.m}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

201. Σῶμά τι, ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας, ὑφίσταται ἐπὶ χρόνον τινα $t=5$ sec τὴν ἐπίδρασιν ἐπιταχύνσεως γ, ἥτις παύει νὰ ἐνεργῇ ἐπ' αὐτοῦ μετὰ τὸ τέλος τοῦ 5ου sec, ὁπότε τὸ σῶμα εἰς τὰ ἑπόμενα 18 sec διανύει διάστημά τι $S_2=450$ m.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις (γ) καὶ ποῖον τὸ κατὰ πρῶτα 5 sec διανυθὲν διάστημα (S_1).

Λύσις: $\gamma=5$ m/sec², $S_1=62{,}5$ m.

202. Ράβδος ἐλαστικὴ AB κινεῖται οὕτως ὥστε τὰ δύο ἄκρα αὐτῆς νὰ διαγράφουν εὐθείας παραλλήλους, μὲ ταχύτητας ἀντιστοίχους v_α καὶ v_β.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ εἰς χρόνον t ταχύτης (v) τοῦ ἑκάστοτε μέσου τῆς AB.

Λύσις: $v=\frac{1}{2}(v_\alpha+v_\beta)\,t$

203. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου σταθεροῦ μήκους κυλίεται σῶμά τι.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία κλίσεώς του (φ) ὥστε ὁ χρόνος (t), ὃν ἀπαιτεῖ τὸ σῶμα διὰ νὰ μεταβῇ ἐκ τῆς μιᾶς εἰς τὴν ἄλλην ἄκρην τοῦ ἐπιπέδου, γίνῃ ἐλάχιστος.

Λύσις: $\varphi=\frac{\pi}{8}$.

204. Δίδεται ἡ εἴς τινα τόπον ἀκτὶς τῆς γῆς R καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος (g) εἰς ὕψος τι h ἀπὸ τοῦ ἐδάφους.

Λύσις: $g=\frac{gR^2}{(R+h)^2}$.

205. Ἔκ τινος σημείου ἀφίεται νὰ πέσῃ σῶμά τι ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος. Μετὰ πάροδον χρόνου $t=3{,}2$ sec, ἀφίεται ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἄλλο βαρὺ σῶμα.

Ζητεῖται: Πότε (θ), ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως τοῦ πρώτου, ἡ ἀπόστασις τῶν δύο κινητῶν θὰ εἶναι $h=156{,}8$ m ($g=9{,}8$ m/sec²).

Λύσις: $\vartheta=6{,}6$ sec.

206. Δίδεται ὑλικὸν στερεὸν τρίγωνον ΑΒΓ.

Ζητεῖται: Ποῖαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ σχέσεις τριῶν δυνάμεως (F_1, F_2, F_3), αἵτινες πρέπει νὰ ἐφαρμοσθοῦν ἐπὶ σημείων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοῦ τριγώνου, κείμεναι εἰς τὸ ἐπίπεδον τούτου ὥστε νὰ ἰσορροποῦν ἔχουσαι τὰς διευθύνσεις :

I. Τῶν διαμέσων.

II. Τῶν ὑψῶν.

III. Τῶν διχοτόμων τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν.

Λύσις: I. $\frac{F_1}{\delta_1} = \frac{F_2}{\delta_2} = \frac{F_3}{\delta_3}$ (ὅπου δ_1, δ_2 καὶ δ_3 αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν ἀπὸ τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαμέσων).

II. $\frac{F_1}{\eta\mu A} = \frac{F_2}{\eta\mu B} = \frac{F_3}{\eta\mu \Gamma}$

III. $\frac{F_1}{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}} = \frac{F_2}{\sigma\upsilon\nu \frac{B}{2}} = \frac{F_3}{\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}}$.

207. Δύο κινητά, α καὶ β, κινοῦνται ἐπὶ εὐθειῶν παραλλήλων κατ᾽ ἀντίθετον φοράν, τὸ μὲν ἓν μὲ ἐπιτάχυνσιν γνωστὴν γ_α τὸ δ᾽ ἕτερον μὲ ἄγνωστον ἐπιτάχυνσιν (γ_β).

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις αὕτη (γ_β) ὥστε ἡ εἰς ἑκάστην στιγμὴν ἑνοῦσα τὰ α καὶ β εὐθεῖα νὰ διέρχεται δι᾽ ἑνὸς πάντοτε σημείου (Σ) ἀπέχοντος ἀπὸ μὲν τῆς τροχιᾶς τοῦ α κατὰ l_α ἀπὸ δὲ τῆς τοῦ β κατὰ l_β.

Λύσις: $\gamma_\beta = \gamma_\alpha \frac{l_\beta}{l_\alpha}$.

208. Σῶμα, κινούμενον ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου, χρειάζεται, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ἔδαφος, διπλάσιον χρόνον ἐκείνου, ὃν θὰ ἐχρειάζετο ἐὰν ἀφίετο ἐλεύθερον ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὕψους.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ κλίσις τοῦ ἐπιπέδου.

Λύσις: $\varphi = 30^\circ$.

209. Δίδεται μὲ ἀκρίβειαν ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος $g = 981$ cm/sec^2, ἡ περίμετρος τῆς γῆς $\Pi = 40000$ Km, ὡς καὶ ἡ πυκνότης της $d = 5{,}5$ gr/cm^3.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ σταθερὰ k τῆς παγκοσμίας ἕλξεως.

Λύσις: $k \simeq 67.10^{-9}$ cm^3/gr.sec^2.

210. Δίδεται ὁμογενὲς σῶμα, ἀμελητέου πάχους καὶ ἡμικυκλικοῦ σχήματος.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ ἀντιστοιχοῦντος κύκλου ἀπόστασις (d) τοῦ κέντρου βάρους.

Λύσις: $d = \frac{4R}{3\pi}$ (ὅπου R ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

211. Δύο σώματα ρίπτονται ἀλληλοδιαδόχως πρὸς τὰ ἄνω τὸ μὲν ἓν μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=60$ m/sec τὸ δ' ἕτερον μὲ ταχύτητα v_0', μετὰ χρόνον $\vartheta=2$ sec.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης v_0' ὥστε τὰ δύο σώματα νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος h μετὰ πάροδον χρόνου $t=4$ sec ἀπὸ τῆς ἐκσφενδονήσεως τοῦ πρώτου ($g=9,8$ m/sec²).

Λύσις: $v_0'=90,6$ m/sec.

212. Εἰς τὴν αὐτήν, ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, κίνησιν δίδονται τὰ αὐτὰ στοιχεῖα, πλὴν τῆς ταχύτητος v_0'.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς συναντήσεως ταχύτητες τῶν δύο κινητῶν (v καὶ v′).

Λύσις: $v=20,8$ m/sec, $v'=71$ m/sec.

213. Ἡ παγκοσμία σταθερὰ τοῦ Newton λαμβάνεται ἔχουσα, εἰς τὸ σύστημα C.G.S., τιμὴν $k=67.10^{-9}$ $gr^{-1}.cm^3.sec^{-2}$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς ταύτης εἰς τὸ μετρικὸν σύστημα, ἔχον θεμελιώδεις μονάδας τάς: Kg*, m, sec.

Λύσις: $k=6,57.10^{-10}$ m^4/Kg^*sec^4.

214. Σῶμα μάζης $m=70$ gr κινεῖται εὐθυγράμμως μὲ σταθερὰν ταχύτητα $v_0=11$ cm/sec, ὅτε ἐνεργεῖ ἐπ' αὐτοῦ δύναμις $F=1400$ dynes ὑπὸ γωνίαν $\varphi=30^0$ μὲ τὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ σώματος.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἐνεργείας τῆς δυνάμεως κεντρομόλος ἐπιτάχυνσις (γ_κ) τοῦ κινητοῦ, ποία ἡ ἐπιτρόχιος ἐπιτάχυνσίς του (γ_ε) καὶ ποία ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος (R) κατὰ τὴν αὐτὴν στιγμήν.

Λύσις: $\gamma_\kappa=10$ cm/sec², $\gamma_\varepsilon=10\sqrt{3}$ cm/sec², $R=12,1$ cm.

215. Σιδηροδρομικὸς συρμός, συνολικῆς μάζης $M=216$ Tonn, ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς ἠρεμίας, ὁριζοντίως κινούμενος, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς δυνάμεως (F) διευθύνσεως καὶ φορᾶς συμπιπτουσῶν πρὸς τὰς τῆς κινήσεως.

Ζητεῖται: Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ δύναμις αὕτη (F) ἵνα ὁ συρμὸς ἀποκτήσῃ ταχύτητα $v=98,1$ Km/h μετὰ πάροδον χρόνου $t=10$ min.

Λύσις: $F=1$ Tonn*.

216. Μηχανῆς τοῦ Atwood ἕκαστον ἐκ τῶν μεγάλων βαρῶν ἔχει μᾶζαν $M=200$ gr. Κατὰ τὴν προσθήκην μικροῦ προσθέτου βάρους (β) τὸ σύστημα ἐπιταχυνόμενον διανύει διάστημα $S=2$ m ἐντὸς τῶν πρώτων 5 sec, ὑπὸ $g=981$ cm/sec².

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ προσθέτου βάρους β.

Λύσις: $\beta=6,63$ gr*.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

217. Δύο σώματα ἀφίενται ἔκ τινος σημείου νὰ πέσουν ἀλληλοδιαδόχως ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος, οὕτως ὥστε τὸ δεύτερον νὰ ἐκκινήσῃ 3 sec μετὰ τὴν ἀναχώρησιν τοῦ πρώτου.

Ζητεῖται: Μετὰ πόσον χρόνον (t) ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου θὰ ἀπέχουν τὰ δύο κινητὰ κατὰ h=200 m, ὡς καὶ ποῖα θὰ εἶναι τὰ ἀντίστοιχα ὑπ᾽ αὐτῶν διανυθέντα διαστήματα (S_1 καὶ S_2).

Λύσις: t=8,3 sec, S_1=337,64 m, S_2=137,64 m.

118. Σῶμά τι πίπτον ἐλευθέρως ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος διανύει, κατὰ τὸ τελευταῖον sec τῆς πτώσεώς του, τὸ $^1/_{10}$ τοῦ ὅλου ὕψους του.

Ζητεῖται: Πόσος εἶναι ὁ συνολικὸς χρόνος τῆς πτώσεως (t) καὶ ποῖον τὸ ὕψος (h) ἀπὸ τοῦ ὁποίου ἀφίεται τὸ σῶμα.

Λύσις: t=19,49 sec, h=1863,21 m.

219. Σῶμά τι ἀφιεται νὰ πέσῃ ἔκ τινος σημείου ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς βαρύτητος, ὁπότε διανύει διάστημα S=118,6 m εἰς τὰ δύο τελευταῖα δευτερόλεπτα τῆς κινήσεώς του, φτάνον εἰς τὸ ἔδαφος.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ἀρχικὸν ὕψος (h) καὶ ποῖα ἡ ταχύτης (v) κατὰ τὸ πέρας τῆς πτώσεως.

Λύσις: h=243,79 m, v=69,16 m/sec.

220. Δίδονται δύο δυνάμεις ἐντάσεως, ἀντιστοίχως,

$$F_1 = \sqrt{3}\ \text{Kg}^* \text{ καὶ } F_2 = \sqrt{2}\ \text{Kg}^*$$

ἔχουσαι συνισταμένην F=1 Kg* καὶ ἐνεργοῦσαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν διευθύνσεων τῶν δύο τούτων δυνάμεων σχηματιζομένη γωνία (φ).

Λύσις: $\varphi \simeq 142^\circ 44' 6''$.

221. Τρεῖς δυνάμεις F_1, F_2, F_3, ἐνεργοῦσαι ἐπὶ ὑλικοῦ τινος τριγώνου, ἔχουν ἐντάσεις ἀναλόγους πρὸς τὰ μήκη τῶν διαμέσων του, διευθύνσεις τῶν διαμέσων καὶ φορὰς ἐκ τῶν κορυφῶν πρὸς τὰς ἔναντι πλευράς.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μεταξὺ τούτων συνισταμένη (F).

Λύσις: F=0.

222. Τρεῖς δυνάμεις, F_α, F_β καὶ F_γ, ἔχουσαι ἄθροισμα ἀριθμητικὸν S=100 Kg* ἐνεργουν ἐπὶ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ὑψῶν τριγώνου τινός, μὲ διευθύνσεις τὰς τῶν ὑψῶν καὶ φορὰς ἐκ τῶν κορυφῶν πρὸς τὰς πλευρὰς (α, β, γ).

Ζητεῖται: Ποῖαι εἶναι αἱ ἐντάσεις τῶν δυνάμεων (F_α,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

F_β καὶ F_γ) ἂν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ἔχουν μῆκος, ἀντιστοίχως $\alpha=7$ m, $\beta=10$ m, $\gamma=8$ m.

Λύσις: $F_\alpha = 28$ Kg*, $F_\beta = 40$ Kg*, $F_\gamma = 32$ Kg*.

223. Ἔκ τινος σημείου (Α) ρίπτεται βλῆμα μὲ κλίσιν, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον, $\varphi = 60^0$ καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=620$ Km/h. Ταυτοχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου (Α) ἀναχωρεῖ κινητὸν μὲ σταθερὰν ταχύτητα (v), ὁριζοντίως καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ βλήματος.

Ζητεῖται: Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ (v) ὥστε τοῦτο νὰ βληθῇ ὑπὸ τοῦ βλήματος κατὰ τὴν πτῶσίν του εἰς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

Λύσις: $v=310$ Km/h.

224. Σῶμά τι πίπτον ἐλευθέρως ἐξ ὑψηλοῦ πύργου διανύει τὸ διάστημα τοῦ εἰσογείου, ὕψους $S=4{,}9$ m, ἐντὸς χρόνου $t=0{,}1$ sec.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου (h), δεδομένης τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος $g=9{,}8$ m/sec^2.

Λύσις: $h=124{,}96$ m.

225. Βαρὺς μεταλλικὸς τροχός, περιστρεφόμενος περὶ ὁριζόντιον ἄξονα, κινεῖται μὲ γωνιώδη ταχύτητα σταθερὰν $\omega=6$ sec^{-1}.

Ζητεῖται: Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ροπὴ (P) ζεύγους ὅπερ πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἵνα ὁ τροχὸς ἠρεμήσῃ ἐντὸς χρόνου $t=1$ sec, ἂν ἡ ροπὴ ἀδρανείας τούτου εἶναι $K=4{,}905$ Kg.m^2.

Λύσις: $P=3$ Kg*m.

226. Ἐπὶ τῆς κεφαλῆς σφηνός, γωνίας ἀνοίγματος $\varphi=60^0$, πίπτει βάρος $B=0{,}369$ Kg* ἐξ ὕψους τινος, ἀπὸ ταύτης, $h=1{,}60$ m, ὁπότε ὁ σφὴν βυθίζεται ἐντὸς ξύλου κατὰ διάστημά τι $S=4$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀντίστασις (F) τοῦ ξύλου ἐπὶ ἑκάστης πλευρᾶς τοῦ σφηνός, μὴ ὑπολογιζομένης τῆς μετατροπῆς τῆς κινητικῆς ἐνεργείας εἰς ἄλλην μορφὴν πλὴν τῆς μηχανικῆς.

Λύσις: $F=14{,}76$ Kg*.

227. Ἔκ τινος σημείου (Σ) κειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τυχόντος τριγώνου ΑΒΓ ἄγονται τρεῖς δυνάμεις F_1, F_2 καὶ F_3 ἀνάλογοι πρὸς τὰ διανύσματα $\overline{\Sigma A}$, $\overline{\Sigma B}$ καὶ $\overline{\Sigma \Gamma}$ καὶ παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι πρὸς ταῦτα.

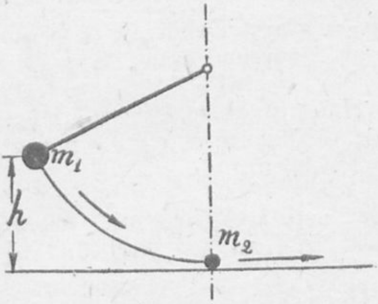
Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ συνισταμένη (F) τῶν δυνάμεων τούτων καὶ ποία ἡ διεύθυνσίς της.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: $F=3\,(\overline{\Sigma K})$ ὅπου Κ τὸ σημεῖον τομῆς, τῶν διαμέσων. Φορὰ τῆς F ἡ τοῦ διανύσματος $\overline{\Sigma K}$.

228. Μεταλλικὴ σφαῖρα, μάζης $m_1=12$ gr ἐξαρτᾶται διὰ νήματος ἐκκρεμοῦς καὶ ἀπομακρύνεται τῆς θέσεως τῆς ἰσορροπίας της, οὕτως ὥστε νὰ ἀπέχῃ κατὰ ὕψος $h=5$ m ἀπὸ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς κατωτάτης δυνατῆς θέσεώς της. Ἀκολούθως ἀφίεται ἡ σφαῖρα ἐκ τῆς θέσεώς της ταύτης καί, φθάνουσα εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας (ἴδ. σχ. 33) συγκρούεται μὲ ἄλλην ἠρεμοῦσαν σφαῖραν μάζης $m_2=6$ gr, ἥτις μετὰ τὴν κροῦσιν ἀρχίζει νὰ κινῆται ὁριζοντίως.

Ζητεῖται: Ποῖαι θὰ εἶναι μετὰ τὴν κροῦσιν αἱ ταχύτητες



Σχ. 33

τῶν δύο σφαιρῶν (v_1 καὶ v_2), ἐὰν ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἔχει τιμὴν $g=10$ m/sec^2.

Λύσις: $v_1=3{,}33$ m/sec, $v_2=13{,}34$ m/sec.

229. Ἐκκρεμές, πίπτον ἐξ ὕψους τινος $h=29{,}24$ cm καὶ φθάνον εἰς τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας του χάνει τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ταχύτητός του.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον ὕψος (h′) θὰ φθάσῃ, ἀφοῦ ὑπερβῇ τὴν θέσιν τῆς ἰσορροπίας.

Λύσις: $h'=7{,}31$ cm.

230. Μαθηματικὸν ἐκκρεμές, μήκους $\lambda=36{,}8$ cm, ἀποτελούμενον ἐκ λεπτοῦ νήματος εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ὁποίου ἐξαρτᾶται μικρὰ μᾶζα, ἀφίεται ἔκ τινος θέσεως σχηματιζούσης γωνίαν μὲ τὴν κατακόρυφον $\varphi=60^\circ$.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν (y) ἀπὸ τοῦ σημείου αἰωρήσεως καὶ ἐπὶ τῆς δι᾽ αὐτοῦ διερχομένης κατακορύφου πρέπει

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

νὰ τεθῇ ἧλος κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον αἰωρήσεως, ὥστε τὸ κάτωθι τοῦ ἥλου νῆμα τοῦ ἐκκρεμοῦς νὰ φθάνῃ, μετὰ τὴν διέλευσίν του διὰ τῆς κατακορύφου, μέχρις ὁριζοντίας ἀκριβῶς θέσεως.

Λύσις: y=18,4 cm.

231. Σιδηροδρομικῆς ἁτμαμάξης οἱ πρόσθιοι τροχοὶ ἔχουν βάρος β=108 Kg* καὶ ἀκτῖνα r=0,90 m, οἱ δὲ κινητήριοι τροχοὶ βάρος B=162 Kg* καὶ ἀκτῖνα R=1,44 m. Κατά τινα στιγμὴν τῆς κινήσεως τῆς ἁμάξης ἐφαρμόζεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν μεγάλων τροχῶν ζεῦγος δυνάμεων, τιμῆς ἑκάστης δυνάμεως F=12 Kg*, ἀντιτιθεμένων εἰς τὴν κίνησιν.

Ζητεῖται: Ποίων δυνάμεων (f) ζεῦγος πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν μικρῶν τροχῶν, ὥστε ὅλοι οἱ τροχοὶ νὰ ἠρεμήσουν ταυτοχρόνως, μὲ ἐμφάνισιν τῆς αὐτῆς ῥοπῆς τριβῆς, ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ ἄξονες τῶν τροχῶν ἔχουν τὴν αὐτὴν διάμετρον.

Λύσις: f=5 Kg*.

232. Σῶμα μάζης m=109 gr περιστρέφεται, ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου, μὲ σταθερὰν γωνιώδη ἐπιτάχυνσιν ω΄=1,4 sec^{-2} ἐπὶ περιφερείας κύκλου ἀκτῖνος R=90 cm, ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ φυγόκεντρος δύναμίς του (F) μετὰ χρόνον t=10 sec ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως.

Λύσις: F=1,96 Kg*.

233. Σῶμά τι ὠθεῖται ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου μὲ ὁριζοντίαν εὐθύγραμμον κίνησιν καὶ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0=400 cm/sec, μὲ συντελεστὴν τριβῆς μεταξὺ σώματος καὶ ἐπιπέδου η=0,1.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν (S) ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως πρέπει νὰ τεθῇ καθέτως πρὸς τὴν τροχιὰν τοῦ σώματος, κώλυμα τοιοῦτον ὥστε, συγκρουόμενον ἐπ' αὐτοῦ τὸ σῶμα, κατὰ τελείως ἐλαστικὸν τρόπον, νὰ ἀνακλασθῇ καὶ νὰ ἠρεμήσῃ ἀκριβῶς εἰς τὸ σημεῖον ἐκ τοῦ ὁποίου ἐξεκίνησε (g=9,8 m/sec^2).

Λύσις: S=4,082 m.

234. Ἐπὶ τῆς τραπέζης σφαιριστηρίου βάλλεται ἐκ τῆς μιᾶς ἄκρας σφαῖρα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0=9,81 m/sec καθέτως πρὸς τὴν ἄλλην πλευρὰν ἀπέχουσαν τῆς πρώτης κατὰ ἀπόστασιν h=2 m.

Ζητεῖται: Πόσας φορὰς (N) ἡ σφαῖρα θὰ διανύσῃ τὸ μῆκος τῆς τραπέζης καὶ ποῦ θὰ ἠρεμήσῃ ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ τραπέζης καὶ σφαίρας εἶναι n=0,981.

Λύσις: N=2,5 ὁπότε ἡ σφαῖρα θὰ ἠρεμήσῃ ἀκριβῶς εἰς τὸ μέσον τῆς τραπέζης.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

235. Εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν δίδεται ἐπὶ πλέον τῶν ἄλλων στοιχείων καὶ ἡ μᾶζα τῆ σφαίρας m=80 gr.

Ζητεῖται: Πόσον θὰ εἶναι τὸ ἀπαιτούμενον, διὰ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ ἄνω ἀποτελέσματος, ἔργον (W).

Λύσις: W=0,3924 Kg*m.

236. Σῶμά τι ἐκ σημείου τινὸς (A) ὁριζοντίου ἐπιπέδου ὠθεῖται μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0=9 m/sec, κυλιόμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μὲ συντελεστὴν τριβῆς n=0,1.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν (S) ἀπὸ τοῦ A πρέπει νὰ τεθῇ κώλυμα, ὥστε, συγκρουόμενον ἐπ' αὐτοῦ τὸ σῶμα νὰ χάσῃ τὸ $1/4$ τῆς ἐνεργείας του, ἣν κέκτηται κατὰ τὴν κροῦσιν, ἐπιστρέφον δὲ νὰ ἠρεμήσῃ εἰς ἀπόστασιν h=2,25 m πρὸ τοῦ σημείου ἐκκινήσεως A (g=10 m/sec²).

Λύσις: S=19 m.

237. Ἐπὶ κεκλιμένου ἐπιπέδου κλίσεως φ=45° ὠθεῖται σῶμα πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα v_0=19,62 m/sec ἔκ τινος σημείου A.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A θὰ φθάσῃ (S), καὶ ποίαν ταχύτητα θὰ ἔχῃ κατὰ τὴν ἐπιστροφήν του εἰς τὸ σημεῖον A, ἂν ἐπιστρέψῃ, ὑποτιθεμένου τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἀπεριορίστου καὶ δεδομένου τοῦ συντελεστοῦ τριβῆς μεταξὺ ἐπιπέδου καὶ σώματος n=1.

Λύσις: $S=9{,}81\sqrt{2}$ m, εἰς τὸ πέρας τοῦ ὁποίου τὸ σῶμα θὰ ἠρεμίσῃ μὴ ἐπιστρέφον πρὸς τὸ σημεῖον ἐκκινήσεως.

238. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα μονάδων λαμβάνονται, ὡς θεμελειώδεις, τὸ Joule διὰ τὸ ἔργον, τὸ Kg* διὰ τὴν δύναμιν καὶ ἡ ὥρα (h) διὰ τὸν χρόνον.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο τιμὴ τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος ἥτις εἶναι, διὰ τὸ σύστημα CGS, g=981 cm/sec².

Λύσις: $g=1247219856\,\dfrac{\text{Joule}}{\text{Kg}^*.\,\text{h}^2}$.

239. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα διαστάσεων λαμβάνονται ὡς θεμελειώδεις αἱ τοῦ ἔργου (W), τῆς ἰσχύος (J) καὶ τῆς ταχύτητος (V).

Ζητεῖται: Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο διαστάσεις τοῦ μέτρου ἐλαστικότητος τοῦ Joung-Hookes (E).

Λύσις: $[E]=W^{-2}J^{3}V^{-3}$.

240. Δίδεται ἐκκρεμὲς φυσικὸν μήκους, μεταξὺ τοῦ κέντρου

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βάρους καὶ τοῦ σημείου ἐξαρτήσεως, $\lambda=4$ m, μάζης συνολικῆς $m=100$ Kg καὶ περιόδου $T=3,14$ sec.

Ζητεῖται: Ποίαν γωνιώδη ἐπιτάχυνσιν (ω') θὰ λάβῃ τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο, ἐὰν ἐξαναγκασθῇ νὰ κινηθῇ ὑπὸ ῥοπῆς τινος συνολικῆς $P=71,6$ Kg*m.

Λύσις: $\omega'=0,716$ sec^{-2}.

241. Ἐντὸς μεγάλης κοίλης μεταλλικῆς σφαίρας τίθεται μικρὸν σφαιρίδιον δυνάμενον νὰ κινηθῇ ἐντὸς αὐτῆς, ἐν συνεχείᾳ δὲ περιστρέφεται ἡ μεγάλη σφαῖρα περὶ κατακόρυφον ἄξονα μὲ σταθερὰν περίοδον $T=6,28$ sec, ὁπότε τὸ σφαιρίδιον παρασυρόμενον κατὰ τὴν περιστροφήν, ἄνευ ὀλισθήσεως, ἰσορροπεῖ εἰς θέσιν τινα σχηματίζουσαν γωνίαν $\varphi=30^{0}$ μὲ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀκτὶς (R) τῆς κοίλης σφαίρας.

Λύσις: $R=19,62$ m.

242. Εἰς κεκλιμένον ἐπίπεδον, μήκους $S=5$ m καὶ ὕψους, ἀπὸ τῆς κατωτάτης θέσεώς του, $h=3$ m, κατέρχεται ἄνευ τριβῆς σφαῖρα βάρους $B_1=5$ Kg*, ἀναβιβάζουσα βάρος $B'=2$ Kg* μέσῳ τροχαλίας εὑρισκομένης εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ χρόνος (t) ὁ ἀπαιτούμενος ἵνα τὸ σῶμα B' διανύσῃ ἐκ τῶν κάτω τὸ διάστημα h.

Λύσις: $t=2,06$ sec.

243. Ἀλεξιπτωτιστὴς ῥίπτεται ἐξ ἀεροπλάνου ὁριζοντίως κινουμένου μὲ κλειστὸν τὸ ἀλεξίπτωτόν του, ἀνοίγει δὲ τοῦτο μετὰ πάροδον χρόνου $t=6$ sec ἀπὸ τῆς πτώσεώς του, ὁπότε ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς ἐπιβραδύνσεως ἡ ταχύτης του τῆς κατακορύφου πτώσεως γίνεται $v=9,81$ m/sec ἐντὸς χρόνου $\theta=2$ sec ἀφ' ἧς στιγμῆς ἀνοίγει τὸ ἀλεξίπτωτον.

Ζητεῖται: Μὲ ποίαν δύναμιν (F) ἕλκεται ὁ ἀλεξιπτωτιστὴς ἀπὸ τὰ συγκρατοῦντα αὐτὸν νήματα, ἂν τὸ βάρος του εἶναι $B=70$ Kg*.

Λύσις: $F=175$ Kg*.

244. Ὑπερπλανητικὸς πύραυλος κινεῖται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς γῆς ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνά της $R=6.000$ Km, περιστρεφόμενος περὶ τὸ κέντρον τῆς γῆς.

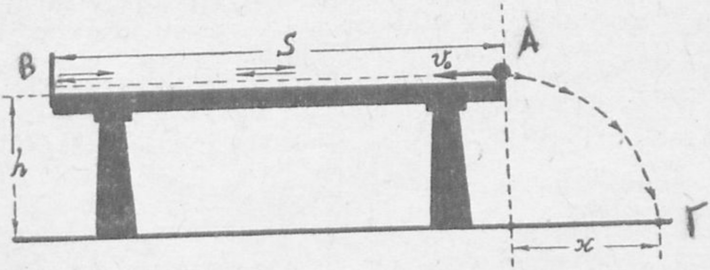
Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης του (v) ἵνα μὴ πίπτῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας καὶ μὴ ἀπομακρύνεται ταύτης ($g=10$ m/sec^2).

Λύσις: $v=5,47$ Km/sec.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

245. Ἐπὶ ὑψηλῆς λείας ὁριζοντίου τραπέζης, μήκους $S=2$ m καὶ ὕψους τῆς ἐπιφανείας της ἀπὸ τοῦ ἐδάφους $h=2{,}05$ m τίθεται μικρὰ σφαῖρα εἰς τὸ χεῖλος (Α) καὶ ὠθεῖται πρὸς τὸ ἄλλο (Β) μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=2{,}9$ m/sec (ἴδ. σχ. 34). Εἰς τὸ χεῖλος Β ὑπάρχει κάθετόν τι κώλυμα, εἰς ὃ συγκρούεται ἡ σφαῖρα, ἐπανέρχεται εἰς τὸ Α καὶ πίπτει τῆς τραπέζης εἰς σημεῖόν τι (Γ) ἀπὸ τοῦ ποδὸς τοῦ Α, εἰς ἀπόστασίν τινα x.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις αὕτη, ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ σφαίρας καὶ ἐπιπέδου τῆς τραπέζης εἶναι



Σχ. 34

$n=0{,}1$ ἡ δὲ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος ἔχῃ τιμὴν $g=10$ m/sec².

Λύσις: $x=0{,}41$ m.

246. Δίδονται τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

Ζητεῖται: Πόσον χρόνον (t) θὰ διαρκέσῃ ἡ πτῶσις ΑΓ.

Λύσις: $t=0{,}64$ sec.

247. Σῶμά τι (α) ρίπτεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_\alpha = 100$ m/sec, δεύτερον κινητὸν (β) ρίπτεται ὁμοίως πρὸς τὰ ἄνω ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου μετὰ χρόνον $t=8$ sec ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου, μὲ ἄγνωστον ἀρχικὴν ταχύτητα v_β.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ταχύτης αὕτη (v_β), ἵνα τὰ κινητὰ συναντηθοῦν μετὰ χρόνον $\theta=10$ sec ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεων τοῦ πρώτου ($g=10$ m/sec²).

Λύσις: $v_\beta = 260$ m/sec.

248. Δίδονται τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον ὕψος (h) ἀπὸ τοῦ σημείου ἐκσφενδονήσεως νὰ συναντηθοῦν τὰ κινητά.

Λύσις: $h=500$ m.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

249. Ἀπὸ τοῦ χείλους ὑψηλοῦ πύργου ρίπτεται πρὸς τὰ ἄνω κατακορύφως βαρύ τι σῶμα μὲ ἀρχικὴν ταχύτητα $v_0=22,73$ m/sec, ὁπότε τοῦτο, κατὰ τὴν ἐπιστροφήν του, διέρχεται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ φθάνει εἰς τὸ ἔδαφος μετὰ χρόνον $t=6$ sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς ἐκσφενδονήσεως.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος (h) τοῦ πύργου.

Λύσις: $h=40$ m.

250. Ἐλαστικὴ σφαῖρα πίπτει, ἄνευ ἀρχικῆς ταχύτητος, ἐξ ὕψους τινος (h) ἐπὶ ἐπιπέδου ὁριζοντίου, χάνουσα κατὰ τὴν κροῦσιν τὰ $^2/_3$ τῆς ἐνεργείας της (ἅτινα μετατρέπονται εἰς θερμότητα).

Ζητεῖται: Ἐκ ποίου ὕψους (h) πρέπει ν' ἀφεθῇ ἀρχικῶς ἡ σφαῖρα, ὥστε μετὰ τὴν τετάρτην κροῦσίν της ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου νὰ ἀνέλθῃ εἰς ὕψος $h'=5$ cm.

Λύσις: $h=4,05$ m.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

II. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

251. Ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου ὁ λεπτὸς σωλὴν ἔχει τομὴν ἐπιφανείας $s_1=110$ cm², ὁ δὲ πλατὺς τομὴν $s_2=0{,}18$ m².

Ζητεῖται: Ἂν καθέτως πρὸς τὴν s_1 ἐφαρμοσθῇ δύναμις $F_1=13{,}20$ Kg*, ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως (F_2) τῆς ἐμφανιζομένης εἰς τὴν ἐπιφάνειαν s_2.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου

$$\frac{F_1}{s_1}=\frac{F_2}{s_2}$$

ἔχομεν:

$$F_2=\frac{F_1 s_2}{s_1}$$

$$F_2=\frac{13{,}2 . 0{,}18}{110}\ \frac{Kg^* m^2}{cm^2}$$

$$F_2=\frac{13{,}2 . 0{,}18 . 10^4}{110}\ \frac{Kg^* . cm^2}{cm^2}$$

$$\boxed{F_2=216\ Kg^*}$$

252. Ἐπὶ τῆς τομῆς $s=5$ cm² λεπτοῦ σωλῆνος ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου ἐφαρμόζεται ἄγνωστος δύναμις (F), ἥτις, μετατοπίζουσα τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὑγροῦ κατὰ μῆκός τι $h=0{,}3$ m παράγει ἔργον $W=10{,}65$ Kg*m.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἕνεκα τῆς F ἐμφανιζομένη πίεσις (P) ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας s.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ συνδέοντος τὸ ἔργον (W) μὲ τὴν προκαλοῦσαν τοῦτο δύναμιν (F)

$$W=F . h$$

εὑρίσκομεν τὴν δύναμιν (F) συναρτήσει τῆς μετατοπίσεως (h) καὶ τοῦ ἔργου:

$$F=\frac{W}{h}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐν συνεχείᾳ δέ, ἐκ ταύτης καὶ τῆς ἐπιφανείας (s), τὴν πίεσιν:

$$P = \frac{F}{s}$$

ἤτοι:

$$P = \frac{W}{hs}$$

$$P = \frac{10,65}{0,3.5}\ \frac{Kg^*.\cancel{m}}{\cancel{m}.cm^2}$$

$$\boxed{P = 7,1\ Kg^*/cm^2}$$

253. Ἐμβολεὺς ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου πιέζων τὸ ὑγρὸν ἐντὸς λεπτοῦ κυλινδρικοῦ σωλῆνος χρειάζεται (διὰ νὰ μετατοπίσῃ ὄγκον ὑγροῦ V=2,1 lit) ἔργον W=206,01 Joules.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πίεσις (P) ἣν ἀσκεῖ ὁ ἐμβολεὺς ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Λύσις: Ἔστω s ἡ ἐπιφάνεια τομῆς τοῦ σωλῆνος. Ὁ ἐκτοπιζόμενος ὄγκος ὑγροῦ V θὰ εἶναι τότε:

$$V = sh \qquad (1)$$

ἂν h εἶναι ἡ μετατόπισις τοῦ ἐμβολέως καθέτως πρὸς τὴν ἐπιφάνειάν του. Ἐκ παραλλήλου, συναρτήσει πάλιν τοῦ h, τὸ ἔργον (W) θὰ εἶναι:

$$W = Fh \qquad (2)$$

ὅπου F ἡ προκαλοῦσα τὴν πίεσιν (P) δύναμις, ἥτις πίεσις θὰ εἶναι τότε:

$$P = \frac{F}{s}$$

ἤτοι (ἐκ τῶν (1) καὶ (2)):

$$P = \frac{Wh}{hV}$$

$$P = \frac{W}{V}$$

ὁπότε, ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν W καὶ V καὶ διορθοῦντες καταλλήλως τὰς μονάδας, προκύπτει:

$$P = \frac{206,01}{2,1}\ \frac{Joules}{lit}$$

$$P = \frac{206,01.10}{2,1.981}\ \frac{Kg^*.cm}{cm^3}$$

$$\boxed{P = 1\ Kg^*/cm^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

254. Βάρος τι $B=7,4$ Kg* πίπτει ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου, κλειομένης ὑπὸ ἀβαροῦς ἐμβολέως, ἐξ ὕψους τινος $h=2,7$ m ὁπότε μετατοπίζεται ὄγκος ὑγροῦ $V=9$ cm³, μεταδιδομένης ὅλης τῆς ἐνεργείας τοῦ βάρους εἰς τὸ ὑγρόν.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ βάρους B ἀσκουμένη ἐπὶ τοῦ ἐμβολέως μέση πίεσις (P) κατὰ τὴν μετατόπισιν ταύτην.

Λύσις: Ἡ ὑπὸ τοῦ B μεταφερομένη ἐνέργεια εἰς τὸ ὑγρόν, κατὰ τὴν κροῦσιν, θὰ εἶναι προφανῶς:

$$W = Bh$$

ὁπότε, ἐκ τοῦ τύπου

$$W = P.V$$

τοῦ συνδέοντος τὸ ἔργον μὲ τὴν πίεσιν καὶ τὴν μεταβολὴν τοῦ ὄγκου, εὑρίσκομεν:

$$Bh = PV$$

καὶ ἐκ τούτου

$$P = \frac{Bh}{V}$$

$$P = \frac{7,4.2,7}{9} \frac{Kg^*.m}{cm^3}$$

$$P = \frac{7,4.2,7.100}{9} \frac{Kg^*.cm}{cm^3}$$

$$\boxed{P = 222\ Kg^*/cm^2}$$

255. Ἡ τομὴ ἑνὸς τῶν σωλήνων ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου εἶναι $s_1=6$ cm², ὁπότε ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας s_2 τοῦ ἄλλου σωλῆνος ἐμφανίζεται πίεσις $P_2=0,4$ Kg*/cm² ὅταν ἐπὶ τῆς s_1 ἐφαρμόζεται δύναμις $F_1=3,6$ Kg*.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν μηχανικὴ ἀπόδοσις πιέσεως.

Λύσις: Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς δυνάμεως F_1 ἀσκεῖται ἐπὶ τῆς s_1 πίεσις:

$$P_1 = \frac{F_1}{s_1}$$

ὁπότε ἡ μεταξὺ P_2 καὶ P_1 ἀναλογία, ἐκφράζουσα τὴν ἀπόδοσιν πιέσεως, εἶναι:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}$$

$$\eta = \frac{P_2 s_1}{F_1}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\eta = \frac{0{,}4.6}{3{,}6}\ \frac{Kg^*.\,cm^2}{cm^2.\,Kg^*}$$

$$\eta = \frac{4}{6}$$

$$\boxed{\eta = 66{,}6\ \%}$$

256. Ἐντὸς δοχείου τίθεται οἰνόπνευμα εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon = 0{,}78\ gr^*/cm^3$, μέχρις ὕψους, ἀπὸ τοῦ πυθμένος, $h = 36$ cm.

Ζητεῖται: Πόση εἶναι ἡ ἐπὶ τοῦ πυθμένος ἀσκουμένη πίεσις (P) εἰς ἀτμοσφαίρας (Kg^*/cm^2) καὶ εἰς μονάδας CGS.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$P = \varepsilon.h$$

ἔχομεν

$$P = 0{,}78.36\ \frac{gr^*.\,cm}{cm^3}$$

$$P = \frac{0{,}78.36}{10^3}\ \frac{Kg^*.\,cm}{cm^3}$$

$$\boxed{P = 0{,}02808\ Kg^*/cm^2}$$

ἤ, διὰ τὴν εἰς CGS τιμὴν

$$P = 0{,}78.36.981\ \frac{dynes}{cm^2}$$

$$\boxed{P = 27546{,}48\ dynes/cm^2}$$

257. Δύτης βυθίζεται ἐντὸς θαλάσσης, εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon = 1{,}05\ gr^*/cm^3$, εἰς βάθος τι, φορῶν σκάφανδρον ὅπερ ἀντέχει εἰς πίεσιν $P = 13\ Kg^*/cm^2$.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάθος τοῦτο (h), εἰς τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κατέλθῃ ὁ δύτης ὥστε νὰ ὑποστῇ τὴν ἀνωτέρω πίεσιν P.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$P = \varepsilon.h$$

εὑρίσκομεν τὸ βάθος h:

$$h = \frac{P}{\varepsilon}$$

$$h = \frac{13}{1{,}05}\ \frac{Kg^*.cm^3}{cm^2.gr^*}$$

$$h = \frac{13.10^3}{1{,}05}\ \frac{gr^*.\,cm^3}{cm^2.gr^*}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$h = \frac{13.10^3}{1,05.10^2} \text{ m}$$

$$\boxed{h = 123,8 \text{ m}}$$

258. Εἰς τὸν λεπτὸν σωλῆνα ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου ἐφαρμόζεται δύναμις μέσῳ μοχλοῦ β' εἴδους μὲ λόγον μοχλοβραχιόνων $n = \frac{1}{4}$, ὁπότε ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ πλατέως σωλῆνος ἐμφανίζεται δύναμις $F_1 = 384$ Kg*.

Ζητεῖται: Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος N τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σωλήνων, ὥστε ἡ F_1 νὰ ἰσορροπῆται ὑπὸ δυνάμεως $F_2 = 8$ Kg* εἰς τὸ ἄκρον τοῦ μοχλοῦ.

Λύσις: Ἔστω F_2' ἡ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας (S_1) τοῦ λεπτοῦ σωλῆνος ἀπαιτουμένη δύναμις. Αὕτη θὰ συνδέεται τότε διὰ τῆς σχέσεως:

$$\frac{F_2'}{S_2} = \frac{F_1}{S_1}$$

ἐξ ἧς ἔχομεν:

$$F_2' = F_1 . \frac{S_2}{S_1}$$

ἢ

$$F_2' = F_1 . N$$

ἂν ληφθῇ ἡ σχέσις $N = S_2/S_1$.

Ἡ δύναμις ὅμως αὕτη (F_2') ὡς δύναμις ἀντιστάσεως τοῦ μοχλοῦ θὰ συνδέεται μὲ τὴν κινητήριον δύναμιν (F_2) διὰ τοῦ τύπου:

$$F_2' = 4F_2$$

ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$F_1 . N = 4F_2$$

καὶ

$$N = \frac{4F_2}{F_1}$$

$$N = \frac{4.8}{384}$$

$$\boxed{N = \frac{1}{12}}$$

259. Ὑδραυλικοῦ πιεστηρίου ὁ λεπτὸς σωλὴν ἔχει τομὴν $s = 20$ cm². Ἐπ' αὐτοῦ ἐνεργεῖ ἔμβολον τὸ ὁποῖον ἐπιφέρει πίεσιν σταθερὰν $P = 1,57$ Kg*/cm², κινούμενον, μέσῳ συστήματος διωστῆρος - στροφάλου, παλινδρομικῶς, μὲ σταθερὰν διαδρομὴν $h = 9,2$ cm, μὲ γωνιώδη ταχύτητα περιστροφῆς τοῦ στροφάλου $\omega = 12$ sec⁻¹.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ Ἰσχὺς (J) τοῦ πιεστηρίου, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι, διὰ καταλλήλου συνδέσεως, καταναλίσκεται ἔργον μόνον κατὰ τὴν μίαν φορὰν τῆς κινήσεως τοῦ ἐμβόλου.

Λύσις: Διὰ νὰ ἔχωμεν συνεχῆ περιστροφὴν τοῦ στροφάλου καὶ παλινδρομὴν τοῦ ἐμβόλου, πρέπει ἡ διαδρομὴ (h) τούτου νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν διάμετρον τῆς περιστροφῆς τοῦ ἐμβόλου (2R), ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι, εἰς ἑκάστην περιστροφὴν τὸ ἔμβολον θὰ διαγράφῃ δὶς τὴν διαδρομὴν h κατὰ φορὰς ἀντιθέτους. Τοῦτο ὅμως θὰ γίνεται εἰς χρόνον T (περίοδον περιστροφῆς) ἴσην μέ:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (1)$$

ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς κινητικῆς.

Ἐκ παραλλήλου τὸ εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον ἔργον (W), τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν μετατόπισιν h τῆς προκαλούσης τὴν πίεσιν P δυνάμεως εἶναι

$$W = P.V$$

ὅπου ὁ V (ὄγκος τοῦ μετατοπιζομένου ὑγροῦ) εἶναι:

$$V = s.h$$

ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$W = P.s.h \qquad (2)$$

καί, διὰ τὴν ἰσχὺν J:

$$J = \frac{W}{T}$$

ἐκ τῶν (1) καὶ (2):

$$J = \frac{P.s.h.\omega}{2\pi}$$

$$J = \frac{1{,}57.20.9{,}2.12}{2.3{,}14} \frac{Kg^*.\,cm^2.\,cm}{cm^2.\,sec}$$

$$J = \frac{1{,}57.20.9{,}2.12}{2.3{,}14.10^2} \frac{Kg^*m}{sec}$$

$$\boxed{J = 5{,}52\ Kg^*m/sec}$$

260. Στερεὸς κύβος πλευρᾶς $\alpha = 5$ cm βυθίζεται ἐντὸς ὑδραργύρου, εἰδ. βάρους $\varepsilon = 13{,}6\ gr^*/cm^3$, εἰς τρόπον ὥστε τὸ κέντρον του νὰ εὑρίσκεται εἰς βάθος h=20 cm ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ συνολικὴ δύναμις (Σ) μεθ' ἧς συνθλίβεται ὁ κύβος, ὅταν οὗτος εὑρίσκεται ὁριζοντίως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἡ ἐπὶ τῆς ἀνωτέρας ἐπιφανείας τοῦ κύβου ἀακουμένη δύναμις εἶναι:

$$F_1 = \varepsilon\left(h - \frac{\alpha}{2}\right)\alpha^2$$

καθ' ὅσον α^2 εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης ἕδρας.

Ἀντιστοίχως ἡ ἐπὶ τῆς κάτω ἐπιφανείας δύναμις εἶναι:

$$F_2 = \varepsilon\left(h + \frac{\alpha}{2}\right)\alpha^2$$

ἡ δὲ ἐπὶ ἑκάστης τῶν πλαγίων ἐπιφανειῶν δύναμις κατὰ προσέγγισιν:

$$F_3 = \varepsilon\alpha^2 h$$

Ὁπότε ἡ συνολικὴ δύναμις Σ θὰ εἶναι:

$$\Sigma = F_1 + F_2 + 2F_3$$

$$\Sigma = 4\varepsilon\alpha^2 h$$

$$\Sigma = 4.13{,}6.25.20\ \frac{gr^*.\,cm^2.\,cm}{cm^3}$$

$$\Sigma = \frac{4.13{,}6.25.20}{10^3}\ Kg^*$$

$$\boxed{\Sigma = 27{,}2\ Kg^*}$$

261. Ὀρειχάλκινον πρῖσμα, βάσεως $S = 12\ cm^2$ καὶ ὕψους $h = 9$ cm βυθίζεται ἐντὸς πετρελαίου, εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon = 0{,}8$ gr^*/cm^3.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἐντὸς τοῦ πετρελαίου βάρος (Β′) τοῦ πρίσματος, ἂν ὁ ὀρείχαλκος ἔχῃ εἰδ. βάρος $\varepsilon' = 8{,}6$ gr^*/cm^3.

Λύσις: Ἐκ τοῦ ὄγκου V τοῦ πρίσματος ($V = Sh$) δίδεται τὸ βάρος του καὶ ἡ ἄνωσίς του ἀντιστοίχως:

$$B = \varepsilon' Sh$$

$$A = \varepsilon Sh$$

ὁπότε τὸ ἐντὸς τοῦ πετρελαίου βάρος του θὰ εἶναι

$$B' = B - A$$

$$B' = Sh(\varepsilon' - \varepsilon)$$

$$B' = 12.9.7{,}8\ \frac{cm^2.\,cm\,.\,gr^*}{cm^3}$$

$$\boxed{B' = 842{,}4\ gr^*}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

262. Σῶμά τι βάρους $B_1 = 410$ gr* βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος, ὁπότε τὸ βάρος του γίνεται $B_2 = 311,9$ gr*.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος του (ε) εἰς μονάδας CGS, ἂν τὸ τοῦ ὕδατος εἶναι $\varepsilon' = 1$ gr*/cm³.

Λύσις: Ἐκ τῶν δύο βαρῶν (B_1 καὶ B_2) εὑρίσκεται ἡ ἄνωσις ἣν ὑφίσταται τὸ σῶμα ἐντὸς τοῦ ὕδατος

$$A = B_1 - B_2$$

ἥτις μᾶς δίδει ἐν συνεχείᾳ τὸν ὄγκον ἐκτοπίσεως

$$V = \frac{A}{\varepsilon'}$$

$$V = \frac{B_1 - B_2}{\varepsilon'}$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ σώματος ἐκ τῆς σχέσεως:

$$\varepsilon = \frac{B_1}{V}$$

$$\varepsilon = \frac{B_1 . \varepsilon'}{B_1 - B_2}$$

$$\varepsilon = \frac{410.1}{410 - 311,9} \frac{gr^*.gr^*}{gr^*.cm^3}$$

$$\varepsilon = \frac{410.981}{98,1} \frac{dynes}{cm^3}$$

$$\boxed{\varepsilon = 4100 \text{ dynes/cm}^3}$$

263. Σῶμά τι ἐντὸς οἰνοπνεύματος ζυγίζει $B_1 = 70$ gr*, ἐντὸς δὲ ἐλαιολάδου ζυγίζει $B_2 = 7$ gr*, ἂν τὰ εἰδικὰ βάρη τῶν δύο ὑγρῶν εἶναι ἀντιστοίχως $\varepsilon_1 = 0,8$ gr*/cm³ καὶ $\varepsilon_2 = 0,9$ gr*/cm³.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ σώματος (B), ποῖος ὁ ὄγκος του (V) καὶ ποῖον τὸ εἰδ. βάρος του (ε).

Λύσις: Κατὰ τὴν βύθισιν τοῦ σώματος ἐντὸς τοῦ οἰνοπνεύματος ἔχομεν:

$$B_1 = B - \varepsilon_1 V \qquad (1)$$

κατὰ τὴν ἐντὸς τοῦ ἐλαιολάδου:

$$B_2 = B - \varepsilon_2 V \qquad (2)$$

ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν B καὶ V.

$$\boxed{\begin{array}{l} V = 630 \text{ cm}^3 \\ B = 574 \text{ gr}^* \end{array}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τελικῶς τὴν τιμὴν τοῦ (ε) ἐκ τοῦ τύπου :

$$\varepsilon = \frac{B}{V}$$

ἐξ οὗ ἔχομεν :

$$\varepsilon = \frac{574}{630}\,\frac{gr^*}{cm^3}$$

$$\boxed{\varepsilon = 0{,}944\ gr^*/cm^3}$$

264. Σῶμα ἐκ σιδήρου, εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon_1 = 7{,}8\ gr^*/cm^3$, βυθίζεται ἐντὸς ὑγροῦ καὶ χάνει τότε τὰ $^2/_3$ τοῦ βάρους του.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑγροῦ (ε_2).

Λύσις: Ἔστω V ὁ ὄγκος τοῦ σώματος καὶ B τὸ ἔξω τοῦ ὑγροῦ βάρος του. Θὰ εἶναι τότε τὸ ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ βάρος του :

$$B' = \frac{1}{3}\,B$$

ἐξ οὗ προκύπτει :

$$B' = B - \varepsilon_2 V$$

$$B' = \varepsilon_1 V - \varepsilon_2 V$$

$$\frac{1}{3}\,\varepsilon_1 V = \varepsilon_1 V - \varepsilon_2 V$$

$$\frac{\varepsilon_1}{3} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2\varepsilon_1}{3}$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = 5{,}2\ gr^*/cm^3}$$

265. Μεταλλικὴ σφαῖρα κενὴ ἔχει βάρος $B_1 = 5\ gr^*$, πληροῦται ἐν συνεχείᾳ διὰ ποσότητος $B_2 = 0{,}1\ gr^*$ ἀερίου καὶ βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος, εἰδ. βάρους $\varepsilon = 1\ gr^*/cm^3$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ δύναμις (F) μεθ᾽ ἧς ἡ σφαῖρα θὰ ὠθῆται πρὸς τὰ ἄνω ἂν ἔχῃ ἀκτῖνα R = 3 cm.

Λύσις: Τὸ συνολικὸν βάρος τῆς σφαίρας εἶναι :

$$B = B_1 + B_2 \qquad (1)$$

ἡ δ᾽ ἄνωσις :

$$A = V.\varepsilon \qquad (2)$$

ὅπου ὁ ὄγκος V δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔχομεν τότε, ἐκ τῶν (1), (2) καὶ τῆς τιμῆς τοῦ V τὴν δύναμιν F :

$$F = A - B$$

$$F = \frac{4\pi R^3 . \varepsilon}{3} - (B_1 + B_2)$$

$$F = \frac{4\pi R^3 . \varepsilon - 3\,(B_1 + B_2)}{3}$$

$$\boxed{F = 107{,}84 \text{ gr}^*}$$

266. Κρᾶμα ἐκ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου συνολικοῦ βάρους $B = 298$ gr*, βυθιζόμενον ἐντὸς ὕδατος ($\varepsilon = 1$ gr*/cm^3) ζυγίζει $B' = 278$ gr*.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάρος τοῦ Ἀργύρου (B_1) καὶ ποῖον τὸ τοῦ Χρυσοῦ (B_2) ἂν τὰ εἰδικὰ βάρη ληφθοῦν ἀντιστοίχως $\varepsilon_1 = 10{,}5$ gr*/cm^3 καὶ $\varepsilon_2 = 19{,}3$ gr*/cm^3.

Λύσις: Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἐντὸς τοῦ κράματος διατηροῦνται, ὡς πρακτικῶς συμβαίνει, τὰ εἰδικὰ βάρη σταθερά, ἔχομεν:

α) Τὴν σχέσιν :

$$B' = B - A \qquad (1)$$

ὅπου A ἡ συνολικὴ ἄνωσις.

β) Τὴν σχέσιν :

$$B = V_1\varepsilon_1 + V_2\varepsilon_2 \qquad (2)$$

ὅπου V_1 καὶ V_2 οἱ ὄγκοι ἀργύρου καὶ χρυσοῦ, ἤτοι σύστημα ἐκ δύο ἐξισώσεων (1) καὶ (2), μὲ δύο ἀγνώστους (V_1 καὶ V_2).

Διὰ λύσεως τούτου εὑρίσκομεν

$$V_1 = 10 \text{ cm}$$

$$V_2 = 10 \text{ cm}$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ τὰ βάρη

$$B_1 = V_1\varepsilon_1$$

$$B_2 = V_2\varepsilon_2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} B_1 = 105 \text{ gr}^* \\ B_2 = 193 \text{ gr}^* \end{array}}$$

267. Σῶμά τι εἰς μὲν τὸν ἀέρα ἔχει βάρος $B_1 = 25$ gr*, ἐντὸς δὲ τοῦ ὕδατος βάρος $B_2 = 18$ gr*.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ βάρος του (B_3) ἐντὸς τοῦ αἰθέρος, ἔχοντος εἰδικὸν βάρος $\varepsilon = 0{,}73$ gr*/cm^3.

Λύσις: Ἔστω $\varepsilon' = 1$ gr*/cm^3 τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Θὰ ἰσχύῃ τότε, κατὰ τὴν εἰς τοῦτο ἐμβάπτισιν τοῦ σώματος, ἡ σχέσις:

$$B_2 = B_1 - V\varepsilon' \qquad (1)$$

ἂν τεθῇ ὡς V ὁ ὄγκος.

Ἀντιστοίχως, κατὰ τὴν ἐμβάπτισιν τοῦ σώματος ἐντὸς τοῦ αἰθέρος θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$B_3 = B_1 - V\varepsilon \qquad (2)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2), προκύπτει:

$$B_3 = B_1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}(B_1 - B_2)$$

$$B_3 = 25 - 0{,}73\,(25 - 18)\ \text{gr}^*$$

$$\boxed{B_3 = 19{,}89\ \text{gr}^*}$$

268 Μεταλλικὴ σφαῖρα ἐκ Νικελίου (εἰδ. βάρους ε=8,9 gr*/cm³), ἀκτῖνος R=6 cm βυθιζομένη ἐντὸς ὕδατος εἰδ. βάρους ε′=1 gr*/cm³ ζυγίζει B=6212,68 gr*.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ ἂν ἡ σφαῖρα εἶναι συμπαγής.

Λύσις: Ἔστω V ὁ ὅλος ὄγκος τῆς σφαίρας καὶ x ὁ συμπαγὴς ὄγκος τοῦ Νικελίου, ὅπου θὰ πρέπει νὰ εἶναι προφανῶς

$$V > x$$

διὰ νὰ ὑπάρχει ἐσωτερικῶς κενὸς χῶρος.

Ἐντὸς τοῦ ὕδατος θὰ ἰσχύῃ τότε ἡ σχέσις:

$$B = \varepsilon x - V\varepsilon'$$

ἥτις, διὰ $V = {}^4/_3.\pi R^3$, γίνεται

$$B = \varepsilon x - \frac{4\pi R^3\varepsilon'}{3}$$

ἐκ τῆς ὁποίας, τελικῶς, προκύπτει:

$$x = \frac{B}{\varepsilon} + \frac{4\pi R^3.\varepsilon'}{3\varepsilon}$$

$$x = \frac{6212{,}68}{8{,}9} + \frac{4.3{,}14.6^3.1}{3.8{,}9}\ \text{cm}^3$$

$$\boxed{x = 800\ \text{cm}^3}$$

Ἐκ τοῦ τύπου ὅμως

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

εὑρίσκομεν ταυτοχρόνως:

$$\boxed{V = 904{,}32\ \text{cm}^3}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ὧν συμπεραίνομεν ὅτι ὑπάρχει εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς σφαίρας κενὸς χῶρος ὄγκου :

$$V' = V - x$$

$$\boxed{V' = 104{,}32 \text{ cm}^3}$$

269. Δίδεται μικρὰ σφαῖρα ἐξ ἀργιλλίου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 2{,}65$ gr*/cm³), βάρους $B_1 = 10$ gr*, καὶ ἐξαρτᾶται διὰ λεπτοῦ, ἀμελητέου, νήματος ἀπὸ κύβον ἐκ ξύλου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 0{,}7$ gr*/cm³).

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου (λ) ὥστε τὸ σύστημα νὰ ἰσορροπῇ εἰς οἱανδήποτε θέσιν ἐντὸς ἀπεσταγμένου ὕδατος ($\varepsilon = 1$ gr*/cm³).

Λύσις: Διὰ νὰ ἰσορροπῇ τὸ σύστημα πρέπει τὰ βάρη τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ξύλου ἀφ' ἑνὸς (B_1, B_2) καὶ αἱ ἀνώσεις των ἀφ' ἑτέρου (A_1, A_2) νὰ ἀλληλοαναιροῦνται, ἤτοι νὰ εἶναι :

$$B_1 + B_2 = A_1 + A_2$$

ὁπότε εἶναι :

$$B_1 + \varepsilon_2 V_2 = \frac{B_1 \varepsilon}{\varepsilon_1} + \varepsilon V_2$$

ὅπου ὡς V_2 λογίζεται ὁ ὄγκος τοῦ ξύλου, καὶ τελικῶς :

$$V_2 = \frac{\varepsilon_1 B_1 - \varepsilon B_1}{\varepsilon_1 (\varepsilon - \varepsilon_2)}$$

ἐξ οὗ, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν ε_1, ε_2 κλπ., προκύπτει:

$$V = 20{,}75 \text{ cm}^3$$

καί :

$$\lambda = \sqrt[3]{20{,}75}$$

$$\boxed{\lambda \simeq 2{,}748 \text{ cm}}$$

270. Ξυλίνη σανὶς (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 0{,}8$ gr*/cm³) πάχους $h = 4$ cm ἐπιπλέει ἐντὸς ὕδατος θαλασσίου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 1{,}1$ gr*/cm³).

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον βάθος (x) θὰ ἐμβαπτίζεται ἡ σανὶς ἐντὸς τοῦ ὕδατος.

Λύσις: Ἔστω S ἡ ἐπιφάνεια βάσεως τῆς σανίδος. Τότε τὸ βάρος της (B) θὰ εἶναι προφανῶς :

$$B = S.h.\varepsilon_1$$

καθ' ὅσον τὸ γινόμενον S.h ἐκφράζει τὸν ὄγκον.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Διὰ νὰ ἰσορροπῇ ὅμως τὸ σῶμα πρέπει τὸ βάρος τοῦτο νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἄνωσιν (A), ἤτοι νὰ εἶναι :

$$Sh\varepsilon_1 = A \qquad (1)$$

ὅπου :

$$A = S.x.\varepsilon_2$$

ἐξ οὗ ἡ (1) γίνεται :

$$Sh\varepsilon_1 = Sx\varepsilon_2$$

$$h\varepsilon_1 = x\varepsilon_2.$$

ὁπότε :

$$x = \frac{h\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$x = \frac{4.0{,}8}{1{,}1}\ \frac{cm\,.\,gr^*.\,cm^3}{cm^3.\,gr^*}$$

$$\boxed{x = 2{,}909\ cm}$$

271. Ξυλίνη σφαῖρα ἐμβαπτιζομένη ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1\ gr^*/cm^3$) βυθίζεται μέχρι τοῦ $^1/_2$ τοῦ ὄγκου της (V), ἐνῷ ἐμβαπτιζομένη ἐντὸς οἰνοπνεύματος βυθίζεται μέχρι τῶν $^5/_8$ τοῦ ὄγκου της.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος (ε) τῆς ξυλίνης σφαίρας καὶ ποῖον τὸ τοῦ οἰνοπνεύματος (ε_2).

Λύσις: Ἡ ἰσχύουσα, κατὰ τὴν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἐμβάπτισιν, σχέσις εἶναι :

$$\varepsilon V = \frac{\varepsilon_1 V}{2} \qquad (1)$$

ἐντὸς δὲ τοῦ οἰνοπνεύματος :

$$\varepsilon V = \frac{5\varepsilon_2 V}{8} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν τότε :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2}$$

$$\boxed{\varepsilon = 0{,}5\ gr^*/cm^3}$$

καὶ ἐκ τῆς (2) :

$$\varepsilon_2 = \frac{8\varepsilon}{5}$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = 0{,}8\ gr^*/cm^3}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

272. Ξυλίνη σανὶς πλάτους $x=60$ cm, μήκους $y=110$ cm καὶ ὕψους $z=8$ cm, εἰδικοῦ δὲ βάρους $\varepsilon=0,6$ gr*/cm³ ἀφίεται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon'=1,02$ gr*/cm³).

Ζητεῖται: Πόσον βάρος (β) πρέπει νὰ τεθῇ ἐπὶ τῆς σανίδος ὥστε αὕτη νὰ ἐμβαπτίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος κατὰ $z'=7$ cm.

Λύσις: Ὅταν ἡ σανίς, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους β, βυθισθῇ κατὰ z', τότε ὁ ἐκτοπιζόμενος ὄγκος ὑγροῦ θὰ εἶναι:

$$V' = xyz'$$

ἡ δὲ ἄνωσις:

$$A = xyz'\varepsilon' \qquad (1)$$

ἐνῷ τὸ συνολικὸν βάρος (σανίδος καὶ προσθέτου σώματος) θὰ εἶναι:

$$B = xyz\varepsilon + \beta \qquad (2)$$

ὁπότε, διὰ τὴν διατήρησιν τῆς ἰσορροπίας:

$$A = B$$

ἔχομεν, ἐκ τῶν (1) καὶ (2), τὴν σχέσιν

$$xyz'\varepsilon' = xyz\varepsilon + \beta$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν:

$$\beta = xy\,(z'\varepsilon' - z\varepsilon)$$

$$\beta = 60.110\,(7.1,02 - 8.0,6)\ \text{gr}^*$$

$$\boxed{\beta = 15,444\ \text{Kg}^*}$$

273. Σῶμά τι ἀγνώστου βάρους (B) καὶ εἰδικοῦ βάρους (ε), ἐμβαπτιζόμενον ἐντὸς γλυκερίνης (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=1,26$ gr*/cm³) ζυγίζει $B_1=20$ gr*, ἐντὸς δὲ θειϊκοῦ ὀξέος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2=2$ gr*/cm³) ζυγίζει $B_2=18$ gr*.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ σώματος (B) καὶ ποῖον τὸ εἰδικὸν βάρος του (ε).

Λύσις: Ἡ ἐντὸς τῆς γλυκερίνης ἰσχύουσα σχέσις εἶναι:

$$B_1 = \varepsilon V - \varepsilon_1 V \qquad (1)$$

ἂν ὡς V χαρακτηρισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ σώματος.

Ἡ δὲ ἐντὸς τοῦ θειϊκοῦ ὀξέος:

$$B_2 = \varepsilon V - \varepsilon_2 V \qquad (2)$$

ὁπότε ἐκ τῶν δύο τούτων ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἀποτελουσῶν σύστημα, εὑρίσκομεν, ἀφ' ἑνὸς μέν:

$$\varepsilon = \frac{B_1\varepsilon_2 - B_2\varepsilon_1}{B_1 - B_2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\varepsilon = \frac{20.2 - 18.1,26}{20 - 18} \frac{gr^*}{cm^3}$$

$$\boxed{\varepsilon = 8,66 \ gr^*/cm^3}$$

ἀφ' ἑτέρου δέ:

$$V = \frac{B_2}{\varepsilon - \varepsilon_2}$$

ἐξ' οὗ:

$$B = \varepsilon . V$$

ἤτοι:

$$B = \frac{\varepsilon . B_2}{\varepsilon - \varepsilon_2}$$

$$B = \frac{8,66.18}{6,66} \ gr^*$$

$$\boxed{B = 23,4 \ gr^*}$$

274. Ἐντὸς βαθέος δοχείου περιέχοντος ὑδράργυρον (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 13,6 \ gr^*/cm^3$) ἄνωθεν δὲ αὐτοῦ διάλυμα σακχάρου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 1,8 \ gr^*/cm^3$), ρίπτεται χαλκίνη σφαῖρα (εἰδ. βάρους $\varepsilon_3 = 8,9 \ gr^*/cm^3$).

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον ἡ σφαῖρα, ἰσορροποῦσα, θὰ εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου καὶ κατὰ πόσον ἐντὸς τοῦ διαλύματος, ἂν ὁ ὄγκος της εἶναι $V = 11,8 \ cm^3$.

Λύσις: Ἔστωσαν V_1 καὶ V_2 τὰ τμήματα τῆς σφαίρας τὰ εὑρισκόμενα, κατὰ τὴν ἰσορροπίαν, ἀντιστοίχως ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου καὶ τοῦ διαλύματος.

Ἔχομεν ἐν συνεχείᾳ, διὰ νὰ ἰσορροπῇ ἡ σφαῖρα, τὴν κάτωθι σχέσιν, ἐκφράζουσαν τὴν ἰσότητα μεταξὺ βάρους καὶ ἀθροίσματος ἀνώσεων:

$$\varepsilon_3 V = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2 \qquad (1)$$

ἥτις, διὰ $V = V_1 + V_2$, γίνεται:

$$\varepsilon_3 V_1 + \varepsilon_3 V_2 = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2$$

$$V_1 (\varepsilon_3 - \varepsilon_1) = V_2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{7,1}{4,7}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε, ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων

$$V_1 + V_2 = 11{,}8$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{7{,}1}{4{,}7}$$

εὑρίσκομεν:

$$\boxed{\begin{array}{l} V_1 = 7{,}1 \text{ cm}^3 \\ V_2 = 4{,}7 \text{ cm}^3 \end{array}}$$

275. Ἐντὸς συστήματος συγκοινωνούντων δοχείων τίθεται ὑδράργυρος μέχρις ὅτου ἰσορροπήσῃ μὲ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐλευθέρας ἐπιφανείας εἰς τὰ δύο σκέλη. Τίθεται ἀκολούθως εἰς τὸ ἓν σκέλος τοῦ συστήματος ὑπεράνω τοῦ ὑδραργύρου ποσότης ὕδατος β=84,32 gr*, ὁπότε ἡ μία ὑδραργυρικὴ ἐπιφάνεια ἰσορροπεῖ κατὰ h=2 cm ὑπεράνω τῆς ἄλλης.

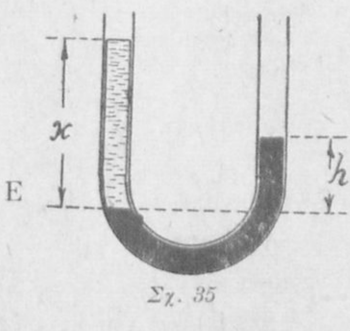
Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ ἑκάστου σκέλους τοῦ συστήματος, ὑποτιθεμένων τῶν δύο σωλήνων ὁμοίων, κυλινδρικῶν καὶ κατακορύφων (εἰδ. βάρος ὑδραγύρου ε′=13,6 gr*/cm³).

Λύσις: Ὅταν αἱ δύο ὑδραργυρικαὶ ἐπιφάνειαι ἀπομακρυνθοῦν κατὰ h, τότε ἡ ὑπὸ τοῦ ὑδραργύρου ἀσκουμένη ἐπὶ τῆς κατωτάτης ἐπιφανείας (E) πίεσις θὰ εἶναι προφανῶς

$$P' = h\varepsilon' \qquad (1)$$

ἐνῷ ἡ ὑπὸ τοῦ ὕδατος (ἴδ. σχ. 35) ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας ἀσκουμένη πίεσις θὰ εἶναι

$$P = x\varepsilon \qquad (2)$$



Σχ. 35

ἂν ὡς x λογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὕδατος, καὶ ὡς ε τὸ εἰδικὸν βάρος του.

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως

$$P = P'$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχομεν, ἐκ τῶν (1) καὶ (2):

$$h\varepsilon' = x\varepsilon$$

ἐξ οὗ:

$$x = \frac{h\varepsilon'}{\varepsilon} \qquad (3)$$

καὶ ἐπειδή, ἂν ἡ τομὴ ὑποτεθῇ S, θὰ εἶναι

$$\beta = Sx\varepsilon$$

εὑρίσκομεν:

$$S = \frac{\beta}{x\varepsilon}$$

καί, ἐκ τῆς (3):

$$S = \frac{\beta\varepsilon}{h\varepsilon'\varepsilon}$$

$$S = \frac{\beta}{h\varepsilon'}$$

$$S = \frac{84{,}32}{2.13{,}6}\,\frac{gr^*.\,cm^3}{cm\,.\,gr^*}$$

$$\boxed{S = 3{,}1\ cm^2}$$

276. Σφαῖρα ἐκ φελλοῦ (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 0{,}22\ gr^*/cm^3$) ὄγκου $V_1 = 61\ cm^3$ βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος. Ἀπὸ τὸ κάτω μέρος ταύτης, διὰ λεπτοῦ μὴ ὑπολογισίμου νήματος, ἐξαρτᾶται μικροτέρα σφαῖρα ἐκ ψευδαργύρου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 7{,}1\ gr^*/cm^3$), ὁπότε τὸ ὅλον σύστημα διατηρεῖ ἰσορροπίαν εἰς οἱονδήποτε θέσιν ἐντὸς τοῦ ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon = 1\ gr^*/cm^3$).

Ζητεῖται: Ποῖον τὸ βάρος (B_2) τῆς ἐκ ψευδαργύρου σφαίρας.

Λύσις: Ἐκ τῶν στοιχείων V_1, ε_1 καὶ ε_2 ἔχομεν:

α) Διὰ τὸ βάρος τοῦ φελλοῦ (B_1):

$$B_1 = V_1\varepsilon_1 \qquad (1)$$

β) Διὰ τὸ βάρος τῆς ἐκ ψευδαργύρου σφαίρας:

$$B_2 = V_2\varepsilon_2 \qquad (2)$$

ὁπότε τὸ σύστημα θὰ παρουσιάζῃ συνολικὸν βάρος (B):

$$B = V_1\varepsilon_1 + V_2\varepsilon_2 \qquad (3)$$

ὡς ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει.

Ἀντιστοίχως ἡ τοῦ ὅλου συστήματος ἄνωσις (A) θὰ εἶναι:

$$A = (V_1 + V_2)\,\varepsilon \qquad (4)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε, διὰ τὴν διατήρησιν τῆς ἰσορροπίας, καθοριζομένης ὑπὸ τῆς ἰσότητος

$$A = B$$

εὑρίσκομεν (ἐκ τῶν (3) καὶ (4)):

$$V_2 = \frac{V_1(\varepsilon - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon)}$$

καί :

$$B_2 = V_2\varepsilon$$

$$B_2 = \frac{V_1(\varepsilon - \varepsilon_1)\,\varepsilon}{(\varepsilon_2 - \varepsilon)}$$

$$B_2 = \frac{61.0{,}78}{6{,}1}\,\frac{cm^3.gr^*}{cm^3}$$

$$\boxed{B_2 = 7{,}8 \ gr^*}$$

277. Εἰς τὸ ἀλκοολόμετρον τοῦ Gay-Lussac σημειοῦται διὰ 0° τὸ καθαρὸν ὕδωρ (ε=1 gr*/cm³) καὶ δι' 100° τὸ καθαρὸν οἰνόπνευμα (ε'=0,788 gr*/cm³).

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος (ε_x) τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς 86° μίγματος.

Λύσις: Ἔστω B τὸ βάρος τοῦ ἀλκοολομέτρου, V ὁ μέχρι τοῦ 0° ὄγκος του καὶ v ὁ ὄγκος ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως.

Ἔχομεν ἐκ τούτων:

α) Διὰ τὴν ἰσορρόπησιν τοῦ ὀργάνου ἐντὸς τοῦ ὕδατος τὴν σχέσιν:

$$B = V\varepsilon \qquad (1)$$

β) Διὰ τὴν ἰσορρόπησιν ἐντὸς τοῦ καθαροῦ οἰνοπνεύματος:

$$B = (V + 100v)\,\varepsilon' \qquad (2)$$

γ) Τέλος διὰ τὴν ἰσορρόπησιν ἐντὸς τοῦ μίγματος τὴν σχέσιν:

$$B = (V + 86v)\,\varepsilon_x \qquad (3)$$

Ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{V}{v} = \frac{100\,\varepsilon'}{\varepsilon - \varepsilon'} \qquad (4)$$

ἐκ τῶν (1) καὶ (3), ὁμοίως:

$$\frac{V}{v} = \frac{86\,\varepsilon_x}{\varepsilon - \varepsilon_x} \qquad (5)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί, τελικῶς, ἐκ τῶν (4) καὶ (5):

$$\frac{100\,\varepsilon'}{\varepsilon - \varepsilon'} = \frac{86\,\varepsilon_x}{\varepsilon - \varepsilon_x}$$

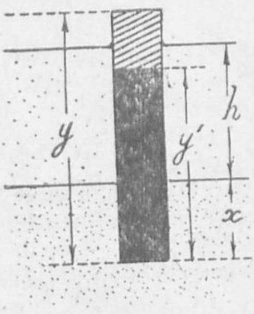
$$\frac{100.0,788}{1 - 0,788} = \frac{86\,\varepsilon_x}{1 - \varepsilon_x}$$

ἤτοι:

$$\boxed{\varepsilon_x = 0,812\ gr^*/cm^3}$$

278. Ἐντὸς λεκάνης, ἀπεριορίστου πλάτους, περιέχεται ὑδράργυρος ἄνωθεν δὲ αὐτοῦ ὕδωρ εἰς πάχος h=5 cm. Ἐμβαπτίζεται ἀκολούθως κύλινδρος y=10 cm, ἀποτελούμενος εἰς τὸ κάτω μέρος του καὶ μέχρις ὕψους y′=8 cm ἐκ σιδήρου, εἰς δὲ τὸ ὑπόλοιπον ἐκ ξύλου (ἴδ. σχ. 36).

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον θὰ ἐμβαπτισθῇ ὁ κύλινδρος ἐντὸς



Σχ. 36

τοῦ ὑδραργύρου, ἂν τὰ εἰδ. βάρη εἶναι ἀντιστοίχως (εἰς μονάδας gr*/cm³).

Διὰ τὸ ὕδωρ $\varepsilon_1=1$, τὸν ὑδράργυρον $\varepsilon_2=13,6$, τὸν σίδηρον $\varepsilon_3=7,2$ καὶ τὸ ξύλον $\varepsilon_4=0,6$.

Λύσις: Τὸ συνολικὸν βάρος τοῦ κυλίνδρου εἶναι ὡς ἐκ τῆς τομῆς του S:

$$B = Sy'\varepsilon_3 + S\,(y - y')\,\varepsilon_4 \qquad (1)$$

ἡ δὲ συνολικῶς ἐπ᾽ αὐτοῦ ἀσκουμένη ἄνωσις:

$$A = Sh\varepsilon_1 + Sx\varepsilon_2 \qquad (2)$$

ὁπότε τὸ σῶμα θὰ ἰσορροπῇ ὅταν εἶναι:

$$B = A$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι, ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ὅταν:

$$Sy'\varepsilon_3 + S(y - y')\varepsilon_4 = Sh\varepsilon_1 + Sx\varepsilon_2$$
$$y'\varepsilon_3 + (y - y')\varepsilon_4 = h\varepsilon_1 + x\varepsilon_2$$

ὁπότε εἶναι:

$$x = \frac{y'\varepsilon_3 + (y - y')\varepsilon_4 - h\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

$$x = \frac{8.7,2 + 2.0,6 - 10}{13,6}\ \text{cm}$$

$$\boxed{x = 3,58\ \text{cm}}$$

279. Κυλινδρικὸν δοχεῖον, ἀμελητέου πάχους τοιχωμάτων, βάσεως $S = 250\ cm^2$ καὶ ὕψους $h = 10$ cm ἔχει βάρος $B_1 = 600$ gr*. Ἐντὸς αὐτοῦ τίθεται ποσότης ἐλαίου βάρους $B_2 = 900$ gr* (εἰδικοῦ δὲ βάρους $\varepsilon = 0,9$ gr*/cm³), τὸ δὲ ὅλον δοχεῖον ἐμβαπτίζεται ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon' = 1$ gr*/cm³) ὅπου καὶ ἐπιπλέει.

Ζητεῖται: Πόσον θ' ἀπέχῃ τὸ χεῖλος τοῦ δοχείου ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος (x_1) ὡς καὶ πόσον θ' ἀπέχουν αἱ δύο ἐπιφάνειαι μεταξύ των (x_2).

Λύσις: Ὅταν τὸ περιέχον τὸ ἔλαιον δοχεῖον ἐμβαπτισθῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος καὶ ἰσορροπήσῃ, ἡ ἄνωσίς του (Α) θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ βάρος τοῦ δοχείου καὶ τοῦ περιεχομένου ἐλαίου (Β).

Εἶναι ὅμως:

$$B = B_1 + B_2 \qquad (1)$$

καὶ

$$A = Sx\varepsilon' \qquad (2)$$

ὅπου x τὸ βάθος εἰς ὃ ἐμβαπτίζεται τὸ δοχεῖον κατὰ τὴν ἰσορρόπησίν του (ἴδ. σχ. 37), ὁπότε προκύπτει ἡ σχέσις

$$B_1 + B_2 = Sx\varepsilon'$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν:

$$x = \frac{B_1 + B_2}{S\varepsilon'} \qquad (3)$$

καί:

$$x_1 = h - x$$

$$x_1 = h - \frac{B_1 + B_2}{S\varepsilon'}$$

$$x_1 = 10 - \frac{1500}{250}\ \text{cm}$$

$$\boxed{x_1 = 4\ \text{cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐν συνεχείᾳ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὕψους x_2 εὑρίσκομεν τὸ ὕψος x' εἰς ὃ φθάνει, ἐντὸς τοῦ δοχείου, τὸ ἔλαιον, ἐκ τῆς σχέσεως

$$B_2 = Sx'\varepsilon$$

ἐξ ἧς ἔχομεν :

$$x' = \frac{B_2}{S\varepsilon} \qquad (4)$$

ὁπότε τὸ ὕψος :

$$x_2 = x - x'$$

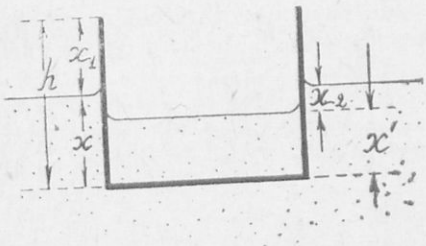
ἐκ τῶν (3) καὶ (4) γίνεται :

$$x_2 = \frac{B_1 + B_2}{S\varepsilon'} - \frac{B_2}{S\varepsilon} \qquad (5)$$

ἤτοι τελικῶς

$$x_2 = \frac{1500}{250} - \frac{900}{250.0{,}9}\ \text{cm}$$

$$\boxed{x_2 = 2\ \text{cm}}$$



Σχ. 37

280. Δίδονται τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν πλὴν τοῦ βάρους τοῦ δοχείου, ὅπερ δὲν εἶναι 600 gr* ἀλλὰ B_1 (ἄγνωστον).

Ζητεῖται: Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάρος τοῦτο (B_1) ἵνα αἱ δύο ἐπιφάνειαι τῶν ὑγρῶν (ὕδατος καὶ ἐλαίου) εὑρίσκονται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

Λύσις: Διὰ νὰ παρουσιάζουν τὰ δύο ὑγρὰ ἐλευθέρας ἐπιφανείας συμπιπτούσας πρέπει νὰ ἰσχύῃ, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται, ἡ σχέσις :

$$x_2 = 0.$$

ὁπότε ἡ ἐξίσωσις (5) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως γίνεται :

$$\frac{B_1 + B_2}{S\varepsilon'} - \frac{B_2}{S\varepsilon} = 0$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν :

$$(B_1 + B_2)\,\varepsilon = B_2\varepsilon'$$

$$B_1 = \frac{(\varepsilon' - \varepsilon)\,B_2}{\varepsilon}$$

$$B_1 = \frac{(1 - 0{,}9).900}{0{,}9}\ \mathrm{gr}^*$$

$$\boxed{B_1 = 100\ \mathrm{gr}^*}$$

281. Ἐντὸς λεκάνης περιεχούσης ὑδράργυρον (εἰδ. βάρους ε_1=13,6 gr*/cm³) καί, ἄνωθεν τούτου, οἰνόπνευμα (εἰδ. βάρους ε_2=0,78 gr*/cm³) ρίπτεται σφαῖρα ἐκ μετάλλου, ὁμοιογενής.

Ζητεῖται: Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ εἰδικὸν βάρος (ε) τοῦ μετάλλου τῆς σφαίρας, ὥστε αὕτη νὰ ἰσορροπῇ βυθιζομένη κατὰ τὸ ἥμισυ εἰς τὸν ὑδράργυρον κατὰ δὲ τὸ ἄλλο ἥμισυ εἰς τὸ οἰνόπνευμα.

Λύσις: Ἔστω V ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας. Κατὰ τὴν ἰσορρόπησίν της θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$B = A \qquad (1)$$

ὅπου B τὸ βάρος της καὶ A τὸ σύνολον τῶν ἀνώσεων.

Εἶναι ὅμως :

$$B = \varepsilon V$$

καί :

$$A = \varepsilon_1 \frac{V}{2} + \varepsilon_2 \frac{V}{2}$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται :

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{13{,}6 + 0{,}78}{2}\ \mathrm{gr}^*/\mathrm{cm}^3$$

$$\boxed{\varepsilon = 7{,}19\ \mathrm{gr}^*/\mathrm{cm}^3}$$

282. Ξυλίνη σφαῖρα, εἰδικοῦ βάρους ε_1=0,72 gr*/cm³, ἀφίεται ἐντὸς τῆς μάζης ὕδατος (εἰδ. βάρους ε_2=1 gr*/cm³).

Ζητεῖται: Μὲ ποίαν ἐπιτάχυνσιν (γ) θὰ κινηθῇ ἡ σφαῖρα ἐντὸς τοῦ ὕδατος, μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ὑγροῦ.

Λύσις: Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐπιταχύνσεως ταύτης (γ), εὑρίσκομεν τὴν συνολικὴν δύναμιν F, τὴν ἐνεργοῦσαν ἐπὶ τῆς σφαίρας, ἧς ἔστω m ἡ μᾶζα.

Ἡ δύναμις αὕτη (F) ὡς συνισταμένη βάρους καὶ ἀνώσεως θὰ εἶναι προφανῶς :

$$F = A - B$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καθ' ὅσον εἶναι $A>B$, ἤτοι εἰδικότερον:

$$F = \varepsilon_2 V - \varepsilon_1 V$$

$$F = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) V \qquad (1)$$

ἂν ὡς V χαρακτηρισθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ὁπότε, δυνάμει τοῦ γενικοῦ τύπου $\gamma = F/m$ καὶ ἐκ τῆς τιμῆς τῆς F ἐκ τῆς (1), προκύπτει:

$$\gamma = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) V}{m}$$

καί, ἐπειδὴ $m/V = d_1$, τελικῶς:

$$\gamma = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{d_1} \qquad (2)$$

ὅπου d_1 εἶναι ἡ πυκνότης τῆς σφαίρας.

Εὑρίσκομεν τότε, ἐκ τῆς (2) καὶ βάσει τοῦ τύπου:

$$\varepsilon_1 = d_1 g$$

τὴν τελικὴν ἔκφρασιν τῆς ζητουμένης ἐπιταχύνσεως (γ), ἥτις εἶναι:

$$\gamma = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) g}{\varepsilon_1} \qquad (3)$$

$$\gamma = \frac{(1 - 0{,}72).981}{0{,}72} \frac{cm}{sec^2}$$

$$\boxed{\gamma = 381{,}5 \ cm/sec^2}$$

283. Σῶμά τι, εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon_1 = 0{,}6 \ gr^*/cm^3$, ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐλευθέρως ἐντὸς πετρελαίου, εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 0{,}8 \ gr^*/cm^3$, ἀπὸ ὕψους τινὸς $h = 14$ cm ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον μέγιστον βάθος (x) θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ, μὴ ὑπολογιζομένης τῆς τριβῆς.

Λύσις: Τὸ διάστημα h θὰ διανύεται ὑπὸ τοῦ σώματος μὲ ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένην κίνησιν καὶ ἐπιτάχυνσιν g. Τὸ διάστημα x, ἀντιθέτως, θὰ διανύεται μὲ ὁμαλῶς ἐπιβραδυνομένην κίνησιν ἐπιβραδύνσεως γ τιμῆς (ὡς ἐκ τῆς σχέσεως (3) τῆς ἀσκ. 282):

$$\gamma = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) g}{\varepsilon_1} \qquad (1)$$

Ὡς ἐκ τούτου τὸ σῶμα θὰ ἠρεμήσῃ ὅταν τὸ κατὰ τὸ x καταναλισκόμενον ἔργον (W_x) γίνῃ, κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἴσον μὲ τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν πτῶσιν h ἔργον (W_h).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἔχομεν ἐξ αὐτῶν :

$$W_h = Bh, \; W_h = mgh \qquad (2)$$

$$W_x = Fx, \; W_x = m\gamma x \qquad (3)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3), εὑρίσκομεν :

$$mgh = \frac{m(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)gx}{\varepsilon_1}$$

$$h = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)x}{\varepsilon_1}$$

καὶ

$$x = \frac{h\varepsilon_1}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$$

$$x = \frac{14.0,6}{0,2}\,\text{cm}$$

$$\boxed{x = 42 \text{ cm}}$$

284. Ἐντὸς εὐρέος δοχείου περιέχεται γλυκερίνη, εἰδ. βάρους ε=1,26 gr*/cm^3, τόση ὥστε ἡ ἐλευθέρα της ἐπιφάνεια νὰ ἀπέχῃ τοῦ πυθμένος κατὰ ὕψος h=27 cm.

Ζητεῖται : Ἀπὸ ποίου τοὐλάχιστον ὕψους (x) ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τῆς γλυκερίνης πρέπει νὰ ἀφεθῇ ξυλίνη σφαίρα, εἰδ. βάρους ε′=0,9 gr*/cm^3, ὥστε νὰ φθάσῃ μέχρι τοῦ πυθμένος, μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ὑγροῦ.

Λύσις : Ἔστωσαν B, V καὶ m ἀντιστοίχως τὸ βάρος, ὁ ὄγκος καὶ ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας καὶ A ἡ ἄνωσίς της.

Θὰ εἶναι τότε ἡ μεταξὺ βάρους καὶ ἀνώσεως συνισταμένη :

$$F = A - B$$

$$F = V\varepsilon - V\varepsilon'$$

$$F = V(\varepsilon - \varepsilon') \qquad (1)$$

τὰ δὲ ἔργα τῶν διαστημάτων x καὶ h ἀντιστοίχως :

$$W_x = Bx$$

$$W_h = Vh(\varepsilon - \varepsilon')$$

ὁπότε διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$W_x \geqq W_h$$

ἔχομεν :

$$Bx \geqq Vh(\varepsilon - \varepsilon')$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ἧς προκύπτει :

$$V\varepsilon' x \geqq Vh\,(\varepsilon - \varepsilon') \qquad (2)$$

καθ' ὅσον εἶναι $B = V\varepsilon'$, καί, ἐν συνεχείᾳ ἐκ τῆς (2), τελικῶς :

$$x \geqq \frac{h(\varepsilon - \varepsilon')}{\varepsilon'}$$

$$x \geqq \frac{27\,(1{,}26 - 0{,}9)}{0{,}9}\ \mathrm{cm}$$

$$\boxed{x \geqq 10{,}8\ \mathrm{cm}}$$

285. Ἐντὸς δοχείου ὑπάρχει ποσότις τις ὕδατος θαλασσίου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1{,}05$ gr */cm³), κάτωθι δὲ τούτου, καὶ εἰς βάθος $h_1 = 10{,}1$ cm, ὑπάρχει ὑδράργυρος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 13{,}6$ gr*/cm³) μέχρι βάθους ἀπεριορίσθου. Εἰς ἀπόστασιν $h_2 = 2{,}2$ cm, ἄνωθεν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, ἀφίεται ἐλευθέρα μικρὰ σφαῖρα ἐξ ὑάλου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_3 = 3{,}5$ gr*/cm³), ὁπότε αὕτη πίπτουσα ἐντὸς τοῦ ὕδατος συνεχίζει τὴν κίνησίν της.

Ζητεῖται: Εἰς ποῖον μέγιστον βάθος (h_3) ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου θὰ βυθισθῇ ἡ σφαῖρα.

Λύσις: Κατὰ τὴν πτῶσιν τῆς σφαίρας, μὴ ὑπολογιζομένων τῶν τριβῶν, θὰ διανυθῇ τὸ διάστημα h_2 μὲ ἐπιτάχυνσιν g, τὸ h_1 μὲ ἐπιτάχυνσιν :

$$\gamma_1 = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)\,g}{\varepsilon_3}$$

καί, ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου, διάστημά τι h_3 μὲ ἐπιβράδυνσιν :

$$\gamma_2 = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\,g}{\varepsilon_3}$$

ὁπότε, ἐὰν θεωρηθῇ ὡς m ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας, θὰ ἰσχύῃ ἡ κατωτέρω σχέσις, πρὸς διατήρησιν τοῦ ἀξιώματος τῆς ἐνεργείας :

$$h_2 mg + h_1 m\gamma_1 = h_3 m\gamma_2$$

ἐξ ἧς :

$$h_2 g + \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)h_1 g}{\varepsilon_3} = \frac{(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)h_3 g}{\varepsilon_3}$$

καὶ

$$h_3 = \frac{h_2\varepsilon_3 + h_1\,(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}$$

$$h_3 = \frac{2{,}2.3{,}5 + 10{,}1\,(3{,}5 - 1{,}05)}{13{,}6 - 3{,}5}\ \mathrm{cm}$$

$$\boxed{h_3 = 10{,}15\ \mathrm{cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

286. Εἰς βάθος $h = 2{,}64$ cm ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρος $\varepsilon_1 = 1\ gr^*/cm^3$) ἀφίεται ἐλεύθερον τεμάχιον φελλοῦ (εἰδ. βάρος $\varepsilon_2 = 0{,}24\ gr^*/cm^3$), ὁπότε τοῦτο τίθεται εἰς κίνησιν πρὸς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν.

Ζητεῖται: Ἐὰν δὲν ὑπῆρχον δυνάμεις τριβῆς, μέχρι ποίου ὕψους (x) ἄνωθεν τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ θὰ ἐξετινάσσετο ὁ φελλός.

Λύσις: Ἡ κατὰ τὴν ἄνοδον ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἐπιτάχυνσις (γ) τοῦ φελλοῦ, κατὰ τὰ γνωστά, θὰ εἶναι:

$$\gamma = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\ g}{\varepsilon_2}$$

ἐνῷ ἡ κατὰ τὸ διάστημα x ἐπιβράδυνσὶς θὰ εἶναι g.

Ὡς ἐκ τούτου, πρὸς διατήρησιν τοῦ ἀξιώματος τῆς ἐνεργείας, θὰ ἰσχύσῃ ἀναγκαστικῶς ἡ σχέσις:

$$h.m\gamma = x \,.\, mg$$

ἐξ ἧς:

$$x = \frac{h\ (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2}$$

$$x = \frac{2{,}64\ (1 - 0{,}24)}{0{,}24}\ \text{cm}$$

$$\boxed{x = 8{,}36\ \text{cm}}$$

287. Δίδεται γλυκερίνη (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1{,}25\ gr^*/cm^3$) καὶ αἰθὴρ (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 0{,}7\ gr^*/cm^3$) καὶ σχηματίζεται μῖγμα, μὴ παρουσιαζομένης χημικῆς ἀντιδράσεως μεταξὺ τῶν δύο ὑγρῶν ἀλλ᾽ ἁπλῶς ἀναμίξεως.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι κατὰ βάρος ἡ ἀναλογία τῶν δύο ὑγρῶν, ὥστε τεμάχιον ξύλου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_3 = 0{,}8 gr^*/cm^3$) νὰ αἰωρῆται ἐντὸς τοῦ μίγματος εἰς οἱανδήποτε θέσιν.

Λύσις: Διὰ νὰ αἰωρῆται τὸ ξύλον ἐντὸς τοῦ μίγματος πρέπει τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ τελευταίτου τούτου (ἔστω ε) νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τοῦ ξύλου:

$$\varepsilon = \varepsilon_3 \qquad (1)$$

Ἔστω, πρὸς τοῦτο, B_1 τὸ βάρος τῆς γλυκερίνης καὶ B_2 τὸ τοῦ αἰθέρος καὶ V_1 καὶ V_2 οἱ ὄγκοι των. Ἔχομεν ἐξ αὐτῶν:

$$B_1 = \varepsilon_1 V_1 \qquad (2)$$

$$B_2 = \varepsilon_2 V_2 \qquad (3)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε τὸ εἰδ. βάρος τοῦ μίγματος θὰ εἶναι :

$$\varepsilon = \frac{B_1 + B_2}{V_1 + V_2}$$

ἤτοι, ἐκ τῶν (2) καὶ (3) :

$$\varepsilon = \frac{B_1 + B_2}{\frac{B_1}{\varepsilon_1} + \frac{B_2}{\varepsilon_2}}$$

$$\varepsilon = \frac{(B_1 + B_2)\,\varepsilon_1\varepsilon_2}{B_1\varepsilon_2 + B_2\varepsilon_1}$$

καί, ἐκ τῆς (1) :

$$\varepsilon_3 = \frac{(B_1 + B_2)\,\varepsilon_1\varepsilon_2}{B_1\varepsilon_2 + B_2\varepsilon_1}$$

τελικῶς δὲ ἡ ἀναλογία B_1/B_2 εὑρίσκεται :

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1\varepsilon_3}{\varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\varepsilon_1\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{\varepsilon_2\,(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)}$$

$$\boxed{\frac{B_1}{B_2} = \frac{12{,}5}{31{,}5}}$$

288. Ἐπὶ ἐπιφανείας ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1$ gr*/cm³) ἐπιπλέει ξυλίνη σανίς, ἐπιφανείας βάσεως S=320 cm² καὶ ὕψους h=3 cm, βυθιζομένη ἐντὸς τοῦ ὕδατος μέχρι βάθους h′=2,5 cm.

Ζητεῖται : Πόσον βάρος (β) δύναται νὰ φέρει ἄνωθεν αὐτῆς ἡ σανίς, ὥστε νὰ βυθίζεται ἀκριβῶς μέχρι τοῦ ἄνω χείλους της, ἤτοι μέχρι βάθους h.

Λύσις : Ὅταν ἡ σανὶς ἐπιπλέει μόνη της, τότε ἡ ἄνωσίς της (A′) ἰσορροπεῖ τὸ ἄγνωστον βάρος της (B). Εἶναι ὅμως :

$$A' = Sh'\varepsilon_1$$

καί, ἐπειδὴ A=B, εἶναι καί :

$$B = Sh'\varepsilon_1 \qquad (1)$$

Ὅταν, ἐν συνεχείᾳ, ἡ σανὶς ἐπιβαρυνθῇ διὰ τοῦ προσθέτου βάρους β, τότε, βυθιζομένη κατὰ h θὰ παρουσιάζῃ νέαν ἄνωσιν (A), τιμῆς :

$$A = Sh\varepsilon_1 \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε, διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$A = B + \beta$$

προκύπτει, ἐκ τῶν (1) καὶ (2):

$$Sh\varepsilon_1 = Sh'\varepsilon_1 + \beta$$

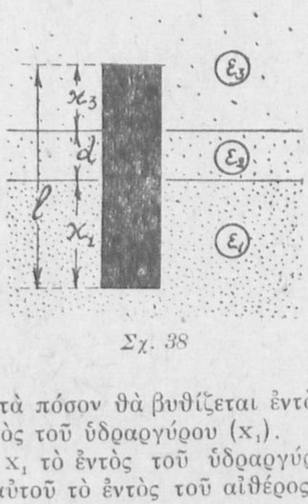
καὶ

$$\beta = S\varepsilon_1 (h - h')$$

$$\beta = 320\,(3 - 2{,}5)\ gr^*$$

$$\boxed{\beta = 480\ gr^*}$$

289. Ἐντὸς λεκάνης περιέχονται ἀλλεπάλληλα τρία ὑγρά: ὑδράργυρος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 13{,}6\ gr^*/cm^3$), ὕδωρ (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 1\ gr^*/cm^3$) καὶ αἰθὴρ (εἰδ. βάρους $\varepsilon_3 = 0{,}7\ gr^*/cm^3$), κατὰ τρόπον τοιοῦτον ὥστε τὸ πάχος τῆς ὑδατίνης στοιβάδος νὰ εἶναι $d = 4$ cm. Ἐμβαπτίζεται ἐν συνεχείᾳ ἐντὸς τῶν ὑγρῶν μακρὰ ράβδος πρισματική, μήκους $l = 20$ cm, ἐκ κασσιτέρου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_4 = 7{,}3\ gr^*/cm^3$), οὕτως ὥστε νὰ ἰσορροπῇ κατακορύφως (ἴδ. σχ. 38), βυθιζομένη ἐξ ὁλοκλήρου ἐντὸς τῶν ὑγρῶν.



Σχ. 38

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον θὰ βυθίζεται ἐντὸς τοῦ αἰθέρος (x_3) καὶ κατὰ πόσον ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου (x_1).

Λύσις: Ἔστω x_1 τὸ ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου βάθος τῆς ράβδου, θὰ εἶναι ἐξ αὐτοῦ τὸ ἐντὸς τοῦ αἰθέρος βάθος (x_3):

$$x_3 = l - (d + x_1) \qquad (1)$$

ὁπότε, ἂν εἶναι A_1, A_2, A_3 αἱ ἀνώσεις εἰς τὰ τρία ὑγρὰ ἀντιστοίχως, ἐκ τῶν κάτω, καὶ B τὸ βάρος τῆς ράβδου, θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις:

$$B = A_1 + A_2 + A_3 \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀλλά, συναρτήσει τῆς ἐπιφανείας βάσεως (S) τῆς ῥάβδου, εἶναι :

$$B = lS\varepsilon_4$$
$$A_1 = x_1 S\varepsilon_1$$
$$A_2 = dS\varepsilon_2$$
$$A_3 = [l - (d + x_1)]\, S\varepsilon_3 \quad (\text{ὡς ἐκ τῆς } (1))$$

ὁπότε ἡ (2) γίνεται :

$$lS\varepsilon_4 = x_1 S\varepsilon_1 + dS\varepsilon_2 + (l - d - x_1)\, S\varepsilon_3$$

Ἐξ ἧς ἔχομεν :

$$x_1 = \frac{l(\varepsilon_4 - \varepsilon_3) - d(\varepsilon_2 - \varepsilon_3)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}$$

καί, δι᾽ ἀντικατασιάσεως τῶν τιμῶν τῶν l, d κλπ., τελικῶς :

$$\boxed{x_1 = 10{,}14 \text{ cm}}$$

ὁπότε τὸ βάθος x_3, τιμῆς διδομένης ὑπὸ τῆς σχέσεως (1), συναρτήσει τοῦ x_1 εἶναι :

$$\boxed{x_3 = 5{,}86 \text{ cm}}$$

X

290. Ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1{,}05$ gr*/cm^3) καὶ εἰς βάθος h=4 m βυθίζεται μικρὰ ξυλίνη σφαῖρα (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 0{,}7$ gr*/cm^3) καὶ ἀφίεται ἐλευθέρα.

Ζητεῖται: Πότε θὰ φθάσῃ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος, ἂν κατὰ τὴν κίνησίν της ὑφίσταται συνεχῶς σταθερὰν δύναμιν ἀντιβῆς (f) ἴσην μὲ τὰ 8/9 τῆς συνισταμένης (F) βάρους καὶ ἀνώσεως (διὰ g=9 m/sec^2).

Λύσις: Ἔστω t ὁ ζητούμενος χρόνος. Πρὸς εὕρεσίν του πρέπει νὰ ἐφαρμοσθῇ ὁ τύπος τῆς ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένης κινήσεως διὰ διάστημα h :

$$h = \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad (1)$$

Ἀλλὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{F - f}{m} \qquad (2)$$

$$F = A - B \qquad (3)$$

ὅπου B καὶ m τὸ βάρος καὶ ἡ μᾶζα τῆς σφαίρας καὶ A ἡ ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἄνωσίς της, εἰδικότερον δέ :

$$A = V\varepsilon_1$$
$$B = V\varepsilon_2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅπου V ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας, ὁπότε ἡ μὲν (3) γίνεται:

$$F = V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

ἡ δὲ (2):

$$\gamma = \frac{V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{8}{9}V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{m}$$

$$\gamma = \frac{V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{9m}$$

$$\gamma = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)g}{9\varepsilon_2} \qquad (4)$$

τελικῶς δέ, ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης (4) τοῦ γ, ἡ (1) γίνεται:

$$h = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)gt^2}{2 \,.\, 9\varepsilon_2}$$

ἐξ ἧς:

$$t = \sqrt{\frac{2.9.\varepsilon_2.h}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2.9.0,7.4}{0,35.g}} \text{ sec}$$

$$t = \sqrt{\frac{2.9.0,7.0,5.8}{0,35.9}} \text{ sec}$$

$$\boxed{t = 4 \text{ sec}}$$

291. Ἀραιόμετρον χρήσιμον πρὸς μέτρησιν τῶν πυκνοτήτων ὑγρῶν ἀραιοτέρων καὶ βαρυτέρων τοῦ ὕδατος, ἐμπειρικῶς βαθμολογημένον ἀπὸ $0^0 - 60^0$, δεικνύει 20^0 ἐντὸς ἐλαιολάδου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 0{,}9$ gr*/cm³) καὶ 40^0 ἐντὸς οἰνοπνεύματος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 0{,}79$ gr*/cm³).

Ζητεῖται: Ποῖον εἰδ. βάρος ὑγροῦ (ε_3) ἀντιστοιχεῖ εἰς τοὺς ἐμπειρικοὺς βαθμοὺς 0^0 καὶ ποῖον (ε_4) εἰς τοὺς 60^0.

Λύσις: Ἔστω V ὁ ὄγκος τοῦ ὀργάνου μέχρι τῶν 0^0, v ὁ ὄγκος ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως βαθμοῦ καὶ B τὸ βάρος τοῦ ἀραιομέτρου.

Ἔχομεν τότε:

α) Κατὰ τὴν ἐντὸς τοῦ ἐλαιολάδου ἰσορροπίαν:

$$B = (V + 20v)\varepsilon_1 \qquad (1,\alpha)$$

β) Κατὰ τὴν ἐντὸς τοῦ οἰνοπνεύματος:

$$B = (V + 40v)\varepsilon_2 \qquad (1,\beta)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γ) Κατὰ τὴν ἐντὸς τοῦ ἀγνώστου ὑγροῦ, εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 0^0:

$$B = V\varepsilon_3 \qquad (2)$$

δ) Κατὰ τὴν ἐντὸς τοῦ ἀγνώστου ὑγροῦ, εἰς τὴν ὑποδιαίρεσιν 60^0:

$$B = (V + 60v)\varepsilon_4 \qquad (3)$$

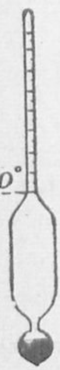
ὁπότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\boxed{\varepsilon_3 = 1{,}032 \ gr^*/cm^3}$$

καί, ἐκ τῶν (1,β), (2) καὶ (3):

$$\boxed{\varepsilon_4 = 0{,}732 \ gr^*/cm^3}$$

292. Ἀραιόμετρον βάρους $B = 222{,}5$ gr* βυθιζόμενον ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1$ gr*/cm³) δεικνύει 0^0 ἰσορροποῦν ἀκριβῶς εἰς τὴν θέσιν ὅπου ἀρχίζουν αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ λεπτοῦ σωλῆνος (εἴδ. σχ. 39).



Σχ. 39

Ζητεῖται: Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ὄγκος ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως ὥστε τὸ ὄργανον νὰ δεικνύει 25^0 ἐντὸς ἐλαίου εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 0{,}89$ gr*/cm³.

Λύσις: Ἔστω V ὁ ὄγκος τοῦ ὀργάνου μέχρι τοῦ 0^0. Αἱ ἰσχύουσαι σχέσεις θὰ εἶναι τότε:

α) Διὰ τὴν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἰσορροπίαν:

$$B = V\varepsilon_1 \qquad (1)$$

β) Διὰ τὴν ἐντὸς τοῦ ἐλαίου:

$$B = (V + 25v)\varepsilon_2 \qquad (2)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$B = \left(\frac{B}{\varepsilon_1} + 25\,v\right)\varepsilon_2$$

$$v = \frac{B\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{25\varepsilon_1\varepsilon_2}$$

$$\boxed{v = 7{,}1 \ cm^3}$$

293. Ἐντὸς κυλινδρικοῦ δοχείου ἐπιφανείας βάσεως $S_1 = 30$ cm² περιέχοντος ὕδωρ (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1$ gr*/cm³) ἐμβαπτίζεται ξύλινος δίσκος παρουσιάζων ὁριζοντίαν ἐπιφάνειαν βάσεως $S_2 = 24$ cm² καὶ ὕψος $y = 3$ cm, εἰδικοῦ δὲ βάρους $\varepsilon_2 = 0{,}6$ gr*/cm³.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον (x) θ' ἀνυψωθῇ ἡ στάθμη τοῦ ἐντὸς τοῦ δοχείου ὕδατος.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Κατὰ τὴν ἰσορρόπησιν τοῦ δίσκου ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἔχομεν ἰσότητα μεταξὺ βάρους καὶ ἀνώσεως, ἤτοι :

$$yS_2\varepsilon_2 = \varepsilon_1 V$$

ὅπου V ὁ ἐκτοπιζόμενος ὑδάτινος ὄγκος, ὁπότε εἶναι :

$$V = \frac{yS_2\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \qquad (1)$$

Ὁ ἐκτοπιζόμενος ὅμως οὗτος ὄγκος, ἕνεκα τοῦ ἀσυμπιέστου τοῦ ὑγροῦ, θὰ εἶναι ἀφ' ἑτέρου :

$$V = (S_1 - S_2)\,x \qquad (2)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν :

$$x = \frac{yS_2\varepsilon_2}{(S_1 - S_2)\,\varepsilon_1}$$

$$x = \frac{3.24.0,6}{6.1}\ \frac{cm\,.\,cm^2.\,gr^*.\,cm^3}{cm^2.\,gr^*.\,cm^3}$$

$$\boxed{x = 7,2\ cm}$$

294. Πυκνόμετρον σταθεροῦ ἐκτοπίσματος $V = 75\ cm^3$, χρήσιμον πρὸς μέτρησιν τοῦ εἰδ. βάρους ὑγρῶν, πρέπει νὰ φορτωθῇ διὰ προσθέτου βάρους $\beta = 7\ gr^*$ διὰ νὰ ἰσορροπήσῃ ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1\ gr^*/cm^3$).

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάρος (Β) τοῦ ὀργάνου.

Λύσις: Κατὰ τὴν ἐντὸς ὕδατος ἰσορρόπησιν τοῦ ὀργάνου θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις :

$$B + \beta = V\varepsilon_1$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν :

$$B = V\varepsilon_1 - \beta$$

$$\boxed{B = 68\ gr^*}$$

295. Δίδεται ἀραιόμετρον σταθεροῦ ἐκτοπίσματος $V = 50\ cm^3$, διὰ τὴν μέτρησιν εἰδ. βάρους ὑγρῶν, ὅπερ ἰσορροπεῖ ἐντὸς γλυκερίνης (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1,26\ gr^*/cm^3$) διὰ προσθήκης προσθέτου βάρους $\beta = 13\ gr^*$.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ἐλάχιστον εἰδ. βάρος (ε_2) ὑγροῦ, ὅπερ δύναται νὰ προσδιορισθῇ διὰ τοῦ ὀργάνου τούτου.

Λύσις: Κατὰ τὴν ἐντὸς γλυκερίνης ἰσορρόπησιν, θὰ ἰσχύῃ, ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, ἡ σχέσις :

$$B + \beta = V\varepsilon_1 \qquad (1)$$

ἂν ὡς Β ληφθῇ τὸ βάρος τοῦ ὀργάνου.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

᾿Αλλὰ τὸ ἐλάχιστον εἰδ. βάρος ὑγροῦ θὰ εἶναι τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ ἄνευ προσθέτου βάρους ἰσορροποῦν ὄργανον, ὁπότε ἡ πρὸς τοῦτο ἀπαιτουμένη σχέσις εἶναι :

$$B = V\varepsilon_2 \qquad (2)$$

ἐξ ἧς καὶ τῆς (1) εὑρίσκομεν :

$$V\varepsilon_2 + \beta = V\varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{V\varepsilon_1 - \beta}{V}$$

$$\boxed{\varepsilon_2 = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3}$$

ἤτοι τὸ ὄργανον δύναται νὰ χρησιμεύσῃ δι᾿ ὑγρὰ μεγαλυτέρου, τοῦ ὕδατος, εἰδικοῦ βάρους.

296. Πυκνόμετρον σταθεροῦ βάρους ἔχει μέχρι τῆς ὑποδιαιρέσεως 0^0, ἀντιστοιχούσης εἰς καθαρὸν ὕδωρ (εἰδ. βάρους ε_1=1 gr*/cm^3), ὄγκον V=12,8 cm^3, καὶ δεικνύει 40^0 ἐντὸς πετρελαίου (εἰδ. βάρους ε_2=0,8 gr*/cm^3).

Ζητεῖται: Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ τομὴ (s) τοῦ βαθμολογημένου σωλῆνος, ὥστε ἕκαστος βαθμὸς τῆς ὑποδιαιρέσεως νὰ παριστάνεται ὑπὸ μήκους λ=0,4 cm.

Λύσις: Ἔστω v ὁ ὄγκος ἑκάστης ὑποδιαιρέσεως. Οὗτος θὰ εἶναι :

$$v = s \, . \, \lambda \qquad (1)$$

᾿Αλλ᾿ ἐκ μὲν τῆς ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἰσορροπίας ἔχομεν :

$$B = V\varepsilon_1 \qquad (2)$$

ἐκ δὲ τῆς ἐντὸς τοῦ πετρελαίου :

$$B = (V + 40\, v)\varepsilon_2 \qquad (3)$$

ἂν εἶναι B τὸ βάρος τοῦ ὀργάνου.

Εὑρίσκομεν τότε, ἐκ τῶν (2) καὶ (3) :

$$V\varepsilon_1 = V\varepsilon_2 + 40 v\varepsilon_2$$

$$v = \frac{V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{40\varepsilon_2} \qquad (4)$$

ὁπότε, ἐκ τῆς (1), ἡ (4) γίνεται :

$$s.\lambda = \frac{V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{40\varepsilon_2}$$

καὶ

$$s = \frac{V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{40\lambda\varepsilon_2}$$

$$\boxed{s = 0{,}2 \text{ cm}^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

297. Πυκνόμετρον σταθεροῦ ἐκτοπίσματος (V) ἰσορροπεῖ ἐντὸς τερεβινθελαίου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 0{,}86$ gr*/cm^3) διὰ προσθήκης προσθέτου βάρους $\beta_1 = 12{,}2$ gr*, ἰσορροπεῖ δὲ ἐντὸς πετρελαίου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 0{,}84$ gr*/cm^3) διὰ προσθήκης βάρους $\beta_1 = 4{,}3$ gr*.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ἀρχικὸν βάρος τοῦ ὀργάνου (B) καὶ ποῖος ὁ σταθερὸς ὄγκος ὃν ἐκτοπίζει (V).

Λύσις: Κατὰ τὰς ἐντὸς τῶν δύο ὑγρῶν ἰσορροπήσεις τοῦ ὀργάνου θὰ ἰσχύουν, ἀντιστοίχως, αἱ κάτωθι σχέσεις:

$$B + \beta_1 = V\varepsilon_1 \qquad (1)$$

καὶ

$$B + \beta_2 = V\varepsilon_2 \qquad (2)$$

ἀποτελοῦσαι σύστημα δύο ἀγνώστων (τῶν B καὶ V), ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους λύομεν τοῦτο καὶ εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\boxed{\begin{array}{l} B = 327{,}5 \text{ gr}^* \\ V = 395 \text{ cm}^3 \end{array}}$$

298. Ἐντὸς δοχείου περιέχοντος ὕδωρ (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 1$ gr*/cm^3), τίθεται ξυλίνη σφαῖρα βάρους $B = 150$ gr*, ὁπότε αὕτη βυθίζεται κατὰ τὰ $^8/_{10}$ τοῦ ὄγκου της. Ἀκολούθως ἐντὸς τοῦ δοχείου ρίπτεται αἰθὴρ (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 0{,}7$ gr*/cm^3) μέχρις ὅτου καλυφθῇ ὑπ' αὐτοῦ ἡ σφαῖρα.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος (ε) τοῦ ξύλου καὶ πόσος ὄγκος (V') θὰ βυθίζεται ἐντὸς τοῦ αἰθέρος κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας.

Λύσις: Ἔστω V ὁ ὅλος ὄγκος τῆς σφαίρας. Οὗτος θὰ συνδέεται μὲ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα ταύτης διὰ τῆς γνωστῆς σχέσεως:

$$V = \frac{B}{\varepsilon} \qquad (1)$$

Κατὰ τὴν ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἰσορροπίαν θὰ ἰσχύῃ ἀφ' ἑτέρου ἡ ἐξίσωσις:

$$B = \frac{8}{10} V\varepsilon_1$$

ἥτις, δυνάμει τῆς (1), γίνεται:

$$B = \frac{8B\varepsilon_1}{10\varepsilon}$$

ὁπότε προκύπτει:

$$\varepsilon = \frac{8\varepsilon_1}{10}$$

$$\boxed{\varepsilon = 0{,}8 \text{ gr}^*/\text{cm}^3}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐν συνεχείᾳ, μετὰ τὴν προσθήκην τοῦ αἰθέρος, ἔχομεν, κατὰ τὴν ἐπίτευξιν τῆς μεταξὺ τῶν δύο ὑγρῶν ἰσορροπίας τῆς σφαίρας:

$$B = (V - V')\varepsilon_1 + V'\varepsilon_2$$

καί, ὡς ἐκ τῆς (1):

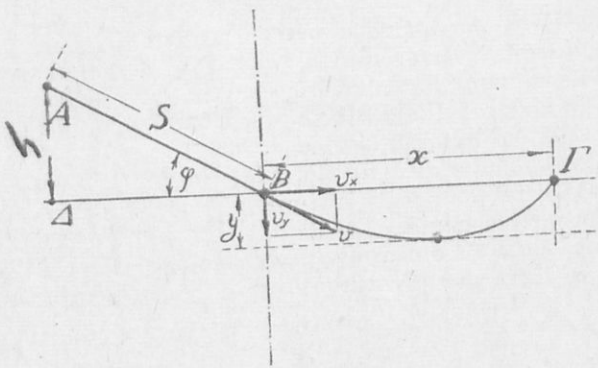
$$B = \left(\frac{B}{\varepsilon} - V'\right)\varepsilon_1 + V'\varepsilon_2$$

ὁπότε προκύπτει:

$$V' = \frac{B(1-\varepsilon)}{\varepsilon(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$$

$$\boxed{V' = 123 \text{ cm}^3}$$

299. Κεκλιμένου ἐπιπέδου, μήκους $S = 30$ cm, καὶ κλίσεως $\varphi = 30^\circ$ τὸ κάτω ἄκρον ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας ὕδατος (ἴδ. σχ. 40). Ἐκ τοῦ ἀνωτέρου σημείου τούτου (A) ἀφίεται κυ-



Σχ. 40

λιομένη σφαῖρα ξυλίνη (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 0{,}7$ gr*/cm³), ἥτις, διανύουσα τὸ διάστημα S ἄνευ τριβῆς φθάνει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon = 1$ gr*/cm³), βυθίζεται μέχρι βάθους τινος (y) καὶ ἐπανεμφανίζεται εἰς τὴν ἐπιφάνειαν εἰς σημεῖόν τι (Γ) εἰς ἀπόστασιν x ἀπὸ τοῦ σημείου βυθίσεως (B).

Ζητεῖται: Πόσον εἶναι τὸ βάθος τοῦτο (y), καὶ πόσον τὸ μῆκος (x), δεδομένου ὅτι ἡ σφαῖρα κινεῖται ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἄνευ τριβῆς.

Λύσις: Ἔστω h ἡ ἀπόστασις τοῦ A ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος, m ἡ μᾶζα καὶ V ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἰς τὸ ἀρχικὸν σημεῖον Α ἡ κεκτημένη ὑπὸ τοῦ σώματος θέσει ἐνέργεια ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΓΔ εἶναι:

$$E_0 = h \, . \, mg$$

Ἡ ἐνέργεια αὕτη, μετατρεπομένη εἰς κινητικὴν εἰς τὸ σημεῖον Β δύναται νὰ μετατοπίσῃ τὴν συνισταμένην ἀνώσεως καὶ βάρους δύναμιν κατὰ βάθος τι y, μὲ κατανάλωσιν ἔργου:

$$W = Vy(\varepsilon - \varepsilon_1)$$

ἴσου πρὸς τὴν ἐνέργειαν ταύτην, ἐξ οὗ προκύπτει ἡ σχέσις:

$$E_0 = W$$

ἢ

$$hmg = Vy(\varepsilon - \varepsilon_1)$$

ἐξ ἧς τελικῶς, δι᾽ ἐκτελέσεως τῶν διαφόρων πράξεων, εὑρίσκομεν:

$$y = \frac{\varepsilon_1 h}{\varepsilon - \varepsilon_1}$$

$$y = \frac{\varepsilon_1 S \, . \, \eta\mu\varphi}{\varepsilon - \varepsilon_1}$$

$$\boxed{y = 35 \text{ cm}}$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μήκους x, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν εἰς τὸ Β ταχύτητα τῆς σφαίρας (v) ἥτις εἶναι:

$$v = \sqrt{2gS\eta\mu\varphi}$$

καὶ ἐξ ἧς προκύπτει ἡ ὁριζοντία της συνιστῶσα (v_x) τιμῆς:

$$v_x = \sigma\upsilon\nu\varphi \sqrt{2gS\eta\mu\varphi}$$

Εὑρίσκομεν ἐν συνεχείᾳ τὸν χρόνον (t) εἰς τὸν ὁποῖον ἡ σφαῖρα βυθίζεται μέχρι τοῦ y:

$$t = \frac{\varepsilon_1 \eta\mu\varphi}{(\varepsilon - \varepsilon_1)} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ὁπότε τὸ x θὰ εἶναι:

$$x = 2v_x t$$

ἤτοι:

$$x = \frac{4\eta\mu^2\varphi \, . \, \sigma\upsilon\nu\varphi \, . \, \varepsilon_1 S}{\varepsilon - \varepsilon_1}$$

$$\boxed{x = 60{,}62 \text{ cm}}$$

300. Ἀπὸ ξυλίνην σφαῖραν βάρους $B_1 = 100$ gr* καὶ εἰδ. βάρους $\varepsilon_1 = 0{,}6$ gr*/cm³ ἐξαρτᾶται διὰ λεπτοῦ νήματος ἑτέρα χαλκίνη σφαῖρα, βάρους $B_2 = 10$ gr* καὶ εἰδ. βάρους $\varepsilon_2 = 9{,}8$ gr*/cm³,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι, κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν ἰσορροπίας, ἡ ἀπόστασις (x_1) τῶν ἐλευθέρων ἐπιφανειῶν τῶν δύο ὑγρῶν καὶ ποία ἡ ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ μέχρι τῆς ἐλευθέρας τοῦ ὑδραργύρου (x_2).

Λύσις: $x_1=14{,}11$ cm, $x_2=1$ cm.

307. Σῶμά τι ἐντὸς γλυκερίνης (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=1{,}26$ gr*/cm^3) ζυγίζει $B_1=38{,}5$ gr*, ἐντὸς δὲ θειϊκοῦ ὀξέος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2=1{,}9$ gr*/cm^3) ζυγίζει $B_2=32{,}1$ gr*.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν βάρος τοῦ σώματος (B), ποῖος ὁ ὄγκος του (V) καὶ ποία ἡ πυκνότης του (d).

Λύσις: $B=51{,}1$ gr*, $V=10$ cm^3, $d=5{,}11$ gr/cm^3.

308. Δύο μεταλλικαὶ σφαῖραι ἰσοβαρεῖς, ἀλλὰ διαφορετικῆς πυκνότητος, ἀντιστοίχως $d_1=9$ gr/cm^3 καὶ $d_2=8$ gr/cm^3, ἐξαρτώμεναι ἐκ τῶν ἄκρων φαλάγγων ζυγοῦ ἐμβαπτίζονται ἐντὸς οἰνοπνεύματος (εἰδ. βάρους $\varepsilon=0{,}8$ gr*/cm^3).

Ζητεῖται: Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν μοχλοβραχιόνων τοῦ ζυγοῦ (l_1/l_2) ἵνα οὗτος ἰσορροπῇ ὅταν αἱ σφαῖραι εὑρίσκονται ἐντὸς τοῦ ὑγροῦ.

Λύσις: $l_1/l_2=81/82$.

309. Σῶμά τι εἰς τὸν ἀέρα ζυγίζει $B_1=10$ gr*, ἐντὸς δὲ τοῦ ὕδατος $B_2=7{,}5$ gr*.

Ζητεῖται: Ποία πυκνότητα (d) πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ὑγρὸν ἐντὸς τοῦ ὁποίου τὸ σῶμα νὰ ζυγίζῃ $B_3=6$ gr*, ἂν τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι $\varepsilon=1$ gr*/cm^3.

Λύσις: $d=1{,}6$ gr/cm^3.

310. Κυλινδρικὸν δοχεῖον, τομῆς $S_1=120$ cm^2 περιέχει ὕδωρ (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=1$ gr*/cm^3) μέχρις ὕψους $h=30$ cm, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ ρίπτεται ξύλινος κύλινδρος, τομῆς $S_2=80$ cm^2 μήκους $\lambda=10$ cm καὶ εἰδ. βάρους $\varepsilon_2=0{,}7$ gr*/cm^3.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον (y) θ' ἀνέλθῃ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ δοχείου.

Λύσις: $y=4{,}66$ cm.

311. Ἐντὸς ὑδραργύρου, εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=13{,}596$ gr*/cm^3 βυθίζεται σιδηροῦς κῶνος, διὰ τῆς κορυφῆς του, ἔχων ὕψος $h=22$ cm καὶ πυκνότητα $\varepsilon_2=7{,}788$ gr*/cm^3.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον (y) θὰ βυθισθῇ ὁ κῶνος ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου, ὅταν ἐπιτευχθῇ ἰσορροπία.

Λύσις: $y=18{,}271$ cm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

312. Κύβος ἐξ ἀργιλλίου, εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=2{,}35$ gr*/cm^3 καὶ πλευρᾶς $\lambda=20$ cm, ἐμβαπτίζεται ἐντὸς ὑδραργύρου, εἰδ. βάρους $\varepsilon_2=13{,}6$ gr*/cm^3.

Ζητεῖται: Ποῖον μέρος τοῦ ὕψους του (y) εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ ὑδραργύρου.

Λύσις: $y=3{,}53$ cm.

313. Πυκνόμετρον σταθεροῦ ἐκτοπίσματος χρειάζεται πρόσθετον βάρος $\beta_1=8{,}59$ gr* ἵνα βυθισθῇ μέχρι τοῦ σημείου ἐπιπολῆς ἐντὸς ὑγροῦ, εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=0{,}73$ gr*/cm^3, πρόσθετον δὲ βάρος $\beta_2=101{,}75$ gr* ἵνα βυθισθῇ μέχρι τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐντὸς ὑγροῦ, εἰδ. βάρους $\varepsilon_2=1{,}85$ gr*/cm^3.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάρος (Β) τοῦ ὀργάνου, ὡς καὶ ποῖον τὸ ἀπαιτούμενον πρόσθετον βάρος (β_x) διὰ τὴν ἐντὸς καθαροῦ ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon=1$ gr*/cm^3) ἰσορρόπησιν μέχρι τοῦ αὐτοῦ ὡς ἄνω σημείου ἐπιπολῆς.

Λύσις: $B=52{,}13$ gr*, $\beta_x=19{,}28$ gr*.

314. Ξυλίνη σφαῖρα, ἐμβαπτιζομένη ἐντὸς γλυκερίνης (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=1{,}26$ gr*/cm^3) βυθίζεται μέχρι τῶν $^2/_3$ τοῦ ὄγκου της (V), ἐμβαπτιζομένη δὲ ἐντὸς σακχαρούχου διαλύματος βυθίζεται μέχρι τῶν 42/75 τοῦ ὄγκου της.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τῆς ξυλίνης σφαίρας (ε) καὶ ποῖον τὸ τοῦ σακχαρούχου διαλύματος (ε_2).

Λύσις: $\varepsilon=0{,}84$ gr*/cm^3, $\varepsilon_2=1{,}5$ gr*/cm^3.

315. Ξυλίνη σφαῖρα, εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=0{,}6$ gr*/cm^3 καὶ ὄγκου $V_1=63{,}9$ cm^3 βυθίζεται ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon=1$ gr*/cm^3). Ἀπὸ τὸ κάτω μέρος της, δι᾽ ἀβαροῦς νήματος ἐξαρτᾶται ἑτέρα σφαῖρα μεταλλίνη βάρους $B_2=7{,}1$ gr*, ὁπότε τὸ ὅλον σύστημα διατηρεῖ τὴν ἰσορροπίαν του εἰς οἱανδήποτε θέσιν ἐντὸς τοῦ ὕδατος.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος (ε_2) τῆς μεταλλίνης σφαίρας.

Λύσις: $\varepsilon_2=4{,}6$ gr*/cm^3.

316. Ξυλίνη σανίς, ὕψους $h=2{,}7$ cm καὶ πυκνότητος $d=0{,}8$ gr/cm^3, ἐπιπλέει εἰς τὴν διαχωριστικὴν ἐπιφάνειαν ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=1$ gr*/cm^3) καὶ αἰθέρος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2=0{,}73$ gr*/cm^3).

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον θὰ βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος (h_1) καὶ κατὰ πόσον ἐντὸς τοῦ αἰθέρος (h_2).

Λύσις: $h_1=0{,}7$ cm, $h_2=2$ cm.

317. Μεταλλίνη σφαῖρα κενή, ὄγκου $V=56$ cm^3 καὶ βά-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ρους Β=27 gr*, ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἀπὸ ὕψους τινὸς (h) ὁπότε βυθίζεται ἐντὸς τοῦ ὕδατος μέχρι βάθους y=29,9 cm.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος h ἂν τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι ε=1 gr*/cm³, μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ὑγροῦ.

Λύσις: h=31,9 cm.

318. Ἀπὸ τοῦ πυθμένος δοχείου, περιέχοντος γλυκερίνην (εἰδ. βάρους ε_1=1,26 gr*/cm³) ἀφίεται ἐλεύθερον τεμάχιον ξύλου (εἰδ. βάρους ε_2=0,6 gr*/cm³) ὁπότε τοῦτο, φθάνον εἰς τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν ἐκτινάσσεται μέχρις ὕψους y = 66 cm ἄνωθεν αὐτῆς.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάθος τοῦ πυθμένος (h) ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ, μὴ λαμβανομένης ὑπ᾽ ὄψιν τῆς ἀντιστάσεως τούτου.

Λύσις: h=60 cm.

319. Ἀραιόμετρον σταθεροῦ βάρους ἐμπειρικῶς βαθμολογημένον δεικνύει 0° ἐντὸς ὕδατος, καὶ 66° ἐντὸς θειϊκοῦ ὀξέος πυκνότητος d=1,84 gr/cm³.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ πυκνότης (d′) ὑγροῦ ἔχοντος, ἐμπειρικῶς, πυκνότητα 15° διὰ τοῦ ὡς ἄνω ἀραιομέτρου, ἂν ἡ πυκνότης τοῦ ὕδατος εἶναι δ=1 gr/cm³.

Λύσις: d′=1,115 gr/cm³.

320. Ἀραιόμετρον σταθεροῦ βάρους, ἐμπειρικῶς βαθμολογημένον δεικνύει 35° ἐντὸς οἰνοπνεύματος (εἰδ. βάρους ε_1=0,8 gr*/cm³) καὶ 0° ἐντὸς ὑγροῦ εἰδ. βάρους ε_2=1,111 gr*/cm³.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους ε=1 gr*/cm³) ἔνδειξις (x) τοῦ ὀργάνου.

Λύσις: x=10°.

321. Ἀραιόμετρον σταθεροῦ βάρους Β=70 gr*, ἐμπειρικῶς βαθμολαγημένον παρουσιάζει ὑποδιαιρέσεις, ὧν ἑκάστη ἔχει ὄγκον v = 0,9 cm³, δεικνύει δὲ 0° ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους ε_1=1 gr*/cm³).

Ζητεῖται: Πόσους βαθμοὺς θὰ δεικνύῃ (x) ἐντὸς αἰθέρος εἰδ. βάρους ε_2=0,7 gr*/cm³.

Λύσις: x=33,33°.

322. Λαμβάνονται ὡς θεμελιώδεις διαστάσεις, εἰς αὐθαίρετόν τι σύστημα διαστάσεων, αἱ τῆς πυκνότητος [d], εἰδ. βάρους [ε] καὶ χρόνου [t].

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθοῦν συναρτήσει αὐτῶν αἱ διαστάσεις

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐπιταχύνσεως (γ), ταχύτητος (v), διαστήματος (S), ὄγκου (V), μάζης (M) καὶ δυνάμεως (F).

Λύσις: $[\gamma]=[\varepsilon].[d]$, $[v]=[\varepsilon]\,[d]\,[t]$, $[S]=[\varepsilon]\,[d]\,[t^2]$, $[V]=[\varepsilon^3]\,[d^3]\,[t^6]$, $M=[\varepsilon^3]\,[d^4]\,[t^6]$, $[F]=[\varepsilon^4]\,[d^3]\,[t^6]$. ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

323. Ξυλίνη σφαῖρα, εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=0{,}8$ gr*/cm^3 ἀφίεται νὰ πέσῃ ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon_2=1$ gr*/cm^3) ἀπὸ ὕψους τινος $h=20$ m ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας του.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐντὸς τοῦ ὕδατος ταχύτης τῆς σφαίρας (v) μετὰ χρόνον $t=10$ sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς ἀφ᾽ ἧς ἀφέθη ἐλευθέρα ($g=10$ m/sec^2).

Λύσις: $v=0$.

324. Ξυλίνη σφαῖρα, μάζης $m=0{,}44$ Kg πίπτουσα ἔκ τινος ὕψους ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διαλύματος σακχάρου (εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=1{,}4$ gr*/cm^3) βυθίζεται μέχρι βάθους $h=0{,}6$ m.

Ζητεῖται: Πόσον ἔργον (W) καταναλίσκεται κατὰ τὴν βύθισιν ταύτην, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου εἶναι $\varepsilon_2=0{,}8$ gr*/cm^3.

Λύσις: $W=0{,}198$ Kg*m.

325. Ξυλίνη σφαῖρα εἰδ. βάρους $\varepsilon_1=0{,}7$ gr*/cm^3, ἀφίεται ἐντὸς ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon=1$ gr*/cm^3).

Ζητεῖται: Ἂν τὸ βάρος τῆς ξυλίνης ταύτης σφαίρας εἶναι $B_1=55{,}3$ gr*, πόσον βάρος (B_2) χαλκοῦ δύναται ν᾽ ἀναρτηθῇ κάτωθεν ταύτης δι᾽ ἀβαροῦς νήματος, ὥστε τὸ ὅλον σύστημα νὰ ἰσορροπῇ ἐντὸς τοῦ ὕδατος βυθιζόμενον ἐξ ὁλοκλήρου (εἰδ. βάρος τοῦ χαλκοῦ $\varepsilon_2=8{,}9$ gr*/cm^3).

Λύσις: $B_2=26{,}7$ gr*.

ΥΔΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

326. Ἐντὸς σωλῆνος ὁριζοντίου, μεταβλητοῦ πάχους, ρέει ὕδωρ μὲ νηματώδη ροήν, ὁπότε εἰς σημεῖόν τι τοῦ σωλῆνος, ὅπου ἡ ταχύτης ροῆς εἶναι $v_1=5$ cm/sec ἡ ἀσκουμένη πίεσις εἶναι $P_1=50$ dynes/cm^2.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ πίεσις (P_2) εἰς ἕτερον σημεῖον ὅπου ἡ ταχύτης ροῆς εἶναι $v_2=2$ cm/sec, δεδομένης τῆς πυκνότητος τοῦ ὕδατος $d=1$ gr/cm^3.

Λύσις: Ἡ ζητουμένη πίεσις P_2 θὰ εὑρεθῇ διὰ χρησιμοποιήσεως τοῦ τύπου τοῦ Bernoulli:

$$\frac{P_1}{dg}+h_1+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{P_2}{dg}+h_2+\frac{v_2^2}{2g}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅστις δι᾽ ὁριζοντίαν ροὴν ($h_1 = h_2$) λαμβάνει μορφήν:

$$\frac{P_1}{dg} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{P_2}{dg} + \frac{v_2^2}{2g}$$

ὁπότε προκύπτει:

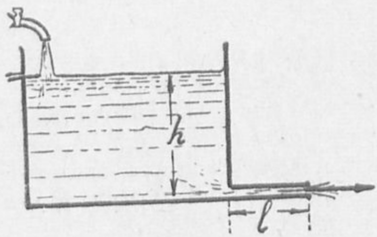
$$P_2 = P_1 + \frac{d(v_1^2 - v_2^2)}{2}$$

καί, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τοῦ P_1 κλπ. τελικῶς:

$$P_2 = 50 + \frac{(25-4)}{2} \text{ dynes/cm}^2$$

$$\boxed{P_2 = 60{,}5 \text{ dynes/cm}^2}$$

327. Ἐντὸς δοχείου περιέχεται ὕδωρ μέχρι σταθεροῦ ὕψους $h = 30$ cm ἀπὸ πλαγίου σωλῆνος (ἴδ. σχ. 42), μήκους $l = 10$ cm καὶ ἀκτῖνος τομῆς $R = 1$ cm.



Σχ. 42

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ κατ᾽ ὄγκον παροχὴ ὕδατος διὰ τοῦ πλαγίου τούτου σωλῆνος, ἂν τὸ ὕδωρ ἔχῃ συντελεστὴν τριβῆς, εἰς μονάδας cgs, $\eta = 0{,}018$ cgs καὶ ἡ ροὴ εἶναι νηματώδης.

Λύσις: Ἡ ζητουμένη παροχὴ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου τοῦ Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi R^4 P}{8\eta l}$$

ἰσχύοντος εἰς ἑκάστην νηματώδη ροήν, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὴν παρεχομένην εἰς ἕκαστον sec ποσότητα ὕδατος (Q) εἰς cm^3, δεδομένου ὅτι ἡ πίεσις P εἶναι $P = h\varepsilon$ ὅπου ε τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ:

$$Q = \frac{\pi . R^4 . h . \varepsilon}{8\eta l}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε :

$$Q = \frac{3,14.30.981}{8.0,018.10} \text{ cm}^3/\text{sec}$$

$$\boxed{Q = 64173 \text{ cm}^3/\text{sec}}$$

328. Γλυκερίνη, ῥέουσα διὰ σωλῆνος ἀκτῖνος τομῆς R = 10,4 cm καὶ μήκους l=0,196 cm, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν σταθερᾶς ὑδροστατικῆς πιέσεως ὀφειλομένης εἰς ὑπερκειμένην ποσότητα μέχρις ὕψους h=776 cm, ἐξέρχεται τοῦ στομίου τοῦ σωλῆνος μὲ παροχὴν κατὰ βάρος B=3080,34 gr*/sec.

Ζητεῖται : Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς ἰξώδους τῆς γλυκερίνης (η), ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος της εἶναι ε=1,26 gr*/cm³.

Λύσις : Πρὸς εὕρεσιν τοῦ συντελεστοῦ η λαμβάνομεν τὸν τύπον τοῦ Poiseuille :

$$Q = \frac{\pi R^4 P}{8\eta l}$$

ὅστις, διὰ P=hε καὶ $Q = \frac{B}{\varepsilon}$, γίνεται :

$$\frac{B}{\varepsilon} = \frac{\pi R^4 h\varepsilon}{8\eta l}$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν ἐν συνεχείᾳ τὴν σχέσιν :

$$\eta = \frac{\pi R^4 h\varepsilon^2}{8Bl}$$

ὁπότε, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν R, h, B κλπ. καὶ μετατροπῆς τούτων εἰς cgs, εὑρίσκομεν τελικῶς :

$$\boxed{\eta = 9,7 \text{ gr/cm.sec}}$$

329. Δίδεται ὁριζόντιος σωλὴν ἀκτῖνος τομῆς ρ=2 cm ἐντὸς τοῦ ὁποίου ῥέει οἰνόπνευμα συντελεστοῦ ἰξώδους η=0,0124 cgs καὶ πυκνότης d=0,8 gr/cm³.

Ζητεῖται : Ποία εἶναι ἡ μεγίστη ταχύτης (v) ἣν δύναται νὰ λάβῃ τὸ οἰνόπνευμα ῥέον ἐντὸς τοῦ σωλῆνος χωρὶς νὰ γίνῃ ἡ ῥοὴ στροβιλώδης.

Λύσις : Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Reynolds :

$$R = \frac{dv\rho}{\eta}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὑρίσκομεν τὴν μεγίστην ταχύτητα v διὰ τιμὴν τοῦ R=1000, ὁπότε ἔχομεν :

$$v = \frac{1000\eta}{d\varrho}$$

$$v = \frac{1000.0{,}0124}{0{,}8.2}\,\frac{cm}{sec}$$

$$\boxed{v = 7{,}75\ cm/sec}$$

330. Ἐντὸς ὁριζοντίου σωλῆνος ἀκτῖνος τομῆς $\varrho=2$ cm καὶ μήκους $l=9810$ m ῥέει ὕδωρ, πυκνότητος $d=1\ gr/cm^3$ καὶ συντελεστοῦ ἰξώδους $\eta=0{,}018$ cgs.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μεγίστη πίεσις (P) ἥτις δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σωλῆνος ὥστε ἡ ῥοὴ νὰ διατηρῆται νηματώδης.

Λύσις: Ἵνα διατηρῆται νηματώδης ἡ ῥοὴ πρέπει ἡ ταχύτης (v) τοῦ ὑγροῦ νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε ὁ ἀριθμὸς τοῦ Reynolds νὰ γίνῃ τὸ πολὺ R=1000. Ὡς ἐκ τούτου θὰ πρέπει νὰ εἶναι :

$$v = \frac{1000\eta}{d\varrho} \tag{1}$$

ἀλλὰ ἡ ταχύτης αὕτη συνδέεται ἀφ᾽ ἑτέρου μὲ τὴν εἰς ὄγκον παροχὴν διὰ τοῦ τύπου :

$$Q = v\,.\,S \tag{2}$$

ὅπου S ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος ($S=\pi\varrho^2$).

Γίνεται τότε ἡ (1) ὡς ἐκ τῆς (2) :

$$Q = \frac{1000\eta\pi\varrho^2}{d\varrho}$$

ἤτοι :

$$Q = \frac{1000\pi\eta\varrho}{d} \tag{3}$$

ὁπότε τελικῶς, ἐπειδὴ ἡ παροχὴ συνδέεται καὶ μὲ τὴν πίεσιν διὰ τοῦ τύπου τοῦ Poiseuille, προκύπτει ἐκ τῆς (3) ἡ σχέσις :

$$\frac{1000\pi\eta\varrho}{d} = \frac{\pi\varrho^4 P}{8\eta l}$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν :

$$P = \frac{8000.\eta^2 l}{d\varrho^3}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$P = \frac{8000.0,000324.9810}{8} \text{ dynes/cm}^2$$

$$P = \frac{8.10^3.324.10^{-6}.981.10}{8.981.10^3} \text{ Kg*/cm}^2$$

$$\boxed{P = 0,324 \text{ Kg*/cm}^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

331. Ἐντὸς σωλῆνος μεταβλητοῦ πάχους ρέει γλυκερίνη μὲ ροὴν νηματώδη, ὁπότε ἡ εἰς ὕψος τι h_1=50 cm πίεσίς της εἶναι P_1=3,78 gr*/cm² ἡ δὲ ταχύτης ροῆς v_1=9,81 cm/sec.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ πίεσις (P_2) εἰς σημεῖόν τι τοῦ σωλῆνος εἰς ὕψος h_2=51,05 cm ὑπὸ ταχύτητα ροῆς v_2=2 cm/sec ἂν ὁ συντελεστὴς ἰξώδους τῆς γλυκερίνης εἶναι η=9,71 cgs, καὶ ἡ πυκνότης της d=1,26 gr/cm³.

Λύσις: $P_2 \simeq 2,52$ gr*/cm².

332. Θειϊκὸν ὀξὺ ρέει ἐντὸς σωλῆνος ἀκτῖνος τομῆς ρ=37,2 cm μὲ ταχύτητα v=5,55 cm/sec.

Ζητεῖται: Ποῖος θὰ εἶναι ὁ διὰ τὴν ροὴν ταύτην ἀριθμὸς τοῦ Reynolds, ἂν τὸ θειϊκὸν ὀξὺ ἔχει συντελεστὴν ἰξώδους η=0,999 cgs καὶ πυκνότητα d=1,8 gr*/cm³.

Λύσις: R=372 (ροὴ νηματώδης, καθ' ὅσον 372<1000).

332. Ὑγρόν τι, ρέον ἐντὸς ὁριζοντίου σωλῆνος, μήκους l=153,767 m καὶ ἀκτῖνος τομῆς R=1,2 cm, ἐμφανίζει παροχὴν Q=0,005 lit/sec, ὑπὸ ροὴν ὑποτιθεμένην νηματώδη, δεχόμενον εἰς τὸ ἓν ἄκρον τοῦ σωλῆνος πίεσιν P=0,2 Kg*/cm².

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς ἰξώδους του (η).

Λύσις: η=2,0736 gr/cm.sec.

334. Ἐντὸς σωλῆνος ρέει ὑγρὸν εἰδ. βάρους ε=1,5 gr*/cm³ καὶ συντελεστοῦ ἰξώδους η=4 gr/cm.sec, ὁπότε ἡ διά τινος τομῆς διερχομένη ποσότης εἶναι B=100,48 gr*/sec.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀκτὶς τομῆς (r) τοῦ σωλῆνος ἵνα ἡ ροή, ὑπὸ τὰς ὡς ἄνω προϋποθέσεις, παρουσιάζῃ ἀριθμὸν τοῦ Reynolds R=80.

Λύσις: r=0,1 cm.

335. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα διαστάσεων λαμβάνονται ὡς θεμελειώδεις αἱ τοῦ συντελεστοῦ ἰξώδους ([η]=H), πυκνότητος ([d]=D) καὶ χρόνου ([t]=T).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο διαστάσεις τοῦ διαστήματος (S), τῆς ταχύτητος (v) καὶ τῆς μάζης (m).

Λύσις: $[S]=H^{\frac{1}{2}}\,T^{\frac{1}{2}}\,D^{-\frac{1}{2}}$, $[v]=H^{\frac{1}{2}}\,T^{-\frac{1}{2}}\,D^{-\frac{1}{2}}$,

$[M]=H^{\frac{3}{2}}\,T^{\frac{3}{2}}\,D^{-\frac{1}{2}}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

III. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ

ΑΕΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

336. Τὸ μέσον εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀέρος εἶναι $\varepsilon = 0{,}0013$ gr^*/cm^3.

Ζητεῖται: Πόσον ζυγίζει (B) ποσότης ἀέρος ὄγκου $V = 3{,}6\ m^3$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$B = V.\varepsilon$$

ἔχομεν :

$$B = 3{,}6.0{,}0013\ m^3 . gr^* . cm^{-3}$$

$$B = 3{,}6.0{,}0013.10^6\ cm^3 . gr^* . cm^{-3}$$

$$B = \frac{3{,}6.0{,}0013.10^6}{10^3}\ Kg^*$$

$$\boxed{B = 4{,}68\ Kg^*}$$

337. Εἰς σημεῖόν τι τῆς Γῆς ὁ ἐντὸς σωλῆνος τοῦ Torricelli ὑδράργυρος ἰσορροπεῖ μέχρις ὕψου $h = 75{,}31$ cm.

Ζητεῖται: Πόση εἶναι (εἰς Kg^*/cm^2) ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις (P), ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\varepsilon = 13{,}6$ gr^*/cm^3.

Λύσις: Ἡ ὑπὸ τοῦ ὑδραργύρου ἀσκουμένη πίεσις (P) ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ εἶναι προφανῶς :

$$P = \varepsilon h$$

ἴση καὶ πρὸς τὴν ζητουμένην ἀτμοσφαιρικὴν πίεσιν.

Ὡς ἐκ τούτου ἔχομεν :

$$P = 13{,}6.75{,}31\ \frac{gr^* . cm}{cm^3}$$

$$P = \frac{13{,}6.75{,}31}{10^3}\ \frac{Kg^*}{cm^2}$$

$$\boxed{P = 1{,}024216\ Kg^*/cm^3}$$

338. Εἰς σημεῖόν τι τῆς Γῆς ὁ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος τοῦ Torricelli ὑδράργυρος (πυκνότητος $d = 13{,}6\ gr/cm^3$) δεικνύει ὕψος $h = 68$ cm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ὕψος (h′) εἰς τὸ ὁποῖον θὰ ἰσορροπῇ, εἰς τὸν αὐτὸν τόπον, στήλη θειϊκοῦ ὀξέος (πυκνότητος $d' = 1{,}156$ gr/cm³).

Λύσις: Ἔστω ε τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑδραργύρου. Ἡ ὑπὸ τούτου προκαλουμένη πίεσις, ἴση μὲ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν τοῦ τόπου, θὰ εἶναι τότε

$$P = h\varepsilon$$

ἤτοι:

$$P = hdg \qquad (1)$$

ἀφ᾽ ἑτέρου ἡ ὑπὸ τοῦ θειϊκοῦ ὀξέος ἀσκουμένη πίεσις, ἴση μὲ τὴν τοῦ ὑδραργύρου, θὰ εἶναι

$$P = h'\varepsilon'$$

ἂν ὡς ε′ ληφθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὀξέος, ἤτοι:

$$P = h'd'g \qquad (2)$$

Προκύπτει τότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἡ σχέσις:

$$hdg = h'd'g$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν:

$$h' = \frac{hd}{d'}$$

$$h' = \frac{68 . 13{,}6}{1{,}156} \ \frac{cm . gr . cm^3}{cm^3 . gr}$$

$$\boxed{h' = 8 \text{ m}}$$

339. Ὑγρόν τι, ἐντὸς μακροῦ βαρομετρικοῦ σωλῆνος, ἰσορροπεῖ μέχρις ὕψους τινος $h = 9{,}52$ m, ἐνῷ παρακείμενος σωλὴν πλήρης ὑδραργύρου (εἰδ. βάρους $\varepsilon' = 13{,}6$ gr*/cm³) ἰσορροπεῖ μέχρις ὕψους $h' = 70$ cm.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑγροῦ (ε).

Λύσις: Αἱ ἀντιστοίχως ὑπὸ τοῦ ἀγνώστου ὑγροῦ καὶ τοῦ ὑδραργύρου ἀσκούμεναι πιέσεις, ἴσαι μεταξύ των, θὰ εἶναι:

$$P = \varepsilon h$$

καὶ

$$P' = \varepsilon' h'$$

Ἐκ τούτου ἔχομεν τότε:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' h'}{h}$$

ἤτοι:

$$\varepsilon = \frac{13{,}6 . 70}{952} \ \frac{gr^* . cm}{cm^3 . cm}$$

$$\boxed{\varepsilon = 1 \text{ gr}^*/\text{cm}^3}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

340. Εἰς τόπον τινὰ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι
$P = 882{,}9 . 10^3$ baryes.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ συνολικὴ δύναμις (εἰς Kg^*) μεθ' ἧς πιέζεται, ἐκ τῆς μιᾶς μόνον ὄψεως, μεταλλικὸς δίσκος ἀκτῖνος $R = 0{,}5$ m.

Λύσις: Ἐκ τῆς ἀκτῖνος εὑρίσκομεν τὴν ἐπιφάνειαν (s) τοῦ δίσκου, ἥτις, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι

$$s = \pi R^2$$

ὁπότε ἡ ἐπ' αὐτοῦ ἀσκουμένη συνολικὴ δύναμις (F), τιμῆς $F = Ps$, εὑρίσκεται συμφώνως πρὸς τὴν τελικὴν σχέσιν

$$F = \pi R^2 P$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν :

$$F = 3{,}14 . 0{,}5^2 . 882{,}9 . 10^3 \ \frac{m^2 . \text{dynes}}{cm^2}$$

$$F = \frac{3{,}14 . 0{,}25 . 882{,}9 . 10^3 . 10^4}{981 . 10^3} \ Kg^*$$

$$\boxed{F = 7065 \ Kg^*}$$

341. Ἐντὸς λεπτοῦ σωλῆνος, τομῆς $s = 0{,}9$ cm² τίθεται ποσότης θειϊκοῦ ὀξέος βάρους $B_1 = 1764$ gr*. Ἐν συνεχείᾳ ἀναστρέφεται ὁ σωλὴν μὲ τὸ στόμιόν του ἐντὸς λεκάνης περιεχούσης ὁμοίως θειϊκὸν ὀξύ, ὁπότε ἐκχύνεται τοῦ σωλῆνος ποσότης $B_2 = 630$ gr* θειϊκοῦ ὀξέος μέχρις ἐπιτεύξεως τῆς ἰσορροπίας τοῦ συστήματος.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος (P) εἰς Kg^*/cm^2.

Λύσις: Κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν ἰσορροπίας ἡ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἐναπομείνασα ποσότης θειϊκοῦ ὀξέος (B) εἶναι

$$B = B_1 - B_2$$

Αὕτη ἀσκεῖ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας s πίεσιν

$$P = \frac{B}{s}$$

ἤτοι :

$$P = \frac{B_1 - B_2}{s}$$

ἴσην μὲ τὴν ζητουμένην ἀτμοσφαιρικήν, τιμῆς δὲ

$$P = \frac{1764 - 630}{0{,}9} \ \frac{gr^*}{cm^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$P = \frac{1,134}{0,9}\ \frac{Kg^*}{cm^2}$$

$$\boxed{P = 1,26\ Kg^*/cm^2}$$

342. Ἀέριον περιεχόμενον ἐντὸς δοχείου, κλειομένου δι᾽ ἐμβόλου, ὑπὸ ὄγκον $V_1 = 630\ cm^3$ παρουσιάζει πίεσιν $P_1 = 7\ atm$.

Ζητεῖται: Ποίαν πίεσιν (P_2) θὰ παρουσιάζῃ ὑπὸ ὄγκον $V_2 = 0,9$ lit.

Λύσις: Συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τῶν Boyle - Mariotte ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

ἥτις, διὰ τὴν ζητουμένην πίεσιν, γίνεται

$$P_2 = \frac{P_1 V_1}{V_2}$$

ἤτοι:

$$P_2 = \frac{7.630}{0,9}\ \frac{atm\,.\,cm^3}{lit}$$

$$P_2 = \frac{7.630}{900}\ \frac{atm\,.\,cm^3}{cm^3}$$

$$\boxed{P_2 = 4,9\ atm}$$

343. Ἀέριον ἄζωτον, εἰδ. βάρους $\varepsilon = 0,0012\ gr^*/cm^3$ περιεχόμενον ἐντὸς δοχείου ὑπὸ πίεσιν $P_1 = 1,629\ Kg^*/cm^2$ ζυγίζει $B = 46,8\ gr^*$.

Ζητεῖται: Ποίαν πίεσιν (P_2) θὰ ἀσκῇ τὸ ἀέριον ἂν ὁ ὄγκος του γίνῃ $V_2 = 3,51$ lit.

Λύσις: Ἐκ τῆς σχέσεως βάρους καὶ εἰδικοῦ βάρους εὑρίσκομεν κατ᾽ ἀρχὴν τὸν ὄγκον (V_1) ὃν παρουσιάζει τὸ ἄζωτον ὑπὸ τὰς ἀρχικὰς συνθήκας:

$$V_1 = \frac{B}{\varepsilon}$$

ὁπότε ὁ τύπος τῶν Boyle - Mariotte ($P_1 V_1 = P_2 V_2$) λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\frac{P_1 B}{\varepsilon} = P_2 V_2$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην πίεσιν:

$$P_2 = \frac{P_1 B}{\varepsilon V_2}$$

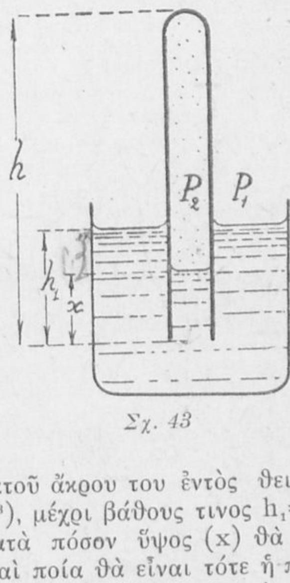
Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$P_2 = \frac{1,629.46,8}{0,0012.3,51} \; \frac{Kg^*.\,gr^*.\,cm^3}{cm^2.\,gr^*.\,lit}$$

$$P_2 = \frac{1,629.46,8}{1,2.3,51} \; \frac{Kg^*}{cm^2}$$

$$\boxed{P_2 = 18,1 \; Kg^*/cm^2}$$

344. Ὑάλινος κυλινδρικὸς σωλήν, μήκους h=10 cm, ἀνοικτὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον του (ἴδ. σχ. 43) ἐμβαπτίζεται κατακορύ-



Σχ. 43

φως διὰ τοῦ ἀνοικτοῦ ἄκρου του ἐντὸς θειϊκοῦ ὀξέος (εἰδ. βάρους ε=2 gr*/cm³), μέχρι βάθους τινος h_1=5 cm.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον ὕψος (x) θὰ ἀνέλθῃ τὸ ὑγρὸν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος καὶ ποία θὰ εἶναι τότε ἡ πίεσις (P_2) τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρος, ἂν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι P_1 = 1 Kg*/cm².

Λύσις: Ἔστω s ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος. Ἐκ τούτου προκύπτει ὅτι ὁ ἀρχικὸς ὄγκος τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρος εἶναι

$$V_1 = sh \qquad (1)$$

ὁ δὲ τελικὸς

$$V_2 = s(h - x) \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) καὶ ἐκ τῶν πιέσεων P_1 καὶ P_2 ἔχομεν τότε τὴν προκύπτουσαν ἐκ τοῦ τύπου τῶν Boyle - Mariotte, σχέσιν:

$$P_1 sh = P_2 s(h - x)$$

ἤτοι:

$$P_1 h = P_2(h - x)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν : $$P_2 = \frac{P_1 h}{h - x} \qquad (3)$$

ἀφ᾽ ἑτέρου ὅμως ἡ πίεσις αὕτη (P_2) εἶναι ἴση μὲ τὴν ὑπὸ τοῦ ὑγροῦ ἀσκουμένην, ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας διαχωρισμοῦ, ηὐξημένην κατὰ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν συμφώνως πρὸς τὴν ἀρχὴν τοῦ Pascal, ὁπότε ἔχομεν :

$$P_2 = (h_1 - x)\,\varepsilon + P_1 \qquad (4)$$

καί, ἐκ τῶν (3) καὶ (4), τελικῶς τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{P_1 h}{h - x} = (h_1 - x)\,\varepsilon + P_1$$

ἣν λύομεν ὡς πρὸς x καὶ εὑρίσκομεν :

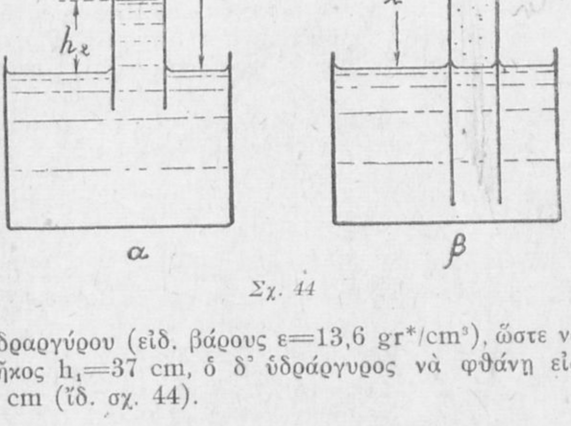
$$\boxed{x = 0{,}1 \text{ cm}}$$

ὁπότε, ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τοῦ x καὶ τῆς (3) ἔχομεν καὶ τὴν ζητουμένην πίεσιν :

$$P_2 = \frac{1.10}{10 - 0{,}1}\ \frac{\text{Kg}^*}{\text{cm}^2}$$

$$\boxed{P_2 = 1{,}01 \text{ Kg}^*/\text{cm}^2}$$

345. Κυλινδρικὸς σωλὴν περιέχων ἀέριόν τι ἐμβαπτίζεται



Σχ. 44

ἐντὸς ὑδραργύρου (εἰδ. βάρους ε=13,6 gr*/cm³), ὥστε νὰ ἐξέχῃ κατὰ μῆκος h_1=37 cm, ὁ δ᾽ ὑδράργυρος νὰ φθάνῃ εἰς ὕψος h_2=12 cm (ἴδ. σχ. 44).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Πόσον πρέπει νὰ ἐξέχῃ ὁ σωλὴν (x) ὥστε ὁ ὑδράργυρος νὰ εὑρίσκεται ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ σωλῆνος εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, ἂν ἡ ἀτμ. πίεσις εἶναι $P=1$ Kg^*/cm^2.

Λύσις: Ἔστω s ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος. Αἱ εἰς τὰς δύο καταστάσεις (α καὶ β τοῦ σχήματος) ἀντιστοιχοῦσαι πιέσεις (P_α καὶ P_β) ὡς καὶ οἱ ἀντίστοιχοι ὄγκοι (V_α καὶ V_β) συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν:

$$P_\alpha V_\alpha = P_\beta V_\beta$$

θὰ εἶναι:

$$(P - h_2\varepsilon)(h_1 - h_2)s = Pxs$$

ἐξ ἧς προκύπτει:

$$x = \frac{(P - h_2\varepsilon)(h_1 - h_2)}{P}$$

$$x = \frac{(1000 - 163{,}2)(37 - 12)}{1000} \text{ cm}$$

$$\boxed{x = 20{,}92 \text{ cm}}$$

346. Ποσότης ἀερίου ἀζώτου βάρους $B_1=2{,}33$ gr^*, εἰσαγομένη ἐντὸς σωλῆνος περιέχοντος ὑδράργυρον καὶ ἐξέχοντος κατὰ $h_1=30$ cm ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας ἄλλου ὑδραργύρου ἐντὸς δοχείου εὑρισκομένου, καταβιβάζει τὸν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος μέχρις ὕψους τινος $h_2=12$ cm.

Ζητεῖται: Πόσον βάρος ἀζώτου (B_2) πρέπει νὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ὥστε ὁ ὑδράργυρος νὰ ἰσοσταθμίζῃ τὸν ἐκτὸς τοῦ σωλῆνος (ἴδ. σχ. 45), ἂν ὁ Hg ἔχῃ εἰδ. βάρος $\varepsilon=13{,}6$ gr^*/cm^3 καὶ ἡ ἀτμ. πίεσις εἶναι $P=1$ Kg^*/cm^2.

Λύσις: Ἡ εἰς τὴν ἀρχικὴν κατάστασιν πίεσις τοῦ βάρους B_1 τοῦ ἀερίου εἶναι προφανῶς

$$P_1 = P - h_2\varepsilon \qquad (1)$$

ὁ δὲ ὄγκος

$$V_1 = (h_1 - h_2)s \qquad (2)$$

ἂν ὡς s ληφθῇ ἡ τομή.

Ἡ εἰς τὴν τελικὴν κατάστασιν πίεσις τοῦ βάρους (B_1+B_2) θὰ εἶναι ὅμως

$$P_2 = P \qquad (3)$$

καὶ ὁ ὄγκος

$$V_2 = h_1 s \qquad (4)$$

ὁπότε, λαμβάνοντες τὸν τύπον τῆς κινητικῆς τῶν ἀερίων

$$PV = Bk$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

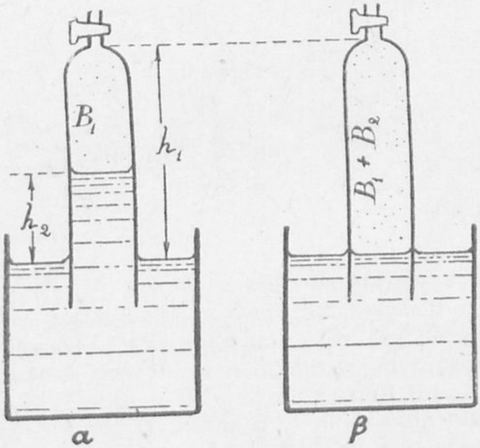
ὅπου k σταθερὰ $\left(k = \frac{RT}{\mu}\right)$, ἰσχύοντα δι' οἱασδήποτε ποσότητας (B) ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀερίου, ἔχομεν

α) Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) τὴν σχέσιν:

$$(P - h_2\varepsilon)(h_1 - h_2)s = B_1 k \qquad (5)$$

β) Ἐκ δὲ τῶν (3) καὶ (4) τήν:

$$Ph_1 s = (B_1 + B_2)k \qquad (6)$$



Σχ. 45

ὁπότε, διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (5) καὶ (6) εὑρίσκομεν:

$$\frac{(P - h_2\varepsilon)(h_1 - h_2)}{Ph_1} = \frac{B_1}{B_1 + B_2}$$

ἤτοι

$$B_2 = \frac{Ph_1 B_1}{(P - h_2\varepsilon)(h_1 - h_2)} - B_1$$

καί, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν h_1, B_1, P κλπ., τελικῶς:

$$\boxed{B_2 = 3{,}24\ gr^*}$$

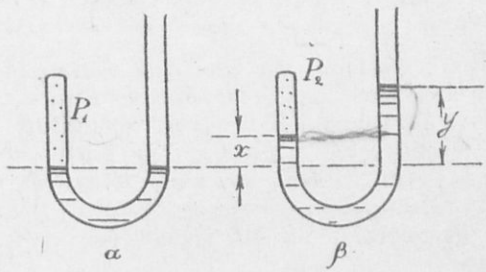
347. Ἐντὸς ὑοειδοῦς ὑαλίνου σωλῆνος τομῆς $s = 2\ cm^2$, κλειστοῦ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον τίθεται ὑδράργυρος, οὕτως ὥστε ὁ ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ τμήματος ἀὴρ νὰ εὑρίσκεται ὑπὸ π ί ε σ ι ν $P_1 = 1\ Kg^*/cm^2$ (ἴδ. σχ. 46,α).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

᾿Ακολούθως ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ρίπτεται ποσότης ὑδραργύρου βάρους B=136 gr*, ὁπότε ἡ ἐπιφάνεια τούτου ἀνέρχεται κατὰ ὕψος τι y εἰς τὸ ἓν ἄκρον καὶ x εἰς τὸ ἄλλο (ἴδ. σχ. 46,β).

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσις (P_2) τοῦ περιεχομένου μετὰ ταῦτα ἀέρος, ὡς καὶ ποῖα τὰ ὕψη x καὶ y, ἂν τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι ε=13,6 gr*/cm³, καὶ ὁ ἀρχικὸς ὄγκος τοῦ ἐγκεκλισμένου ἀέρος V_1=20 cm³.

Λύσις: ᾿Εκ τοῦ βάρους τοῦ ὑδραργύρου (B) καὶ τῶν ποπῶν s καὶ ε εὑρίσκομεν τὸ συνολικὸν ὕψος (h) καθ᾿ ὃ θὰ ἀνυ-



Σχ. 46

ψωθῇ οὗτος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν

$$B = sh\varepsilon$$

ἐξ ἧς ἔχομεν :

$$h = \frac{B}{s\varepsilon}$$

καί, δεδομένης τῆς σχέσεως

$$h = x + y$$

τελικῶς :

$$\frac{B}{s\varepsilon} = x + y \qquad (1)$$

Κατὰ τὴν ἀποκατάστασιν ὅμως τῆς ἰσορροπίας, ἡ πίεσις τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρος (P_2) θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν πίεσιν P_1 ηὐξημένην κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ ὑδραργύρου προκαλουμένην, ὁπότε εὑρίσκομεν :

$$P_2 = P_1 + (y - x)\varepsilon \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀφ᾿ ἑτέρου ὅμως, μεταξὺ τῆς ἀρχικῆς καὶ τῆς τελικῆς πιέσεως τοῦ ἀερίου θὰ ἰσχύη ὁ νόμος τῶν Boyle - Mariotte, ὁπότε ἔχομεν :

$$P_1V_1 = P_2\,(V_1 - sx) \qquad (3)$$

Οὕτω τελικῶς, ἐκ τῶν τριῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3), ἀποτελουσῶν ἁπλοῦν σύστημα, εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν ζητουμένων, αἵτινες εἶναι :

$$\boxed{\begin{array}{l} P_2 = 1{,}054\ \mathrm{Kg^*/cm^2} \\ x = 0{,}514\ \mathrm{cm} \\ y = 4{,}486\ \mathrm{cm} \end{array}}$$

348. Ἐντὸς ὑοειδοῦς σωλῆνος τομῆς $s = 1{,}38$ cm², κλειστοῦ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον, περιέχεται ἀὴρ ὑπὸ πίεσιν ἀτμοσφαιρικὴν ($P_1 = 1$ Kg*/cm²). Κατὰ τὴν προσθήκην ποσότητος $B = 9{,}2$ Kg* ὑδραργύρου, ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τούτου ἀνυψοῦται κατὰ $h_1 = 4{,}6$ cm ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ σκέλους.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ ἀρχικὸς ὄγκος (V_1) τοῦ περιεχομένου ἀέρος, ἂν τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑδραργύρου εἶναι $\varepsilon = 13{,}6$ gr*/cm³.

Λύσις: Εἰς τὰ δύο σκέλη τοῦ σωλῆνος ὁ προστιθέμενος ὑδράργυρος θὰ παρουσιάζη συνολικὸν ὕψος h, συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν

$$h = \frac{B}{s\varepsilon}$$

ὡς καὶ ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀσκήσει καθορίζεται, ὁπότε ὁ ἐντὸς τοῦ ἀνοικτοῦ σκέλους ὑδράργυρος θὰ παρουσιάζη ὕψος h_2 κατὰ τὰς ἐξισώσεις

$$h = h_1 + h_2$$

ἤτοι :

$$\frac{B}{s\varepsilon} = h_1 + h_2 \qquad (1)$$

Ἐν συνεχείᾳ ἡ νέα πίεσις τοῦ ἐγκεκλισμένου ἀερίου (P_2) ἴση μὲ τὴν ἀτμοσφαιρικὴν (P_1) ηὐξημένην κατὰ τὴν ὑπὸ τοῦ ὑδραργύρου ἀσκουμένην, θὰ εἶναι :

$$P_2 = P_1 + (h_2 - h_1)\varepsilon \qquad (2)$$

θὰ συνδέεται δέ, κατὰ τὸν νόμον τῶν Boyle - Mariotte, διὰ τῆς σχέσεως

$$P_1V_1 = P_2\,(V_1 - sh_1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

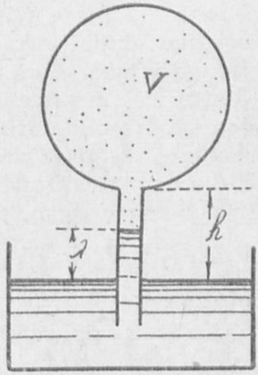
ἥτις, ἐκ τῶν τιμῶν τῶν P_2 καὶ h_2 ἐκ τῶν (1) καὶ (2), γίνεται τελικῶς

$$V_1 = \frac{P_1 s^2 h_1 + Bsh_1 + 2\varepsilon s^2 h_1^2}{B - 2\varepsilon h_1 s}$$

ὁπότε, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν P_1, s, h_1 κλπ. εὑρίσκομεν :

$$\boxed{V_1 = 7{,}47\ \mathrm{cm}^3}$$

349. Ὑαλίνη σφαῖρα ὄγκου V=1,26 lit συνδέεται μετὰ κακορύφου σωλῆνος, τομῆς s=0,6 cm², ἐμβαπτιζομένου ἐντὸς ὕδατος, περιέχει δὲ ἀέρα ὑπὸ πίεσιν P_1=1 Kg*/cm², οὕτως ὥστε τὸ ὕδωρ νὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ σωλῆνος (ἴδ. σχ. 47). Τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος δίδεται καὶ εἶναι h=12 cm.



Σχ. 47

Ζητεῖται: Ἂν τὸ ὕδωρ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀνυψωθῆ κατὰ λ=4 cm, πόση θὰ εἶναι τότε ἡ πίεσις τοῦ ἐντὸς τῆς σφαίρας ἀέρος (P_2), ὑποτιθεμένης τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος ἀπεριορίστου καὶ τοῦ εἰδ. βάρους τούτου ε=1,01 gr*/cm³.

Λύσις: Μετὰ τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος κατὰ λ, ὁ ἐντὸς τῆς σφαίρας ἀὴρ θὰ παρουσιάζῃ πίεσιν (P_2) συνδεδεμένην μὲ τὴν ἀρχικὴν (P_1) διὰ τῆς ἐκ τοῦ νόμου τῶν Boyle - Mariotte προκυπτούσης σχέσεως

$$P_1 (V + sh) = P_2 [V + (h - \lambda) s]$$

ἐξ ἧς ἔχομεν :

$$P_2 = \frac{P_1 (V + sh)}{[V + (h - \lambda) s]}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$P_2 = \frac{1(1260 + 0{,}6.12)}{[1260 + (12 - 4)0{,}6]} \frac{Kg^*}{cm^2}$$

$$P_2 = \frac{1267{,}2}{1264{,}8} \frac{Kg^*}{cm^2}$$

$$\boxed{P_2 = 1{,}002 \ Kg^*/cm^2}$$

Ἐν συνεχείᾳ δέ, διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς προκαλούσης τὴν ἀνύψωσιν τοῦ ὕδατος ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως (P_3), ἐξισοῦμεν τὰς ἑκατέρωθεν ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ἐκτὸς τοῦ σωλῆνος τοῦ ὑγροῦ ἀσκουμένας πιέσεις, ὁπότε ἔχομεν :

$$P_3 = P_2 + \lambda\varepsilon$$

ἐξ οὗ τελικῶς εὑρίσκαμεν :

$$\boxed{P_3 = 1{,}00604 \ Kg^*/cm^2}$$

350. Δύο κοῖλαι σφαῖραι, ὄγκου ἀντιστοίχως $V_1 = 2{,}7$ lit καὶ $V_2 = 0{,}6$ lit περιέχουν ἀέρα ὑπὸ πίεσιν ἡ μὲν μία $P_1 = 1{,}65$ atm ἡ δ' ἄλλη $P_2 = 3{,}3$ atm καὶ συγκοινωνοῦν μεταξύ των διὰ σωλῆνος ἀμελητέου ὄγκου φέροντος κλειστὴν στρόφιγγα

Ζητεῖται: Ἂν ἀνοιχθῇ ἡ στρόφιγξ ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσις τοῦ μίγματος (P) μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας.

Λύσις: Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου τῆς μίξεως τῶν ἀερίων

$$P_1V_1 + P_2V_2 = PV$$

διὰ $V = V_1 + V_2$ εὑρίσκομεν :

$$P_1V_1 + P_2V_2 = P(V_1 + V_2)$$

ὁπότε θὰ εἶναι :

$$P = \frac{P_1V_1 + P_2V_2}{V_1 + V_2}$$

ἐξ οὗ ἔχομεν :

$$P = \frac{1{,}65.2{,}7 + 3{,}3.0{,}6}{2{,}7 + 0{,}6} \text{ atm}$$

$$\boxed{P = 1{,}95 \text{ atm}}$$

351. Δύο κοῖλαι σφαῖραι, ὄγκου ἀντιστοίχως $V_1 = 6{,}3$ lit καὶ $V_2 = 12{,}6$ lit περιέχουν ἀέρα ὑπὸ διαφόρους πιέσεις, ἀλλ' οὕτως ὥστε ὁ τῆς πρώτης νὰ παρουσιάζῃ πίεσιν $P_1 = 27{,}72$ Kg^*/cm^2. Φέρονται ἀκολούθως εἰς συγκοινωνίαν μέσῳ σωλῆνος ἀμελητέου ὄγκου φέροντος στρόφιγγα κλειστήν, ἀνοίγεται αὕτη ἐπὶ ἐλάχιστον χρόνον ὁπότε κλείεται πάλιν. Ἔχομεν τότε εἰς μὲν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τὴν πρώτην σφαῖραν ἀέρα πιέσεως $P_1'=26,46$ Kg*/cm² εἰς δὲ τὴν δευτέραν πιέσεως $P_2'=3,78$ Kg*/cm².

Ζητεῖται: Πόση ἦτο ἡ ἀρχικὴ πίεσις (P_2) τοῦ ἐντὸς τῆς δευτέρας σφαίρας ἀέρος.

Λύσις: Ἂν θεωρηθῇ ὡς P ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος ἐντὸς τῶν δύο σφαιρῶν κατὰ τὴν ἐπίτευξιν τῆς τελικῆς ἰσορροπίας, εὑρίσκομεν τότε, διὰ μὲν τὴν πρώτην κατάστασιν τὴν σχέσιν

$$P_1V_1 + P_2V_2 = P\,(V_1 + V_2) \qquad (1)$$

διὰ δὲ τὴν δευτέραν

$$P_1'V_1 + P_2'V_2 = P\,(V_1 + V_2) \qquad (2)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$P_1V_1 + P_2V_2 = P_1'V_1 + P_2'V_2$$

ὁπότε θὰ εἶναι:

$$P_2 = \frac{P_1'V_1 + P_2'V_2 - P_1V_1}{V_2}$$

$$P_2 = \frac{26,46.6,3 + 3,78.12,6 - 27,72.6,3}{12,6}\ \frac{\text{Kg*}}{\text{cm}^2}$$

$$\boxed{P_2 = 3,55 \text{ Kg*/cm}^2}$$

352. Ἐμβολοφόρου ἀεραντλίας ὁ μέγιστος ὄγκος τοῦ περιεχομένου ἀέρος ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου εἶναι v. Διὰ τοῦ σωλῆνος ἀναρροφήσεως συνδέεται μετὰ χώρου πρὸς ἐκκένωσιν ὄγκου συνολικοῦ, μέχρι τῆς βαλβίδος, V.

Ζητεῖται: Ἄν, κατὰ τὴν ἀρχὴν τῆς λειτουργίας, ἡ πίεσις ἐντὸς τῆς ἀντλίας καὶ τοῦ πρὸς ἐκκένωσιν χώρου εἶναι P_0, νὰ εὑρεθῇ πόση θὰ εἶναι αὕτη μετὰ n παλινδρομὰς τοῦ ἐμβόλου.

Λύσις: Μετὰ τὸ πέρας τῆς πρώτης παλινδρομῆς, ὁ ἐντὸς τοῦ χώρου ἀήρ, καταλαμβάνει ὄγκον V+v ὁπότε ὁ νόμος τῶν Boyle - Mariotte δίδει:

$$P_0V = P_1\,(V + v) \qquad (1)$$

ὅπου P_1 ἡ μετὰ τὸ πέρας τῆς πρώτης παλινδρομῆς πίεσις.

Μετὰ τὴν δευτέραν παλινδρομὴν ὁ ἀὴρ ἀπὸ ὄγκον V καὶ πίεσιν P_1 μεταπίπτει ἐκ νέου εἰς ὄγκον V+v καὶ πίεσιν P_2, συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν

$$P_1V = P_2\,(V + v)$$

ἥτις ἐκ τῆς τιμῆς τῆς P_1 ἐκ τῆς (1), γίνεται:

$$\frac{P_0V^2}{(V + v)} = P_2\,(V + v)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε εὑρίσκομεν :

$$P_2 = P_0 \frac{V^2}{(V+v)^2}$$

ἀντιστοίχως δὲ διὰ τὴν τρίτην παλινδρομὴν ἔχομεν :

$$P_3 = P_0 \frac{V^3}{(V+v)^3}$$

καὶ διὰ τὴν n-οστὴν τελικῶς :

$$\boxed{P_n = P_0 \left(\frac{V}{V+v}\right)^n}$$

353. Ἐμβολοφόρος ἀεραντλία, συνδέεται μετὰ χώρου πρὸς ἐκκένωσιν περιέχοντος ἀέρα ὑπὸ πίεσιν $P_0 = 10$ Kg*/cm^2.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος οὗτός (V) ἂν εἶναι v=5 lit ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου καὶ ἂν μετὰ τὴν δευτέραν παλινδρομὴν ἡ πίεσις τοῦ περιεχομένου ἀέρος γίνεται $P_2 = 8$ Kg*/cm^2.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἐμβολοφόρου ἀεραντλίας, ἔχομεν :

$$P_2 = P_0 \left(\frac{V}{V+v}\right)^2$$

ὁπότε, δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν P_0, P_2 κλπ., εὑρίσκομεν :

$$8 = 10\left(\frac{V}{V+5}\right)^2$$

ἤτοι

$$V^2 - 40V - 100 = 0$$

ἐξ οὗ θὰ εἶναι :

$$\boxed{V = 42{,}36 \text{ lit}}$$

354. Δι᾽ ἐμβολοφόρου ἀεραντλίας, κυλίνδρου ὄγκου v=2 lit, ἀραιοῦται χῶρος ὄγκου V=10 lit ἀπὸ μιᾶς πιέσεως $P_0 = 2{,}0736$ atm εἰς πίεσιν $P_n = 1$ atm.

Ζητεῖται: Μετὰ πόσας παλινδρομὰς τοῦ ἐμβόλου (n) θὰ παρουσιασθῇ ἡ πίεσις αὕτη.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$P_n = P_0 \left(\frac{V}{V+v}\right)^n$$

εὑρίσκομεν τὸ n διὰ λογαριθμίσεως, ὁπότε θὰ εἶναι :

$$\text{λογ}\, P_n = \text{λογ}\, P_0 + n \,.\, \text{λογ} \left(\frac{V}{V+v}\right)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι

$$\lambda o\gamma\, 1 = \lambda o\gamma\, 2{,}0736 + n\, \lambda o\gamma \frac{5}{6}$$

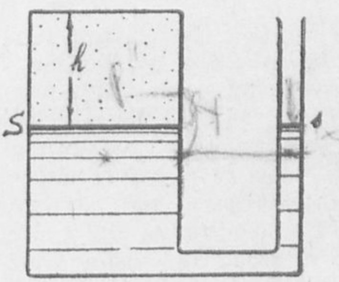
καὶ

$$n = \frac{\lambda o\gamma\, 1 - \lambda o\gamma\, 2{,}0736}{\lambda o\gamma \frac{5}{6}}$$

ἐξ οὗ τελικῶς ἔχομεν :

$$\boxed{n = 4}$$

355. Σύστημα συγκοινωνούντων δοχείων ἀποτελεῖται ἐξ ἑνὸς κυλίνδρου κλειστοῦ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον καὶ τομῆς S=200 cm² καὶ ἐξ ἑνὸς ἄλλου τομῆς s=6 cm². Ἐντὸς τούτων ὑπάρχει ὕδωρ ἰσορροποῦν εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον (ἴδ. σχ. 48), μὲ



$P' + (x+h)\varepsilon =$

$=$

Σχ. 48

τὰς ἐλευθέρας ἐπιφανείας του κεκαλυμμένας δι' ἀβαρῶν ἐμβόλων.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον θ' ἀνυψωθῇ ἡ ἐπιφάνεια S ἂν ἐπὶ τῆς s τεθῇ βάρος B=10 gr*, δεδομένης τῆς ἀρχικῆς ἀποστάσεως τῆς S ἀπὸ τοῦ καλύμματος τοῦ πλατέως κυλίνδρου h=22 cm, τοῦ εἰδ. βάρους τοῦ ὕδατος ε = 1 gr*/cm³, καὶ τῆς ἀτμ. πιέσεως P=1 atm.

Λύσις: Ἔστω ὅτι κατὰ τὴν προσθήκην τοῦ βάρους B ἡ ἐπιφάνεια S ἀνέρχεται κατὰ x καὶ ἡ s κατέρχεται κατὰ y. Θὰ ἰσχύῃ ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις

$$Sx = sy \tag{1}$$

ὡς ἐκ τοῦ ἀσυμπιέστου τῶν ὑγρῶν.

Τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἔστω P′ ἡ πίεσις τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος. Αὕτη θὰ συνδέεται μὲ τὴν ἀρχικὴν πίεσιν P καὶ τὰς μετατοπίσεις τῶν ἐπιφανειῶν διὰ τῆς ἐξισώσεως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\frac{B}{s} + P = P' + (x + y)\varepsilon \qquad (2)$$

Ἐπιπροσθέτως δὲ μεταξὺ τῶν πιέσεων P καὶ P′ καὶ τῆς μεταβολῆς τοῦ ὄγκου τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος θὰ ἰσχύῃ καὶ ὁ νόμος τῶν Boyle - Mariotte, ἐξ οὗ προκύπτει

$$PSh = P'S\,(h - x) \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3), ἀποτελουσῶν σύστημα, εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν τοῦ x, ἥτις θὰ δίδεται ὑπὸ τῆς τελικῆς ἐξισώσεως

$$(\varepsilon s + \varepsilon S)x^2 - (\varepsilon sh + \varepsilon Sh + B + Ps)x + hB = 0$$

ἤτοι :

$$103x^2 - 5271x + 110 = 0$$

ἐξ ἧς ἔχομεν :

$$\boxed{x = 0{,}0242 \text{ cm}}$$

356. Ἀναρροφητικῆς ὑδραντλίας ἡ τομὴ τοῦ ἐμβαπτιζομένου ἐντὸς ὕδατος σωλῆνος εἶναι $s = 0{,}5$ cm², ἡ δὲ τομὴ τοῦ κυλίνδρου εἶναι $S = 40$ cm².

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον θ᾽ ἀνυψωθῇ τὸ ὕδωρ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος (x) μετὰ τὴν πρώτην παλινδρομὴν (μήκους $d = 20$ cm) τοῦ ἐμβόλου, ἐὰν ὁ σωλὴν οὗτος ἔχῃ μῆκος $\lambda = 8$ m ἀπὸ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος (εἰδ. βάρους $\varepsilon = 1$ gr*/cm³) καὶ ἐὰν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι $P_1 = 1$ Kg*/cm².

Λύσις: Μετὰ τὸ πέρας τῆς πρώτης παλινδρομῆς, τὸ ὕδωρ, ἀνυψούμενον κατὰ x, θ᾽ ἀσκῇ ἐπὶ τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας πίεσιν τινὰ ἥτις, ὁμοῦ μετὰ τῆς νέας πιέσεως τοῦ ἐμπεριεχομένου ἀέρος, θὰ ἐξουδετερώνῃ τὴν P.

Οὕτω δὲ ὁ ἀρχικὸς ὄγκος τοῦ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου ἀέρος

$$V_1 = s\lambda \qquad (1)$$

πιέσεως P_1, γίνεται

$$V_2 = s\,(\lambda - x) + Sd \qquad (2)$$

πιέσεως

$$P_2 = P_1 - x\varepsilon \qquad (3)$$

ὁπότε ἔχομεν

$$P_1V_1 = P_2V_2$$

ἤτοι, ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3), τὴν σχέσιν

$$P_1s\lambda = (P_1 - x\varepsilon)\,[s\,(\lambda - x) + Sd]$$

ἐξ ἧς, λύοντες ὡς πρὸς x, εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τούτου ἐκ τοῦ τριωνύμου

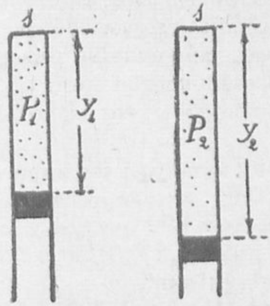
$$\varepsilon s x^2 - (P_1s + Sd\varepsilon + \varepsilon s\lambda)x + P_1Sd = 0$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ οὗ ἔχομεν, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν ε, s κλπ., καὶ διορθώσεως τῶν μονάδων, τελικῶς:

$$\boxed{x \simeq 50 \text{ cm}}$$

357. Ἐντὸς σωλῆνος κατακορύφου τομῆς $s=0{,}5$ cm^2, κλειστοῦ κατὰ τὸ ἄνω ἄκρον (ἴδ. σχ. 49), τίθεται ἀήρ, ὅστις, ὑπὸ



Σχ. 49

πίεσιν $P_1=1$ Kg^*/cm^2, κλείεται ὑπὸ ἐμβόλου βάρους $B=5$ gr^* δυναμένου νὰ κινῆται ἄνευ τριβῆς.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ ἀρχικὴ θέσις τοῦ ἐμβόλου εἶναι τοιαύτη ὥστε ν' ἀπέχῃ τῆς ἄνω ἐπιφανείας κατὰ $y_1=20$ cm, νὰ εὑρεθῇ μέχρι ποίου ὕψους (y_2) θὰ φθάσῃ, ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τοῦ βάρους του, ὡς καὶ πόση θὰ εἶναι τότε ἡ πίεσις (P_2) τοῦ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος ἀέρος.

Λύσις: Ἡ ἰσορροπία τοῦ ἐμβόλου θὰ ἀποκατασταθῇ ὅταν τοῦτο θὰ εὑρεθῇ ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν πιέσεων ἴσων καὶ ἀντιθέτων εἰς τὴν κάτω ἐπιφάνειάν του.

Θὰ ἔχωμεν τότε, ἐκ μὲν τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ σωλῆνος πίεσιν

$$P_1 = P_2 + \frac{B}{s} \tag{1}$$

ἐκ δὲ τοῦ ἐξωτερικοῦ πίεσιν P_1, ὁπότε ὁ μὲν ἀρχικὸς ὄγκος τοῦ ἀέρος εἶναι

$$V_1 = sy_1 \tag{2}$$

ὁ δὲ τελικὸς

$$V_2 = sy_2 \tag{3}$$

Ἐξ αὐτῶν ἔχομεν τότε, δυνάμει τοῦ νόμου τῶν Boyle - Mariotte, τὴν σχέσιν

$$P_1 sy_1 = sy_2 P_2 \tag{4}$$

δυνάμει δὲ τῆς συνθήκης ἰσορροπίας τὴν (1), ὁπότε, ἐκ τοῦ συ-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

στήματος τῶν (1) καὶ (4) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν y_2 καὶ P_2, αἵτινες θὰ εἶναι :

$$\boxed{\begin{aligned} y_2 &= 20,2 \text{ cm} \\ P_2 &= 0,99 \text{ Kg}^*/\text{cm}^2 \end{aligned}}$$

358. Ἐντὸς λεπτοῦ σωλῆνος, περιέχοντος ἀέρα καὶ κλειστοῦ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον τίθεται σταγὼν ὕδατος, ἥτις, φράσσουσα τὸ στόμιον τοῦ σωλῆνος, παρουσιάζει μῆκος l=0,6 cm, ὁπότε ὁ ἐγκεκλεισμένος ἀὴρ παρουσιάζει ὕψος h_1 = 116,6 cm ὅταν ὁ σωλὴν τίθεται κατακορύφως καὶ μὲ τὸ ἀνοικτὸν στόμιον πρὸς τὰ ἄνω.

Ζητεῖται: Ποῖον ὕψος (h_2) θὰ παρουσιάζῃ ὁ ἀὴρ ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, ἂν οὗτος τεθῇ κατακορύφως μὲ τὸ στόμιον πρὸς τὰ κάτω, μὴ ὑπολογιζομένων τῶν δυνάμεων συνοχῆς καὶ δεδομένης τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως P=1050 gr*/cm² καὶ τοῦ εἰδ. βάρους τοῦ ὕδατος ε=1 gr*/cm³.

Λύσις: Ἡ πίεσις (P_1) καὶ ὁ ὄγκος (V_1) τοῦ ἀέρος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, κατὰ τὴν πρώτην κατάστασιν θὰ εἶναι :

$$V_1 = h_1 s \tag{1}$$

$$P_1 = P + l\varepsilon \tag{2}$$

ὅπου s ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος.

Ἀντιστοίχως διὰ τὴν δευτέραν κατάστασιν εὑρίσκομεν :

$$V_2 = h_2 s \tag{3}$$

$$P_2 = P - l\varepsilon \tag{4}$$

ὁπότε, ἐκ τῶν τιμῶν τῶν πιέσεων καὶ τῶν ὄγκων τῶν ἐξισώσεων (1), (2), (3) καὶ (4), ἔχομεν, δι᾽ ἐφαρμογῆς τοῦ νόμου τῶν Boyle-Mariotte τὴν σχέσιν

$$h_1 s\,(P + l\varepsilon) = h_2 s\,(P - l\varepsilon)$$

ἐξ ἧς

$$h_2 = \frac{h_1(P + l\varepsilon)}{(P - l\varepsilon)}$$

$$h_2 = \frac{116,6(1050 + 0,6)}{(1050 - 0,6)} \text{ cm}$$

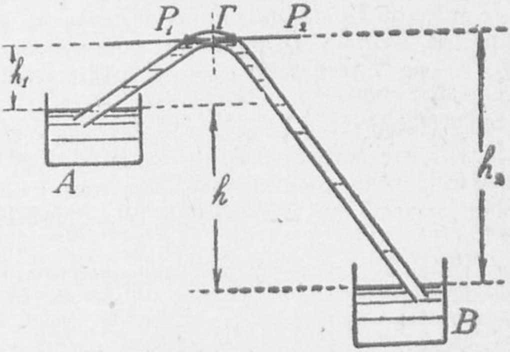
$$h_2 = \frac{1050,6}{9} \text{ cm}$$

$$\boxed{h_2 = 116,7 \text{ cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

359. Ἐντὸς δοχείου A (ἴδ. σχ. 50) τίθεται διάλυμα ἅλατος εἰδικοῦ βάρους $\varepsilon = 1{,}1$ gr*/cm³, ὅπερ διὰ σωλῆνος δρῶντος ὡς σίφωνος, μεταφέρεται εἰς δεύτερον δοχεῖον B.

Ζητεῖται : Ποία εἶναι ἡ πίεσις (P) ἥτις προκαλεῖ τὴν κίνη-



Σχ. 50

σιν τοῦ ὑγροῦ εἰς σημεῖον Γ ἂν αἱ ἐλεύθεραι ἐπιφάνειαι τῶν δύο δοχείων ἀπέχουν κατὰ $h = 7{,}3$ m.

Λύσις : Ἔστωσαν h_1 καὶ h_2 τὰ ὕψη τοῦ ἀνωτάτου σημείου (Γ) τοῦ σωλῆνος ἀπὸ τὰς δύο ἐλευθέρας ἐπιφανείας καὶ P_0 ἡ ἀτμοσφαικὴ πίεσις. Αἱ εἰς τὸ σημεῖον Γ ἀσκούμεναι πιέσεις θὰ εἶναι :

Ἐκ μὲν τῆς πλευρᾶς τοῦ A

$$P_1 = P_0 - h_1\varepsilon \qquad (1)$$

ἐκ δὲ τῆς τοῦ B

$$P_2 = P_0 - h_2\varepsilon \qquad (2)$$

ὁπότε ἡ ζητουμένη συνισταμένη πίεσις (P) θὰ εἶναι :

$$P = P_1 - P_2$$

καθ' ὅσον εἶναι $P_1 > P_2$, ἤτοι ὡς ἐκ τῶν (1) καὶ (2) :

$$P = P_0 - h_1\varepsilon - P_0 + h_2\varepsilon$$

$$P = h_2\varepsilon - h_1\varepsilon$$

$$P = (h_2 - h_1)\varepsilon$$

ὁπότε, ἕνεκα τῆς ἰσότητος $h = h_2 - h_1$, εὑρίσκομεν :

$$P = h\varepsilon$$

$$P = 7{,}3 . 1{,}1 \, \frac{m . gr^*}{cm^3}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$P = 730.1,1 \frac{gr^*}{cm^2}$$

$$\boxed{P = 803\ gr^*/cm^2}$$

360. Ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ κενοῦ σωλῆνος τοῦ Torricelli τίθεται ἀήρ, ὁπότε ὁ περιεχόμενος ὑδράργυρος ἰσορροπεῖ εἰς ὕψος h=70 cm, ὅταν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι P_0=1,01 Kg*/cm².

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ ἐντὸς τοῦ ἀρχικῶς κενοῦ περιεχόμενος ὄγκος (V) τοῦ ἀέρος (ὑπὸ πίεσιν P=1 Kg*/cm²) ἂν ἡ τομὴ τοῦ σωλῆνος εἶναι s=2 cm², τὸ ὕψος τοῦ περιέχοντος τὸ ἀέριον χώρου h′=20 cm, καὶ τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑδραργύρου ε=13,6 gr*/cm³.

Λύσις: Ἔστω P′ ἡ πίεσις τοῦ περιεχομένου ἀέρος, αὕτη θὰ εἶναι προφανῶς

$$P' = P_0 - h\varepsilon \qquad (1)$$

ὁ δὲ ὄγκος τοῦ ἀέρος (V′) ὑπὸ τὴν πίεσιν ταύτην εἶναι τότε

$$V' = sh' \qquad (2)$$

Αἱ τιμαὶ ὅμως τῶν P′ καὶ V′ θὰ συνδέωνται μὲ τὸν ζητούμενον ὄγκον V, ὑπὸ πίεσιν P, διὰ τῆς ἐξισώσεως

$$P'V' = PV$$

ἥτις, δυνάμει τῶν (1) καὶ (2), γίνεται:

$$(P_0 - h\varepsilon)sh' = PV$$

ὁπότε ἔχομεν:

$$V = \frac{(P_0 - h\varepsilon)sh'}{P}$$

$$V = \frac{(1010 - 70.13,6)2.20}{1000}\ cm^3$$

$$\boxed{V = 2,32\ cm^3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

361. Κυλινδρικὸς σωλήν, μήκους l = 50 cm καὶ τομῆς s=4,25 cm², κατακόρυφος, ἀνοικτὸς κατὰ τὸ κατώτερον ἄκρον του καὶ κλειστὸς ὑπὸ κινητοῦ ἐμβόλου κατὰ τὸ ἀνώτερον ἄκρον βυθίζεται ὁλόκληρος ἐντὸς ὕδατος.

Ζητεῖται: Μέχρι ποίου βάθους (x) πρέπει νὰ βυθισθῇ τὸ ἀνώτατον ἄκρον τοῦ σωλῆνος, ὥστε νὰ ἰσορροπῇ ἐντὸς τοῦ ὕδα-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τος τὸ κινητὸν ἔμβολον, ἐὰν τὸ βάρος του εἶναι $B=190$ gr*, τὸ εἰδ. βάρος του $\varepsilon = 9{,}5$ gr*/cm³, ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις $P=75$ cmHg (ὑπὸ $\varepsilon_{Hg}=13{,}6$ gr*/cm³), τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὕδατος $\varepsilon_0=1$ gr*/cm³, μὴ ὑπολογιζομένου τοῦ πάχους τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου καὶ τοῦ βάρους τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος.

Λύσις: $x=215$ cm.

362. Ἐντὸς δοχείου ὄγκου $V=10$ lit, φέροντος στρόφιγγα, εἰσάγεται εἰς ὄγκος $V_1=25$ lit ἀέρος ὑπὸ πίεσιν $P_1=1$ Kg*/cm² καὶ ἕτερος ὄγκος $V_2=5$ lit διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος ὑπὸ πίεσιν $P_2=3$ Kg*/cm².

Ἀνοίγεται ἐν συνεχείᾳ ἡ στρόφιγξ καὶ ἀφίεται νὰ ἐξέλθῃ ποσότης τοῦ μίγματος ἥτις καταλαμβάνει ὄγκον $V_3=30$ lit ὑπὸ πίεσιν $P=76$ cmHg.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πίεσις τοῦ περιερχομένου ἐντὸς τοῦ δοχείου μίγματος (P_x) πρὸ τῆς ἐξόδου τοῦ ὄγκου V_3 καὶ ποία μετὰ τὴν ἔξοδον τούτων (P_y), ὡς καὶ ποῖον τὸ συνολικὸν βάρος ἑκάστου τῶν ἀερίων (B_1 καὶ B_2), ἐὰν ἓν λίτρον ἀέρος ζυγίζει $\beta_1=1{,}293$ gr* καὶ ἓν λίτρον διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος $\beta_2=1{,}97$ gr* ὑπὸ τὴν σταθερὰν πίεσιν $P=76$ cmHg.

Λύσις: $P_x = 4$ Kg*/cm², $P_y = 1$ Kg*/cm², $B_1 = 8{,}08$ gr* καὶ $B_2=7{,}5$ gr*.

363. Διὰ σωλῆνος πυροβόλου ὅπλου, ἐσωτερικῆς διαμέτρου $R=6{,}5$ cm καὶ μήκους $l=3{,}6$ m, βάλλεται βλῆμα, τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν ἔξοδόν του ἐκ τοῦ σωλῆνος φέρει ἐνέργειαν

$$E=270.000 \text{ Kg*m}.$$

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ δύναμις (F) ἥτις, ὑποτιθεμένη σταθερά, ὠθεῖ τὸ βλῆμα κατὰ τὴν διαδρομὴν l, ὡς καὶ ποία ἡ πίεσις (P) ἣν ἀσκοῦν τὰ ἀέρια ἐπὶ τοῦ βλήματος, ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ἔκρηξις τοῦ μίγματος προσδίδει σταθερὰν πίεσιν καθ' ὅλην τὴν ἐντὸς τοῦ σωλῆνος διαδρομὴν τοῦ βλήματος.

Λύσις: $F=75000$ Kg*, $P=2269$ Kg*/cm².

364. Ἐντὸς ὑοειδοῦς σωλῆνος κλειστοῦ κατὰ τὸ ἓν ἄκρον (σωλῆνος τοῦ Mariotte), περιέχεται ὄγκος ἀέρος $V=12$ cm³, κλειόμενος δι' ὑδραργύρου ὑπὸ πίεσιν ἀτμοσφαιρικὴν $P=74$ cmHg. Ρίπτεται ἀκολούθως διὰ τοῦ ἀνοικτοῦ ἄκρου ὄγκος ὑδραργύρου $V'=30$ cm³, ὁπότε ἐλαττοῦται ὁ ὄγκος τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος ὡς ἐκ τῆς αὐξήσεως τῆς ἐξωτερικῆς πιέσεως.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ νέος ὄγκος τοῦ ἀέρος (V_x), ὡς καὶ ἡ πίεσίς του (P_x), δεδομένου τοῦ εἰδ. βάρους τοῦ ὑδραργύρου $\varepsilon=13{,}6$ gr*/cm³ καὶ τῆς τομῆς τοῦ σωλῆνος $s=1$ cm².

Λύσις: $V_x = 9{,}05$ cm³, $P_x = 1334{,}16$ gr*/cm².

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

365. Ἐντὸς βαρομετρικοῦ κενοῦ μήκους $λ_1$=8,4 cm σωλῆνος τοῦ Torricelli περιέχεται ἀὴρ καὶ ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου ἰσορροπεῖ εἰς ὕψος h_1=75,6 cm ἀπὸ τῆς τοῦ ἐντὸς τοῦ δοχείου ὑδραργύρου. Ἐν συνεχείᾳ βυθίζεται ὁ σωλὴν ἐντὸς τοῦ δοχείου ὁπότε ἡ μὲν στάθμη τοῦ ὑδραργύρου κατέρχεται εἰς ὕψος h_2=74,6 cm τὸ δὲ μῆκος τοῦ βαρομετρικοῦ θαλάμου γίνεται $λ_2$=2,1 cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πραγματικὴ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις (P) εἰς mmHg.

Λύσις: P=759,3 mmHg.

366. Δι' ἐμβολοφόρου ἀεραντλίας μὲ κύλινδρον ὄγκου v=1 lit ἐκκενοῦται χῶρος ὄγκου V, ὁπότε εἰς τὸ πέρας τῆς δευτέρας διαδρομῆς τοῦ ἐμβόλου ἡ πίεσις ἐντὸς τοῦ χώρου V γίνεται P=6,2 atm ἀπὸ P_0=19,22 atm ὡς ἦτο ἀρχικῶς.

Ζητεῖται: Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος V.

Λύσις: V=1,3 lit.

367. Ἐντὸς συστήματος ἡμισφαιρίων τοῦ Μαγδεβούργου, ἐξωτερικῆς διαμέτρου D = 12 cm τίθεται ἀὴρ ὑπὸ πίεσιν P_0=0,7 cmHg, ὁπότε, διὰ τὸν ἀποχωρισμὸν τῶν ἡμισφαιρίων ἀπαιτεῖται δύναμις F=114244,66 gr*.

Ζητεῖτα: Ποία εἶναι ὑπὸ τὰς συνθήκας ταύτας ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις (H), δεδομένου τοῦ εἰδ. βάρους τοῦ ὑδραργύρου ε=13,6 gr*/cm³.

Λύσις: H≃75 cmHg.

368. Ξύλινος κύλινδρος ἄνευ πόρων, ἐπιπλέει κατακορύφως βεβυθισμένος ἐντὸς ὕδατος οὕτως ὥστε, ὑπὸ πίεσιν τοῦ ἀέρος ἀτμοσφαιρικὴν (P_0=1 atm), νὰ ἐξέχῃ τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὕδατος κατὰ ὄγκον V=151 cm³.

Ζητεῖται: Πόσος θὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἐξέχοντος κυλίνδρου (V_x) ἂν ἡ πίεσις τοῦ ὑπερκειμένου ἀέρος γίνῃ P_1=15 atm, θεωρουμένου ὡς ἀσυμπιέστου τοῦ ὑγροῦ καὶ τοῦ κυλίνδρου καὶ δεδομένου τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ ἀέρος ε=0,001293 gr*/cm³ ὑπὸ πίεσιν P_0.

Λύσις: V_x = 153,8 cm³.

369. Τεμάχιον χρυσοῦ, βάρους B_1=3000 gr* εἰς τὸ κενόν, ζυγίζεται διὰ σταθμῶν εἰδ. βάρους ε=8,4 gr*/cm³, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐντὸς τοῦ ἀέρος ἀφ' ἑτέρου δὲ ἐντὸς ὕδατος.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ φαινομενικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ ἐντὸς τοῦ ἀέρος (B_2) καὶ ποῖον ἐντὸς τοῦ ὕδατος (B_3), ἂν τὸ εἰδ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι $\varepsilon'=19,5$ gr*/cm³, τὸ τοῦ ὕδατος $\varepsilon''=1$ gr*/cm³ καὶ τὸ τοῦ ἀέρος $\varepsilon'''=0,001293$ gr*/cm³.

Λύσις: $B_2=3000,26$ gr*, $B_3=2846,59$ gr*.

370. Κατακόρυφος κυλινδρικὸς σωλήν, κλειστὸς κατὰ τὸ ἄνω ἄκρον του βυθίζεται ἐντὸς λεκάνης πλήρους ὕδατος οὕτως ὥστε τοῦτο ν᾽ ἀνέρχεται ἐντὸς τοῦ σωλῆνος μέχρις ὕψους $l=25$ cm ἀπὸ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ ὕδατος τῆς λεκάνης, ὁπότε ἄνω τοῦ ὕδατος ὑπολείπεται, ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, χῶρος ὕψος $h=10$ cm πλήρης ἀέρος.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πίεσις τοῦ περιεχομένου ἀέρος (P) ὡς καὶ πόσον θὰ γίνῃ τὸ ὕψος (h΄) τοῦ περιέχοντος τὸν ἀέρα χώρου, ὅταν ὁ σωλὴν ἐμβαπτισθῇ ἐγτὸς τῆς λεκάνης μέχρις ὅτου τὸ ὕδωρ εὑρεθῇ εἰς τὸ αὐτὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον ἐντὸς καὶ ἐκτὸς τοῦ σωλῆνος, δεδομένης τῆς ἀτμοσφαιρικῆς πιέσεως $P_0=1,012$ Kg*/cm² καὶ τοῦ εἰδ. βάρους τοῦ ὕδατος $\varepsilon=1$ gr*/cm³.

Λύσις: $P=987$ gr*/cm², $h'=9,76$ cm.

371. Ὁ σωλὴν ἀναρροφητικῆς ὑδραντλίας, ὁ συνδέων τὸν κύλινδρον μὲ τὴν ἐλευθέραν ἐπιφάνειαν τοῦ πρὸς ἀνύψωσιν ὑγροῦ, ἔχει ὕψος $h=4$ m καὶ τομὴν $s=3$ cm², ἡ δὲ τομὴ τοῦ κυλίνδρου εἶναι, ἐσωτερικῶς, $S=200$ cm².

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ διαδρομὴ τοῦ ἐμβόλου ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου (x) ὥστε ὁ ἀναρροφητικὸς σωλὴν νὰ πληρωθῇ ὕδατος μὲ τὴν πρώτην παλινδρομικήν, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος εἶναι $\varepsilon=1$ gr*/cm³.

Λύσις: $x=11,6$ cm.

372. Ἐντὸς τοῦ ἑνὸς σκέλους κλειστοῦ μανομέτρου περιέχεται ἀὴρ καταλαμβάνων ὕψος $h_1=40$ cm, ὅταν ὁ ἐντὸς τῶν δύο σκελῶν ὑδράργυρος ἰσορροπεῖ εἰς τὸ αὐτὸ ὕψος, ὑπὸ πίεσιν $P_0=76$ cmHg.

Ζητεῖται: Πόσον θὰ γίνῃ τὸ ὕψος τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος (h_2) δι᾽ ἐξωτερικὴν πίεσιν $P'=228$ cmHg.

Λύσις: $h_2=16,7$ cm.

373. Ὑάλινον ποτήριον ὕψους $h=10$ cm βυθίζεται ἀνεστραμμένον ἐντὸς ὕδατος οὕτως ὥστε νὰ ἐξέχῃ τούτου κατὰ $d=2$ cm.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ κατὰ πόσον (x) θὰ κατέλθῃ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὕδατος ἐντὸς τοῦ ποτηρίου, ἂν ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις εἶναι $P_0=1$ Kg*/cm² καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος $\varepsilon=1$ gr*/cm³.

Λύσις: $x=7,9$ cm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

374. Ὑάλινος σωλὴν μήκους $l=15$ cm, κλειστὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον καὶ περιέχων ἀέρα, βυθίζεται κατακορύφως ἐντὸς λεκάνης πλήρους ὑγραργύρου, μὲ τὸ ἀνοικτὸν στόμιον πρὸς τὰ κάτω, ὁπότε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου, ἐντὸς τοῦ σωλῆνος, κατέρχεται κατὰ $h=8$ cm, ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴν στάθμην, ὅταν ὁ σωλὴν ἐξέχει κατὰ $\lambda=5$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις (P) δεδομένου τοῦ εἰδ. βάρους τοῦ ὑδραργύρου $\varepsilon=13{,}6$ gr*/cm^3.

Λύσις: $P=707{,}2$ gr*/cm^2.

375. Δοχεῖον χωρητικότητος $V_1=26{,}5$ lit, περιέχον ἄζωτον ὑπὸ πίεσιν $P_1=3{,}1$ atm, συγκοινωνεῖ, διὰ σωλῆνος φέροντος στρόφιγγα κλειστήν, μετ᾽ ἄλλου δοχείου, ὄγκου $V_2=30{,}6$ lit, περιέχοντος ὑγρογόνον ὑπὸ πίεσιν $P_2=0{,}5$ atm.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ πίεσις τοῦ μίγματος (P) ἄν, μετὰ τὸ ἄνοιγμα τῆς στρόφιγγος, τὰ δύο ἀέρια ἀχθοῦν εἰς συγκοινωνίαν μεταξύ των, προϋποτιθεμένου ὅτι δὲν ἀντιδροῦν χημικῶς.

Λύσις: $P=1{,}707$ atm.

376. Ποσότης ἀέρος, ὄγκου $V_1=17$ lit ὑπὸ πίεσιν $P_1=3{,}3$ atm, ἀναμιγνύεται μετὰ ποσότητος διοξειδίου τοῦ ἄνθρακος, ὄγκου $V_2=7{,}6$ lit ὑπὸ πίεσιν $P_2=0{,}1$ atm, ἐντὸς δοχείου ὄγκου V.

Ζητεῖται: Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ὄγκος οὗτος (V) ἵνα τὸ μῖγμα τῶν ἀερίων, μὴ ἀντιδρώντων χημικῶς, εὑρίσκεται ὑπὸ πίεσιν ἀτμοσφαιρικὴν ($P=1$ atm).

Λύσις: $V=56{,}86$ lit.

377. Ἀέριον ὀξυγόνον, ὄγκου $V_1=10$ lit ὑπὸ πίεσιν $P_1=8$ atm, ἀναμιγνύεται μετὰ ποσότητος ἀζώτου πιέσεως $P_2=0{,}02$ atm.

Ζητεῖται: Πόσος πρέπει νὰ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ ἀζώτου (V_2) ὑπὸ τὴν ἀνωτέρω πίεσιν P_2, ὥστε τὸ μῖγμα νὰ παρουσιάζῃ πίεσιν ἴσην μὲ τὸν μέσον ἀριθμητικὸν ὅρον τῶν δύο πιέσεων (P_1 καὶ P_2), ἐὰν περικλεισθῇ εἰς δοχεῖον ὄγκου $V=20$ lit.

Λύσις: $V_2=10$ lit.

378. Κυλινδρικὸς σωλήν, ἀνοικτὸς ἑκατέρωθεν, μήκους $l=25$ cm, βυθίζεται κατακορύφως ἐντὸς ὑδραργύρου οὕτως ὥστε νὰ ἐξέχῃ κατὰ $d=5$ cm, κλείεται ἀκολούθως, διὰ τοῦ δακτύλου, τὸ ἀνώτερον στόμιόν του καὶ ἐξάγεται τοῦ ὑδραργύρου.

Ζητεῖται: Ποῖον ὕψος (x) θὰ καταλαμβάνῃ ὁ ἐναπομένων

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὑδράργυρος ἐντὸς τοῦ σωλῆνος μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἰσορροπίας, ἂν ἡ πίεσις τῆς ἀτμοσφαίρας εἶναι P=75 cmHg.

Λύσις: x=18,38 cm.

379. Ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ κενοῦ σωλῆνος τοῦ Torricelli εἰσάγονται $V = 2$ cm³ ἀέρος ὑπὸ πίεσιν ἀτμοσφαιρικὴν P=75 cmHg, ὁπότε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ὑδραργύρου κατέρχεται κατὰ h_1=4 cm. Νέα ποσότης τοῦ αὐτοῦ ὄγκου V=2 cm³ ἀέρος, ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν, προκαλεῖ νέαν εἰσέτι πτῶσιν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑδραργύρου κατὰ h_2=3,5 cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι, ὡς ἐκ τῶν ὡς ἄνω μετρήσεων, ἡ τομὴ (s) τοῦ σωλῆνος.

Λύσις: s=0,714 cm².

380. Διὰ βαρομέτρου τοῦ Fortin εὑρίσκεται ἡ ἀτμ. πίεσις εἴς τόπον τινὰ ὡς ἀντιστοιχοῦσα εἰς ὕψος h=75 cmHg. Κλείεται ἀκολούθως ὁ κάτω θάλαμος τοῦ βαρομέτρου, ἐγκλείεται ἐντὸς τούτου ποσότης ἀέρος ὑπὸ τὴν ὡς ἄνω πίεσιν, καὶ μεταφέρεται τὸ ὅλον ὄργανον εἰς ἄλλον τόπον, ὁπότε, χωρὶς νὰ ἀνοιχθῇ ὁ θάλαμος οὗτος, τὸ ὕψος εὑρίσκεται εἰς τὸν ἀδραργυρικὸν σωλῶνα ἀνώτερον κατὰ d=1 cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος (g′) εἰς τὸν νέον τόπον ἂν εἰς τὸν πρῶτον αὕτη ἦτο g = 981 cm/sec² καὶ ἐὰν ὁ σωλὴν τοῦ Hg ἔχῃ τομὴν s=1 cm², ἡ δὲ λεκάνη τομὴν S=20 cm² καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἐγκλεισθέντος ἀέρος εἶναι V=100 cm³.

Λύσις: g′=958 cm/sec².

ΑΕΡΟΔΥΝΑΜΙΚΗ - ΣΥΝΟΧΗ - ΣΥΝΑΦΕΙΑ

381. Σφαιρικὸν ἀερόστατον, ὄγκου συνολικοῦ V=400 m³ πλῆρες ὑγρογόνου, ἀνυψώνει μικρὰν λέμβον βάρους B_0=10 Kg*.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ἀεροστάτου (γ) κατὰ τὴν ἐκκίνησιν, μὴ ὑπολογιζομένων τῶν τριβῶν καὶ τῆς ἀνώσεως τῆς λέμβου, ἂν τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ἀέρος εἶναι ε_1=0,0013 gr*/cm³ καὶ τοῦ ὑδρογόνου ε_2=0,00009 gr*/cm³.

Λύσις: Τὸ συνολικὸν βάρος (B) τοῦ ἀεροστάτου θὰ ἰσοῦται φροφανῶς μὲ τὸ τῆς λέμβου ηὐξημένον κατὰ τὸ τοῦ ὑδρογόνου (β), ἤτοι

$$B = B_0 + \beta$$

ὅπου ὅμως εἶναι $\beta = V\varepsilon_2$, ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$B = B_0 + V\varepsilon_2 \tag{1}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ ἄνωσις ἀφ' ἑτέρου (A) θὰ εἶναι :

$$A = V\varepsilon_1 \qquad (2)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὴν ἀνυψωτικὴν δύναμιν τοῦ ἀεροστάτου (F) :

$$F = V\varepsilon_1 - V\varepsilon_2 - B_0$$

$$F = V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - B_0$$

καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν ἐπιτάχυνσιν

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

$$\gamma = \frac{V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - B_0}{M_0 + Vd_2}$$

ὅπου M_0 ἡ μᾶζα ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὸ βάρος B_0 καὶ d_2 ἡ πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου, ὁπότε εὑρίσκομεν :

$$\gamma = \frac{g[V(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - B_0]}{B_0 + V\varepsilon_2}$$

$$\gamma = \frac{981[400.0{,}00121.10^6 - 10.10^3]}{10.10^3 + 400.0{,}00009.10^6} \; \frac{cm}{sec^2}$$

$$\gamma = \frac{981.474.10^3}{46.10^3} \; \frac{cm}{sec^2}$$

$$\boxed{\gamma = 101{,}08 \text{ m/sec}^2}$$

382. Ἐντὸς χώρου κλειστοῦ συσσωρεύεται ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν P=0,8 Kg*/cm², ἐξέρχεται δὲ ἐκ τοῦ χώρου τούτου διὰ πλαγίου σωλῆνος ἀκτῖνος R=0,1 cm καὶ μήκους λ=9,81 cm εἰς τὸν κενὸν χῶρον.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ κατὰ sec ἐξερχομένη διὰ τοῦ σωλῆνος ποσότης ἀέρος (Q), ἐὰν κατὰ τὴν ἐκροὴν ἡ πίεσις P διατηρῆται σταθερά, ὑπὸ νηματώδη ροήν, καὶ ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἰξώδους τοῦ ἀέρος εἶναι η=0,0001 cgs.

Λύσις: Ἡ ζητουμένη ποσότης Q δίδεται προφανῶς ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Poiseuille

$$Q = \frac{\pi R^4 P}{8\eta\lambda} \qquad (1)$$

ἐξ οὗ ἔχομεν :

$$Q = \frac{3{,}14.0{,}1^4.0{,}8.10^3.981}{8.0{,}0001.9{,}81} \; \frac{cm^3}{sec}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$Q = \frac{3,14.10^{-4}.8.10^{3}.981}{8.10^{-4}.981.10^{-2}} \; \frac{cm^3}{sec}$$

$$\boxed{Q = 31,4 \text{ lit/sec}}$$

383. Ἐκ κλειστοῦ χώρου ἐξέρχεται ἀέριόν τι πρὸς τὸν ἀτμοσφαιρικὸν ἀέρα, μέσω σωλῆνος μήκους λ=25,12 cm καὶ τομῆς ἀκτῖνος R=0,2 cm, μὲ παροχὴν Q=19,62 lit/sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ χώρου πίεσις (P) ἀερίου, ὑποτιθεμένη σταθερὰ κατὰ τὴν ἐκροήν, ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἰξώδους τοῦ ἀερίου εἶναι η=0,00008 cgs καὶ ἡ ἀτμοσφαιρικὴ πίεσις H=1 Kg*/cm², δεδεμένου ὅτι ἡ ροὴ παραμένει νηματώδης.

Λύσις: Ἡ ροή, ὡς νηματώδης, θ' ἀκολουθῇ τὸν τύπον (1) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ὅστις, ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$Q = \frac{\pi R^4 (P - H)}{8\eta\lambda}$$

Λύεται ὡς πρὸς P, ὁπότε προκύπτει ἡ σχέσις

$$P = \frac{8\eta\lambda Q}{\pi R^4} + H$$

εἰς τὴν ὁποίαν, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν η, λ κλπ. διὰ τῶν εἰς τὸ σύστημα cgs μονάδων εὑρίσκομεν:

$$P = \frac{8.0,00008.25,12.19,62.10^3}{3,14.0,2^4} \frac{dyn}{cm^2} + 1 \frac{Kg^*}{cm^2}$$

$$P = \frac{8.8.10^{-5}.25,12.19,62.10^3}{3,14.16.10^{-4}.10^3.981} + 1 \frac{Kg^*}{cm^2}$$

$$\boxed{P = 1,064 \text{ Kg}^*/\text{cm}^2}$$

384. Σιδηρᾶ σφαῖρα, πίπτουσα ἐντὸς τοῦ ἀέρος ὑφίσταται συνεχῆ ἐλάττωσιν τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητός της, ἕνεκα τῆς ἀντιστάσεως τοῦ ἀέρος, οὕτως ὥστε ἡ ἐπιτάχυνσίς της ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ τιμῆς g_0 = 981 cm/sec² κατὰ ποσόν τι β=30 cm/sec²/sec.

Ζητεῖται: Μετὰ πόσον χρόνον (t) ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς πτώσεως ἡ κίνησις θὰ γίνῃ ὁμαλή.

Λύσις: Ἡ ὕπαρξις σταθερᾶς μεταβολῆς (β) τῆς ἐπιταχύνσεως καθιστᾷ τὴν πτῶσιν κίνησιν μεταβαλλομένην μὲ ἐπιτάχυνσιν δευτέρας τάξεως (β) ἀντίρροπον πρὸς τὴν ἀρχικὴν ἐπιτάχυνσιν πρώτης τάξεως (g_0), διὰ τὴν ὁποίαν ἰσχύει τότε ἡ σχέσις

$$g = g_0 - \beta t$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε, ἵνα ἡ κίνησις γίνη ὁμαλὴ ($g=0$), εὑρίσκομεν :

$$g_0 - \beta t = 0$$

$$t = \frac{g_0}{\beta}$$

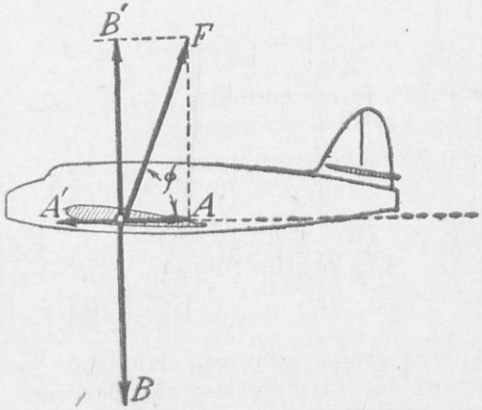
$$t = \frac{981}{30} \; \frac{cm \,.\, sec^{-2}}{cm \,.\, sec^{-3}}$$

$$\boxed{t = 32{,}7 \text{ sec}}$$

385. Ἀεροπλάνον ὁριζοντίως ἱπτάμενον δέχεται συνολικὴν δύναμιν (συνισταμένην τῆς ἀεροδυναμικῆς πιέσεως καὶ τῶν δυνάμεων τριβῆς) τιμῆς $F = 3000$ Kg*, σχηματίζουσαν γωνίαν $\varphi = 75^\circ$ μετὰ τοῦ ὁρίζοντος.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάρος τοῦ ἀεροπλάνου (B), ὡς καὶ ποία ἡ δυναμικὴ ἀντίστασις (A), ἥτις δέον νὰ ὑπερνικηθῇ ὑπὸ τῶν κινητήρων.

Λύσις: Τὸ βάρος, ὡς κατακόρυφος δύναμις (ἴδ. σχ. 51), ἴση



Σχ. 51

καὶ ἀντίθετος μὲ τὴν δυναμικὴν ἄνωσιν τοῦ ἀεροπλάνου θὰ εἶναι προφανῶς

$$B = F.\eta\mu\varphi$$

ὁπότε, εὑρίσκοντες ἐκ τῶν πινάκων τὴν τιμὴν τοῦ ημφ, ἔχομεν :

$$B = 3000.0{,}96593 \text{ Kg*}$$

$$\boxed{B = 2897{,}79 \text{ Kg*}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀντιστοίχως ἡ δυναμικὴ ἀντίστασις (A), ὡς ὁριζοντία, εἶναι:

$$A = F.\text{συνφ}$$

ὁπότε εὑρίσκομεν:

$$A = 3000.0,25882 \ Kg^*$$

$$\boxed{A = 776,46 \ Kg^*}$$

386. Ἀεροπλάνον βάρους $B=4000$ Kg* κινεῖται ὁριζοντίως μὲ ταχύτητα $v=270$ Km/h, δεχόμενον συνολικὴν δύναμιν (συνισταμένων ἀεροδυναμικῶν πιέσεων καὶ δυνάμεων τριβῆς) $F=4200$ Kg*.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς (J) εἰς HP τῶν κινητήρων, ἵνα τὸ ἀεροπλᾶνον κινῆται ὁριζοντίως μὲ τὴν ὡς ἄνω ταχύτητα v.

Λύσις: Ἔστω f ἡ ὁριζοντία συνιστῶσα τῆς F. Αὕτη, ὡς δυναμικὴ ἀντίστασις, θὰ συνδέεται ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν μὲ τὴν ἰσχὺν καὶ τὴν ταχύτητα διὰ τοῦ τύπου

$$J = fv \tag{1}$$

ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ μὲ τὰς F καὶ B διὰ τοῦ τύπου

$$F^2 = B^2 + f^2$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$f = \sqrt{F^2 - B^2} \tag{2}$$

ὁπότε ἡ (1), διὰ τῆς τιμῆς τῆς f ἐκ τῆς (2), γίνεται:

$$J = v\sqrt{F^2 - B^2}$$

$$J = 270\sqrt{4200^2 - 4000^2} \ \frac{Kg^*.Km}{h}$$

$$J = 270 \ \frac{\sqrt{1640000.10^3}}{60.60} \ \frac{Kg^*.m}{sec}$$

$$J = \frac{270.1280.10^3}{60.60.75} \ HP$$

$$\boxed{J = 1280 \ HP}$$

387. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς μήκους $\lambda = 0,1$ cm λεπτοῦ ὑμένος ὕδατος, ἐφαρμόζεται δύναμίς τις F ἥτις παρεμποδίζει τὴν συρρύκνωσιν τοῦ ὑμένος λόγῳ τῶν δυνάμεων τῆς ἐπιφανειακῆς τάσεως.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ δύναμις αὕτη (F), ἂν ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ ὕδατος εἶναι $\alpha=73$ erg/cm².

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$F = 2\alpha\lambda$$

ἔχομεν:

$$F = 2.0{,}1.73\ \frac{\text{erg . cm}}{\text{cm}^2}$$

$$F = 2.0{,}1.73\ \frac{\text{dyn . cm . cm}}{\text{cm}^2}$$

$$\boxed{F = 14{,}6 \text{ dynes}}$$

388. Ἐντὸς λεπτοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος, ἀκτῖνος R=0,01 cm, συγκοινωνοῦντος μὲ εὐρὺ ἕτερον δοχεῖον, τίθεται ὑδράργυρος, ὁπότε παρουσιάζεται πτῶσις (h) τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ ἐντὸς τοῦ τριχοειδοῦς, ὡς πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐντὸς τοῦ εὐρέως δοχείου ὑδραργύρου.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πτῶσις αὕτη (h) ἐὰν ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως τοῦ Hg εἶναι α=500 erg/cm², ἡ πυκνότης του d = 13,6 gr/cm³ καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g=981 cm/sec².

Λύσις: Ἡ πτῶσις h, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον τοῦ Jurin, θὰ εἶναι:

$$h = \frac{2\alpha}{Rdg}$$

ὁπότε ἔχομεν:

$$h = \frac{2.500}{0{,}01.13{,}6.981}\ \frac{\text{erg . cm}^3\text{.sec}^2}{\text{cm}^2\text{. cm . gr . cm}}$$

$$\boxed{h = 7{,}49 \text{ cm}}$$

389. Ἐντὸς λεπτοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος, συγκοινωνοῦντος μετὰ εὐρέος ἑτέρου σωλῆνος, τίθεται αἰθήρ, ὁπότε ἡ παρουσιαζομένη ἀνύψωσις εἶναι h=4,9 cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πυκνότης (d) τοῦ αἰθέρος, ἂν ἡ ἀκτὶς τοῦ τριχοειδοῦς σωλῆνος εἶναι r=0,01 cm, ὁ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς τάσεως α=17,1 gr/sec² καὶ ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος g=9,81 m/sec².

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Jurin, λύοντες ὡς πρὸς d ἔχομεν:

$$d = \frac{2\alpha}{rhg}$$

ὁπότε εὑρίσκομεν:

$$d = \frac{2.17{,}1}{0{,}01.4{,}9.981}\ \frac{\text{gr . sec}^{-2}}{\text{cm . cm . cm . sec}^{-2}}$$

$$\boxed{d = 0{,}71 \text{ gr/cm}^3}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

390. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα διαστάσεων καθορίζονται ὡς θεμελειώδεις αἱ διαστάσεις ἐπιφανείας [E], πυκνότητος [D] καὶ ταχύτητος [U].

Ζητεῖται: Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ εἰς τὸ σύστημα τοῦτο διαστάσεις τοῦ συντελεστοῦ ἐπιφανειακῆς τάσεως [α].

Λύσις: Ἐκ τοῦ στοιχειώδους τύπου

$$F = 2\alpha\lambda$$

ἔχομεν:

$$\alpha = \frac{F}{2\lambda}, \quad [\alpha] = \frac{[F]}{[\lambda]} \qquad (1)$$

Ἀλλὰ τοῦ μὲν μήκους αἱ διαστάσεις εἶναι προφανῶς

$$[\lambda] = E^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

καθ᾽ ὅσον $[\lambda]^2 = E$, τῆς δὲ δυνάμεως προκύπτουν ἐκ τῶν σχέσεων:

$$F = \frac{m.S}{t^2}$$

$$[F] = [m].[S]\,[t]^{-2} \qquad (3)$$

ὅπου εἶναι

$$m = d.V, \; [m] = D.E^{\frac{3}{2}} \qquad (4)$$

$$t = \frac{S}{v}, \; [t] = E^{\frac{1}{2}}.U^{-1} \qquad (5)$$

ὁπότε, ἐκ μὲν τῶν (4) καὶ (5) ἡ (3) γίνεται:

$$[F] = D.E^{\frac{3}{2}}.E^{\frac{1}{2}}.\left(E^{\frac{1}{2}}.U^{-1}\right)^{-2}$$

$$[F] = D.E.U^2 \qquad (6)$$

ἐκ δὲ τῶν (6) καὶ (2) ἡ (1) εἶναι τελικῶς:

$$[\alpha] = \frac{D.E.U^2}{E^{\frac{1}{2}}}$$

$$\boxed{[\alpha] = D.E^{\frac{1}{2}}.U^2}$$

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟΥΛΗΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

IV. ΘΕΡΜΟΤΗΣ

ΘΕΡΜΟΣΤΑΤΙΚΗ

391. Ἡ ὑπὸ θερμομέτρου τοῦ Fahrenheit σημειουμένη θερμοκρασία εἶναι $t_F = -15^\circ F$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος εἰς βαθμοὺς Réaumur θερμοκρασία (t_R).

Λύσις: Ἐκ τῶν δύο στοιχειωδῶν σχέσεων

$$t_R = \frac{4}{5} t_c \qquad (1)$$

$$t_F = \frac{9}{5} t_c + 32 \qquad (2)$$

ἀποτελουσῶν σύστημα, ἐξαλοίφομεν τὰς t_c καὶ ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$t_F = \frac{9}{4} t_R + 32$$

ὁπότε εὑρίσκομεν

$$t_R = \frac{4(t_F - 32)}{9}$$

$$\boxed{t_R = 20{,}88^\circ R}$$

392. Ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀπολύτου μηδενός, εἰς βαθμοὺς Κελσίου, εἶναι $t_c = -273^\circ C$.

Ζητεῖται: Πόση εἶναι ἡ θερμοκρασία αὕτη εἰς βαθμοὺς Fahrenheit (t_F) καὶ πόση εἰς βαθμοὺς Réaumur (t_R).

Λύσις: Ἐκ μὲν τοῦ τύπου

$$t_R = \frac{4}{5} t_c$$

ἔχομεν:

$$t_R = \frac{4(-273)}{5}$$

$$\boxed{t_R = -218{,}4^\circ R}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐκ δὲ τοῦ τύπου

$$t_F = \frac{9t_c}{5} + 32$$

ἔχομεν :

$$t_F = \frac{9\,(-273)}{5} + 32$$

$$\boxed{t_F = -459{,}4^{\circ}F}$$

393. Εἰς θερμοκρασίαν τινα αἱ ἐνδείξεις τῶν θερμομέτρων τοῦ Réaumur (t_R) καὶ τοῦ Fahrenheit (t_F) εἶναι αἱ αὐταί.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία αὕτη (x).

Λύσις: Ἐκ τῶν δύο τύπων

$$t_R = \frac{4}{5}\,t_c \tag{1}$$

$$t_F = \frac{9}{5}\,t_c + 32 \tag{2}$$

εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$t_F = \frac{9t_R}{4} + 32$$

εἰς τὴν ὁποίαν θέτοντες

$$t_F = t_R = x$$

ἔχομεν :

$$x = \frac{9x}{4} + 32$$

$$\boxed{x = -25{,}6^{\circ}}$$

394. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα θερμομετρικῆς κλίμακος θερμοκρασία $\vartheta_1 = 0^{\circ}$ ἀντιστοιχεῖ εἰς θερμοκρασίαν $t_1 = 100^{\circ}C$ καὶ ἑτέρα $\vartheta_2 = 25^{\circ}$ εἰς $t_2 = 0^{\circ}C$, μὲ σταθερὰ διαστήματα δι᾽ ἕκαστον βαθμὸν ϑ.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ τύπος ὁ συνδέων τὰς θερμοκρασίας ταύτας (ϑ) μὲ τὰς τοῦ Κελσίου (t).

Λύσις: Ἐκ τοῦ ὅτι εἰς $100^{\circ}C$ ἀντιστοιχοῦν $25^{\circ}\vartheta$ προκύπτει ὅτι ἕκαστος βαθμὸς ϑ εἶναι ἴσος μὲ $4^{\circ}C$, ἐξ οὗ ἔχομεν ἀρχικῶς

$$t = 4\vartheta \tag{1}$$

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ μέτρησις γίνεται κατ᾽ ἀντίθετον φοράν, προκύπτει ἐκ τούτου ὅτι εἰς τὸν τύπον (1) πρέπει τὸ t ν᾽ ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ (100—t), ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν :

$$\boxed{(100 - t) = 4\vartheta}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

395. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα θερμοκρασιῶν (ϑ) ἡ θερμοκρασία τῶν 0°C καθορίζεται ὡς $\vartheta_1 = -5^\circ$, ἡ δὲ τῶν 100°C ὡς $\vartheta_2 = 450^\circ$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀπολύτου μηδενὸς (ϑ_0) εἰς τὸ αὐθαίρετον τοῦτο σύστημα διὰ $t_0 = -273$°C.

Λύσις: Ἐκ τῶν δεδομένων τιμῶν συμπεραίνομεν ὅτι εἰς 100°C ἀντιστοιχοῦν 455°ϑ, ὁπότε εἰς ἕκαστον βαθμὸν C ἀντιστοιχοῦν 4,55°ϑ, ὁπότε ἀρχικῶς ἔχομεν τὸν τύπον

$$t = \frac{\vartheta}{4,55}$$

ὅστις, ἐπειδὴ εἶναι τὸ 0°C ἴσον μὲ —5°ϑ, γίνεται:

$$t = \frac{\vartheta + 5}{4,55}$$

ὁπότε, θέτοντες ὅπου t τὴν $t_0 = -273$°C, εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\boxed{\vartheta = -1247,15}$$

396. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα θερμοκρασιῶν δίδεται ἡ τιμὴ $\vartheta_0 = 0^\circ$ εἰς τὴν τοῦ ἀπολύτου μηδενὸς καὶ $\vartheta_1 = 100^\circ$ εἰς τὴν θερμοκρασίαν ζέσεως τοῦ ἄνθρακος.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν τούτων (ϑ) καὶ τῶν τοῦ Κελσίου (t), ἂν τὸ ἀπόλυτον μηδὲν εἶναι $t_0 = -273$°C καὶ ἡ θερμοκρασία ζέσεως τοῦ ἄνθρακος $t_1 = 4827$°C.

Λύσις: Ἐντὸς διαστήματος $273 + 4827 = 5100$ Κελσίου ἀντιστοιχοῦν 100 βαθμοὶ ϑ, ἐξ οὗ, ὡς καὶ εἰς τὰς προηγουμένας ἀσκήσεις, προκύπτει ἡ τελικὴ σχέσις:

$$\boxed{t = 51\vartheta - 273}$$

397. Ράβδος ἐξ ἀργύρου παρουσιάζει μῆκος $\lambda_1 = 120$ cm εἰς θερμοκρασίαν $t_1 = 25$°C.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ νέον μῆκός της (λ_2) εἰς θερμοκρασίαν $t_2 = 30$°C, ἂν ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ Ἀργύρου εἶναι $\alpha = 0,00002$ grad^{-1}.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\lambda_2 = \lambda_1 [1 + \alpha (t_2 - t_1)]$$

εὑρίσκομεν:

$$\lambda_2 = 120 [1 + 0,00002.5]$$

$$\boxed{\lambda_2 = 120,012 \text{ cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

398. Ὁ γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ βισμουθίου εἶναι, εἰς τὴν κλίμακα τοῦ Κελσίου, $\lambda_c = 0{,}000013\ \text{grad}^{-1}$.

Ζητεῖται: Ποῖος θὰ εἶναι, διὰ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον, ὁ συντελεστὴς διαστολῆς εἰς τὴν κλίμακα τοῦ Réaumur (λ_R).

Λύσις: Ἐφ' ὅσον ἕκαστος βαθμὸς Κελσίου ἰσοῦται μὲ τὰ 8/10 ἑνὸς βαθμοῦ Réaumur, ἕπεται ἐκ τούτου ὅτι θὰ εἶναι:

$$\lambda_R = \frac{10}{8}\lambda_c$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν

$$\lambda_R = \frac{10.0{,}000013}{8}$$

$$\boxed{\lambda_R = 0{,}000016\ \text{grad}^{-1}}$$

399. Εἰς τὴν κλίμακα τοῦ Κελσίου ὁ γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ Ἀργιλλίου εἶναι $\lambda_c = 0{,}000022\ \text{grad}^{-1}$, εἰς ἄλλην δέ, ἄγνωστον, κλίμακα οὗτος εἶναι $\lambda_x = 0{,}000012\ \text{grad}^{-1}$.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἐκ τῶν γνωστῶν θερμομετρικῶν κλιμάκων ἀντιστοιχεῖ ὁ συντελεστὴς οὗτος (λ_x).

Λύσις: Πρὸς εὕρεσιν τῆς κλίμακος εἰς ἣν ἀντιστοιχεῖ ὁ συντελεστὴς λ_x ἀρκεῖ νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν βαθμῶν Κελσίου πρὸς τοὺς τῆς ἀγνώστου κλίμακος (x).

Λαμβάνομεν ὡς ἐκ τούτου τὴν σχέσιν

$$\alpha = \frac{c}{x} \qquad (1)$$

ὅπου α ὁ ζητούμενος λόγος, καὶ τὴν

$$\frac{c}{x} = \frac{\lambda_x}{\lambda_c} \qquad (2)$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$\alpha = \frac{\lambda_x}{\lambda_c}$$

$$\alpha = \frac{0{,}000012}{0{,}000022}$$

$$\boxed{\alpha \simeq \frac{5}{9{,}2}}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι πρόκειται περὶ γνωστῆς κλίμακος, ἐξάγεται τὸ συμπέρασμα ὅτι αὕτη εἶναι ἡ τοῦ Fahreinheit, ὅπου ὁ λόγος μὲ τὴν κλίμακα τοῦ Κελσίου εἶναι $\alpha = 5/9$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

400. Ράβδος ἐξ ὀρειχάλκου, συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς $\lambda=0,000018$ grad^{-1}, ἔχει μῆκος $\Lambda=11,5$ m εἰς θερμοκρασίαν $t=150°C$.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν (t_0) τὸ μῆκος τῆς ράβδου θὰ εἶναι $\Lambda_0=11,48$ m.

Λύσις: Δεδομένου ὅτι μεταξὺ τῶν μηκῶν καὶ τῶν θερμοκρασιῶν ἰσχύουν αἱ ἀνισότητες:

$$\Lambda_0 < \Lambda \text{ καὶ } t_0 < t$$

ὁ τύπος τῆς γραμμικῆς διαστολῆς τῶν σωμάτων θὰ λάβῃ τὴν μορφήν:

$$\Lambda = \Lambda_0 [1 + \lambda (t - t_0)]$$

ὁπότε, λύοντες ὡς πρὸς t_0, ἔχομεν:

$$t_0 = \frac{\Lambda_0 (1 + \lambda t) - \Lambda}{\Lambda_0 \lambda}$$

$$\boxed{t_0 = 53,3°C}$$

401. Ράβδος ἐκ Μολύβδου, γραμμικοῦ συντελεστοῦ διαστολῆς $\lambda=0,000029$ grad^{-1}, ἔχει μῆκος $\Lambda=1$ m εἰς θερμοκρασίαν $t=27°C$.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον μῆκος ὅπερ δύναται ν' ἀποκτήσῃ ἡ ράβδος αὐτη ἂν ψυγῇ μέχρι τοῦ ἀπολύτου μηδενός, ὑποτιθεμένου τοῦ συντελεστοῦ λ σταθεροῦ δι' οἱανδήποτε θερμοκρασίαν.

Λύσις: Διὰ τὸ ἀπόλυτον μηδὲν ($t_0 = -273°C$) τὸ ἐλάχιστον μῆκος Λ_0 θὰ εἶναι προφανῶς

$$\Lambda_0 = \frac{\Lambda}{1 + \lambda (t - t_0)}$$

ὁπότε ἔχομεν:

$$\Lambda_0 = \frac{\Lambda}{1 + 300.\lambda}$$

$$\boxed{\Lambda_0 = 0,9913 \text{ m}}$$

402. Ράβδος ἐκ Ψευδαργύρου, συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς $\lambda_1 = 0,000028$ grad^{-1}, ἔχει μῆκος $\Lambda_1 = 20,2$ m. Ἑτέρα ράβδος ἐκ Βολφραμίου, συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς $\lambda_2=0,000003$ grad^{-1}, ἔχει μῆκος $\Lambda_2=20,3$ m.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον (t) πρέπει νὰ θερμανθοῦν αἱ δύο ράβδοι, εὑρισκόμεναι ἀρχικῶς εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν, ἵνα ἀποκτήσουν τὸ αὐτὸ μῆκος, ὡς καὶ πόσον θὰ εἶναι τοῦτο (Λ).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Τὸ κοινὸν τελικὸν μῆκος (Λ), ἐκπεφρασμένον συναρτήσει τῶν δεδομένων τῶν δύο ῥάβδων εἶναι ἀντιστοίχως:

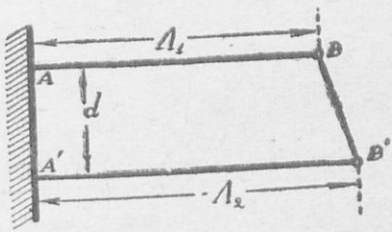
$$\Lambda = \Lambda_1 (1 + \lambda_1 t) \qquad (1)$$

$$\Lambda = \Lambda_2 (1 + \lambda_2 t) \qquad (2)$$

ὁπότε ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), ἀποτελουσῶν σύστημα, εὑρίσκομεν τοὺς δύο ἀγνώστους (t καὶ Λ), λύοντες τοῦτο κατὰ τὰ γνωστά:

$$\boxed{\begin{array}{l} t = 198{,}1 \text{ grad} \\ \Lambda = 20{,}312 \text{ m} \end{array}}$$

403. Δύο ῥάβδοι, ἡ μία ἐκ σιδήρου καὶ ἡ ἄλλη ἐκ χαλκοῦ, παράλληλοι καὶ ἀκλονήτως συνδεδεμέναι κατὰ τὸ ἓν ἄκρον Α καὶ Α′ (ἴδ. σχ. 52), συνδέονται δι᾽ ἐλαστικοῦ νήματος ΒΒ′



Σχ. 52

κατὰ τὸ δεύτερον ἄκρον των, ἔχουν δὲ μῆκος ἀντιστοίχως Λ_1=10 cm καὶ Λ_2=11 cm.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς περικλειομένης ἐπιφανείας ΑΑ′Β′Β, ἂν αἱ ῥάβδοι θερμανθοῦν κατὰ t=100°C, δεδομένης τῆς ἀποστάσεως ΑΑ′ ἴσης μὲ d = 8 cm καὶ τῶν συντελεστῶν διαστολῆς ἀντιστοίχως λ_1 = 0,000012 grad^{-1} καὶ λ_2=0,000016 grad^{-1}.

Λύσις: Μετὰ τὴν κατὰ t βαθμοὺς θέρμανσίν των αἱ δύο παράλληλοι ῥάβδοι θὰ περικλείουν ἐπιφάνειαν τραπεζίου, ὕψους μὲν d καὶ βάσεων Λ_1' καὶ Λ_2' ἀντιστοίχως:

$$\Lambda_1' = \Lambda_1 (1 + \lambda_1 t) \qquad (1)$$

$$\Lambda_2' = \Lambda_2 (1 + \lambda_2 t) \qquad (2)$$

Ἡ ἐπιφάνεια αὕτη θὰ ἔχῃ τότε τιμὴν

$$E = \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2')d}{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι, ἐκ τῶν (1) καὶ (2):

$$E = \frac{[\Lambda_1 (1 + \lambda_1 t) + \Lambda_2 (1 + \lambda_2 t)]\, d}{2}$$

$$\boxed{E = 84{,}1184\ cm^2}$$

404. Μεταλλικὴ ῥάβδος μήκους $\Lambda_1 = 10$ cm θερμαίνεται κατὰ t=450°C, ὁπότε τὸ μῆκός της γίνεται Λ_2=10,1305 cm.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς της (λ).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\Lambda_2 = \Lambda_1 (1 + \lambda t)$$

λύοντες ὡς πρὸς λ, εὑρίσκομεν:

$$\lambda = \frac{\Lambda_2 - \Lambda_1}{\Lambda_1 t}$$

ἤτοι

$$\lambda = \frac{10{,}1305 - 10}{10.450} \ \frac{cm}{cm\,.\,grad}$$

$$\boxed{\lambda = 0{,}000029\ grad^{-1}}$$

405. Στεφάνη ἐξ ὀρειχάλκου, συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς λ=0,000018 $grad^{-1}$, ἔχει ἀκτῖνα R=10 cm εἰς θερμοκρασίαν τινά, εἰς ἣν σφαῖρα ἐκ σιδήρου (συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς λ′=0,000012 $grad^{-1}$) ἔχει ἀκτῖνα R′=10,101 cm.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσους βαθμοὺς (t) πρέπει νὰ θερμανθῇ τὸ σύστημα τῶν δύο σωμάτων, ὥστε ἡ σφαῖρα νὰ διέρχεται ἐλευθέρως διὰ τῆς στεφάνης.

Λύσις: Διὰ νὰ διέρχεται ἡ σφαῖρα διὰ τῆς στεφάνης, πρέπει τὰ δύο ταῦτα σώματα νὰ παρουσιάζουν τὴν αὐτὴν διάμετρον ἤτοι τὴν αὐτὴν ἀκτῖνα (x), ὁπότε θὰ εἶναι, ἀφ᾿ ἑνὸς μὲν

$$x = R (1 + \lambda t) \qquad (1)$$

ἀφ᾿ ἑτέρου δὲ

$$x = R' (1 + \lambda' t) \qquad (2)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$R (1 + \lambda t) = R' (1 + \lambda' t)$$

$$t = \frac{R' - R}{R\lambda - R'\lambda'}$$

$$\boxed{t = 16{,}48\ grad}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

406. Τρίγωνον, ἐξ ἐλάσματος ὀρειχάλκου, ἔχει βάσιν d=20 cm καὶ ὕψος h=36 cm εἰς θερμοκρασίαν τινα.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια (E) τοῦ τριγώνου τούτου εἰς θερμοκρασίαν μεγαλυτέραν κατὰ t=110°C, ἂν ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι λ=0,000018 grad^{-1}.

Λύσις: Ἡ ἀρχικὴ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι

$$E_0 = \frac{dh}{2} \qquad (1)$$

ὁ δὲ συντελεστὴς ἐπιφανειακῆς διαστολῆς τοῦ ὀρειχάλκου

$$\sigma = 2\lambda \qquad (2)$$

Ὁπότε ὁ τύπος τῆς ἐπιφανειακῆς διαστολῆς

$$E = E_0 (1 + \sigma t)$$

ἐκ τῶν (1) καὶ (2) γίνεται:

$$E = \frac{dh}{2} (1 + 2\lambda t)$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\boxed{E = 361{,}4256 \text{ cm}^2}$$

407. Μεταλλικὸν λεπτὸν ἔλασμα παρουσιάζει ἐπιφάνειαν $S_1 = 1$ m² εἰς θερμοκρασίαν τινὰ $t_1 = 21$°C καὶ ἐπιφάνειαν $S_2 = 1{,}0056$ m² εἰς θερμοκρασίαν $t_2 = 121$°C.

Ζητεῖται: Ποῖος θὰ εἶναι ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς (λ) τοῦ μετάλλου τοῦ ἐλάσματος.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$S_2 = S_1 (1 + \sigma t)$$

εὑρίσκομεν κατ᾽ ἀρχὴν τὸν συντελεστὴν τῆς ἐπιφανειακῆς διαστολῆς

$$\sigma = \frac{S_2 - S_1}{S_1 t}$$

$$\sigma = \frac{S_2 - S_1}{S_1 (t_2 - t_1)} \qquad (1)$$

ὁπότε ὁ συντελεστὴς τῆς γραμμικῆς διαστολῆς θὰ εἶναι:

$$\lambda = \frac{\sigma}{2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι, ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ σ ἐκ τῆς (1):

$$\lambda = \frac{S_2 - S_1}{2S_1(t_2 - t_1)}$$

ὁπότε ἔχομεν:

$$\lambda = \frac{1{,}0056 - 1}{2.1.(121 - 21)}\ \text{grad}^{-1}$$

$$\boxed{\lambda = 0{,}000028\ \text{grad}^{-1}}$$

408. Σιδηρὰ ῥάβδος θερμαίνεται ἀπὸ θερμοκρασίας τινος $t_0 = 0°C$, ὅπου τὸ μῆκός της εἶναι $l_0 = 100$ cm, εἰς θερμοκρασίαν τινα t, ὁπότε τὸ μῆκός της αὐξάνεται κατὰ $l = 0{,}7$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία t, ἂν ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου εἶναι $\lambda = 0{,}000012$ grad^{-1}.

Λύσις: Τὸ τελικὸν μῆκος τῆς ῥάβδου, ἴσον μὲ $l_0 + l$ θὰ συνδέεται μὲ τὸ ἀρχικὸν τῆς σχέσεως

$$l_0 + l = l_0\,[1 + \lambda\,(t - t_0)]$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν (ἐφ' ὅσον εἶναι $t_0 = 0$):

$$t = \frac{l}{\lambda l_0}\ \frac{\text{cm}}{\text{grad}^{-1}.\text{cm}}$$

$$t = \frac{0{,}7}{0{,}000012.100}\ \text{grad}$$

$$\boxed{t = 583{,}3°C}$$

409. Ὡρολογιακὸν ἐκκρεμές, ἐξ ὀρειχάλκου, ἔχει περίοδον $T_0 = 2$ sec εἰς θερμοκρασίαν τινα $t_0 = 20°C$.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ θερμοκρασία γίνῃ $t_1 = 70°C$, κατὰ πόσον τὸ ὡρολόγιον θὰ καθυστερῇ ἐντὸς εἰκοσιτετραώρου, ἂν ὁ συντελ. γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι $\lambda = 0{,}000018$ grad^{-1}, καὶ ἂν τὸ ἐκκρεμὲς ὑπακούῃ εἰς τοὺς νόμους τοῦ μαθηματικοῦ τοιούτου.

Λύσις: Ἔστω l_0 τὸ μῆκος τοῦ ἐκκρεμοῦς εἰς θερμοκρασίαν t_0. Ἡ εἰς τὸ μῆκος τοῦτο ἀντιστοιχοῦσα περίοδος T_0 θὰ εἶναι:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}} \qquad (1)$$

Τὸ εἰς θερμοκρασίαν t_1 μῆκος θὰ εἶναι ὅμως

$$l_1 = l_0\,(1 + \lambda t)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅπου εἶναι $t=t_1-t_0$, ὁπότε ἡ εἰς τὸ νέον τοῦτο μῆκος ἀντιστοιχοῦσα περίοδος εἶναι:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_0(1+\lambda t)}{g}} \qquad (2)$$

ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ T_1:

$$T_1 = T_0\sqrt{1+\lambda t}$$

Ἀλλὰ ὡς ἐκ τῆς τιμῆς T_0 τῆς περιόδου εὑρίσκομεν ὅτι ἐντὸς ἑνὸς 24ώρου τὸ ἐκκρεμὲς ἐκτελεῖ $n=43200$ αἰωρήσεις αἵτινες, διὰ τὴν περίοδον T_1, ἀντιστοιχοῦν εἰς χρόνον (ϑ):

$$\vartheta = 43200T_0\sqrt{1+\lambda t}$$

ὁπότε τὸ ὡρολόγιον θὰ ὑστερεῖ κατὰ χρόνον (x):

$$x = 43200T_0\sqrt{1+\lambda t} - 43200T_0$$

$$\boxed{x = 3{,}456 \text{ sec}}$$

410. Ἐντὸς ὀρειχαλκίνης σφαίρας, ἐσωτερικῶς κενῆς καὶ ἐκ λεπτοτάτων τοιχωμάτων, ὄγκου $V=100$ cm^3, περιέχεται ποσότης $B=69{,}3$ gr* αἰθέρος, ὅστις πληροῖ οὕτω μέρος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσους βαθμοὺς Κελσίου (t) πρέπει νὰ θερμανθῇ τὸ ὅλον σύστημα, ὥστε ὁ αἰθὴρ νὰ καλύψῃ ὁλόκληρον τὸν ἐσωτερικὸν χῶρον, ἂν ὁ συντελ. γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι $\lambda=0{,}000018$ grad^{-1} τοῦ αἰθέρος ὁ ἀπόλυτος συντελ. διαστολῆς $u=0{,}0016$ grad^{-1} καὶ τὸ εἰδ. βάρος τοῦ αἰθέρος $\varepsilon=0{,}7$ gr*/cm^3.

Λύσις: Μετὰ αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας κατὰ t βαθμοὺς ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας θὰ εἶναι προφανῶς:

$$V_t = V(1+3\lambda t) \qquad (1)$$

καθ' ὅσον ὁ συντελεστὴς τῆς κυβικῆς διαστολῆς της εἶναι 3λ.

Ὁμοίως, ὁ ὄγκος τοῦ αἰθέρος θὰ εἶναι:

$$V_t = \frac{B}{\varepsilon}(1+ut) \qquad (2)$$

καθ' ὅσον B/ε εἶναι ὁ ἀρχικός του ὄγκος.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν τότε:

$$V(1+3\lambda t) = \frac{B}{\varepsilon}(1+ut)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε:

$$t = \frac{B - \varepsilon V}{3\lambda V\varepsilon - Bu}$$

$$t = \frac{69{,}3 - 0{,}7.100}{3.0{,}000018.100.0{,}7 - 69{,}3.0{,}0016} \frac{gr^*}{gr^*.grad^{-1}}$$

$$t = \frac{-0{,}7}{-0{,}1071} \text{ grad}$$

$$\boxed{t = 6{,}53 \text{ grad}}$$

411. Ἐντὸς κυλίνδρου, σταθεροῦ ὄγκου V περιέχεται ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ ὑπὸ πίεσιν $P=1{,}210$ Kg*/cm².

Ζητεῖται: Πόση θὰ γίνῃ ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος τούτου (P΄) ἂν αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία κατὰ $t=20^\circ C$, δεδομένου τοῦ συντελεστοῦ διαστολῆς τῶν ἀερίων $\alpha=1/273$ grad^{-1}.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Gay Lussac:

$$P' = P\,(1 + \alpha t)$$

εὑρίσκομεν:

$$P' = 1{,}21\left(1 + \frac{20}{273}\right)\frac{Kg^*}{cm^2}$$

$$\boxed{P' = 1{,}298\ \frac{Kg^*}{cm^2}}$$

412. Ἐντὸς κυλίνδρου περιέχεται ἀτμοσφαιρικὸς ἀὴρ ὑπὸ σταθερὰν πίεσιν καὶ κλείεται δι᾿ ἀβαροῦς ἐμβόλου κινουμένου ἄνευ τριβῆς.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον πρέπει νὰ θερμανθῇ ὁ ἀὴρ οὗτος (t) ὥστε νὰ διπλασιασθῇ ὁ ὄγκος του ($\alpha=1/273$ grad^{-1}).

Λύσις: Ἔστω V ὁ ἀρχικὸς ὄγκος καὶ 2V ὁ τελικὸς τοῦ ἀέρος. Κατὰ τὸν τύπον τοῦ Gay Lussac τοῦ ἀφορῶντος τοὺς ὄγκους θὰ ἔχωμεν τότε:

$$2V = V\,(1 + \alpha t)$$

ἤτοι:

$$t = \frac{1}{\alpha}$$

$$\boxed{t = 273 \text{ grad}}$$

413. Ποσότης ἀερίου εἰς θερμοκρασίαν τινα $t_0=177^\circ C$ ἔχει ὄγκον $V_0=450$ cm³ καὶ πίεσιν $P_0=1000$ gr*/cm².

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία πίεσις (P) πρέπει νὰ ἀσκηθῇ ἐπὶ τοῦ ἀερίου τούτου ὥστε ὁ ὄγκος του νὰ γίνῃ $V=150\ cm^3$ ὑπὸ θερμοκρασίαν $t=27°C$.

Λύσις: Ἐφ᾽ ὅσον τὸ ἀέριον ὑφίσταται μεταβολὴν καὶ τῶν τριῶν στοιχείων του (πιέσεως, ὄγκου καὶ θερμοκρασίας), θὰ ἰσχύῃ δι᾽ ἑκάστην κατάστασιν ὁ νόμος τῶν τελείων ἀερίων, ὁπότε διὰ μὲν τὴν ἀρχικὴν ἔχομεν:

$$P_0V_0 = CT_0 \tag{1}$$

ὅπου C ἡ σταθερὰ τοῦ ἀερίου καὶ T_0 ἡ ἀπόλυτος θερμοκρασία του, διὰ δὲ τὴν τελικὴν κατάστασιν:

$$PV = CT \tag{2}$$

Ἐκ τούτων, διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{P_0V_0}{PV} = \frac{T_0}{T}$$

ἤτοι

$$\frac{P_0V_0}{PV} = \frac{t_0 + 273}{t + 273}$$

ὁπότε, λύοντες ὡς πρὸς P:

$$P = \frac{P_0V_0(t+273)}{V(t_0+273)}$$

$$P = \frac{1000.450\,(27+273)}{150\,(177+273)}\ \frac{gr^*}{cm^2}$$

$$\boxed{P = 2000\ \frac{gr^*}{cm^2}}$$

414. Ἐντὸς κλειστοῦ κυλίνδρου ὄγκου V περιέχεται ὑδρογόνον ὑπὸ πίεσιν $P=2{,}49\ Kg^*/cm^2$ καὶ θερμοκρασίαν $t=27°C$.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ ἡ πυκνότης τοῦ ὑδρογόνου (d) εἰς τὴν θερμοκρασίαν ταύτην καὶ πίεσιν δεδομένου τοῦ μοριακοῦ του βάρος $\mu=2$ καὶ τῆς σταθερᾶς τῶν ἀερίων

$$R = 0{,}83\ Kg^*m\,.\,grad^{-1}.$$

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$PV = \frac{M}{\mu}RT$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὑρίσκομεν τὴν μᾶζαν τοῦ ὑδρογόνου (M) εἰς τὴν διδομένην κατάστασιν (P, V, T), ἤτοι :

$$M = \frac{\mu PV}{RT}$$

$$M = \frac{\mu PV}{R\,(t + 273)} \qquad (1)$$

ὁπότε, ἐκ τοῦ τύπου

$$d = \frac{M}{V} \qquad (2)$$

καὶ ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ M ἐκ τῆς (1) ἡ (2) γίνεται :

$$d = \frac{\mu P}{R\,(t + 273)}$$

$$d = \frac{2.2{,}49}{0{,}83.300}\,\frac{gr\,.\,Kg^{*}.\,grad}{cm^{2}.\,Kg^{*}.\,m\,.\,grad}$$

$$\boxed{d = 0{,}0002\ gr/cm^{3}}$$

415. Ποσὸν ὕδατος $m = 136$ gr, θερμοκρασίας $t_0 = 21°C$ θερμαίνεται ἀπὸ τῆς θερμοκρασίας ταύτης μέχρι τῆς θερμοκρασίας $t_1 = 39°C$.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν θέρμανσιν ταύτην ποσὸν θερμότητος (Q), ἂν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι $\varepsilon = 1$ cal/gr . grad.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$Q = \varepsilon m\,(t_1 - t_0)$$

ἔχομεν :

$$Q = 1.136\,(39 - 21)\,\frac{cal\,.\,gr\,.\,grad}{gr\,.\,grad.}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Q = 2448\ cal \\ Q = 2{,}448\ Cal \end{array}}$$

416. Τεμάχιον σιδήρου μάζης $m_1 = 5$ gr καὶ θερμοκρασίας $t_1 = 110°C$ ρίπτεται ἐντὸς θερμιδομέτρου περιέχοντος ποσότητα $m_2 = 600$ gr ὕδατος εἰς θερμοκρασίαν $t_2 = 10°C$.

Ζητεῖται: Ποίαν θερμοκρασίαν (t_3) θὰ λάβῃ τὸ ὅλον σύστημα μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν θερμικῆς ἰσορροπίας, ἂν τὸ θερμιδόμετρον ἔχει μᾶζαν $m_0 = 80$ gr καὶ ἂν αἱ εἰδικαὶ θερμότητες τοῦ σιδήρου, τοῦ ὕδατος καὶ τοῦ μετάλλου τοῦ θερμιδομέτρου (ὀρειχάλκου) εἶναι ἀντιστοίχως, εἰς μονάδας $cal\,.\,gr^{-1}.\,grad^{-1}$: $\varepsilon_1 = 0{,}105$, $\varepsilon_2 = 1$ καὶ $\varepsilon_0 = 0{,}092$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς θερμικῆς ἰσορροπίας ἡ ὑπὸ τοῦ σιδήρου προσφερομένη θερμότης θὰ εἶναι προφανῶς:

$$Q_1 = \varepsilon_1 m_1 (t_1 - t_3) \qquad (1)$$

ἡ ὑπὸ τοῦ ὕδατος προσλαμβαναμένη:

$$Q_2 = \varepsilon_2 m_2 (t_3 - t_2) \qquad (2)$$

ἡ ὑπὸ τοῦ ὀρειχάλκου προσλαμβανομένη:

$$Q_0 = \varepsilon_0 m_0 (t_3 - t_2) \qquad (3)$$

ὁπότε ἡ ἀναγκαία συνθήκη

$$Q_1 = Q_2 + Q_0$$

ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) γίνεται:

$$\varepsilon_1 m_1 (t_1 - t_3) = \varepsilon_2 m_2 (t_3 - t_2) + \varepsilon_0 m_0 (t_3 - t_2)$$

ἐξ ἧς τελικῶς εὑρίσκομεν τὸ t_3:

$$t_3 = \frac{\varepsilon_1 m_1 t_1 + t_2 (\varepsilon_0 m_0 + \varepsilon_2 m_2)}{\varepsilon_0 m_0 + \varepsilon_1 m_1 + \varepsilon_2 m_2}$$

$$\boxed{t_3 = 10{,}08^\circ C}$$

417. Τεμάχιον πάγου μάζης m=120 gr καὶ θερμοκρασίας $t_1 = -10^\circ C$ θερμαίνεται συνεχῶς ὁπότε μετατρέπεται εἰς ἀτμὸν θερμοκρασίας $t_2 = 120^\circ C$ (ὑπὸ πίεσιν σταθερὰν P=1 Kg*/cm²).

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ἀπαιτούμενον διὰ τὴν ὡς ἄνω μεταβολὴν ποσὸν θερμότητος (Q) ἂν αἱ εἰδ. θερμότητες τοῦ πάγου, τοῦ ὑγροῦ ὕδατος καὶ τοῦ ὑδρατμοῦ εἶναι ἀντιστοίχως ε=0,5 cal/gr.grad, ε΄=1 cal/gr.grad καὶ ε΄΄=0,4 cal/gr.grad, καὶ ἐὰν αἱ εἰδικαὶ λανθάνουσαι θερμότητες τήξεως καὶ ἐξαερώσεως τοῦ ὕδατος εἶναι ἀντιστοίχως q=79 cal/gr καὶ q΄=540 cal/gr.

Λύσις: Διὰ τὴν ὡς ἄνω μεταβολὴν ἀπαιτοῦνται τὰ κάτωθι ποσὰ θερμότητος:

α) Ποσὸν Q_1 διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ πάγου μέχρι τῶν $0^\circ C$:

$$Q_1 = m\varepsilon (0^\circ - t_1)$$

β) Ποσὸν Q_2 διὰ τὴν τῆξιν τοῦ πάγου ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν:

$$Q_2 = mq$$

γ) Ποσὸν Q_3 διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ὕδατος ἀπὸ 0° μέχρις 100°:

$$Q_3 = 100\ m.\varepsilon'$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δ) Ποσὸν Q_4 διὰ τὴν ἐξαέρωσιν τοῦ ὕδατος εἰς τοὺς 100°:

$$Q_4 = mq'$$

ε) Ποσόν, τέλος, Q_5 διὰ τὴν μετατροπὴν τοῦ προκύπτοντος ὑδρατμοῦ κατὰ τὴν θερμοκρασίαν ἀπὸ 100° μέχρι t_2:

$$Q_5 = m\varepsilon'' (t_2 - 100)$$

Ἔχομεν ἐξ αὐτῶν, πρὸς τήρησιν τῆς σχέσεως

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5$$

τὴν ἐξίσωσιν:

$$Q = 10m\varepsilon + mq + 100m\varepsilon' + mq' + 20m\varepsilon''$$

$$Q = m\,(10\varepsilon + q + 100\varepsilon' + q' + 20\varepsilon'')$$

ὁπότε εὑρίσκομεν:

$$\boxed{Q = 87{,}84 \text{ Cal}}$$

418. Ἐντὸς θερμιδομέτρου διὰ πάγου τίθεται ποσότης $m = 15{,}8$ gr μετάλλου ἀγνώστου εἰδικῆς θερμότητος καὶ θερμοκρασίας $t = 100°C$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου (ε) ἂν τὸ ἐκ τῆς τήξεως προερχόμενον ὕδωρ ἔχῃ μᾶζαν $m_0 = 4{,}28$ gr καὶ ἡ εἰδικὴ λανθάνουσα θερμότης τήξεως τοῦ πάγου εἶναι $q = 79$ cal/gr.

Λύσις: Τὸ ὑπὸ ψυχομένου μετάλλου προσφερόμενον ποσὸν θερμότητος κατὰ τὴν ψύξιν ἀπὸ 100° μέχρι 0° εἶναι:

$$Q = 100m\varepsilon$$

Ἀντιστοίχως τὸ κατὰ τῆξιν τοῦ πάγου ἀπορροφώμενον ποσὸν εἶναι:

$$Q_0 = m_0 q$$

ὁπότε διὰ τὴν τήρησιν τῆς ἰσότητος

$$Q = Q_0$$

ἔχομεν:

$$100m\varepsilon = m_0 q$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν:

$$\varepsilon = \frac{m_0 q}{100m}$$

$$\varepsilon = \frac{4{,}28 . 79}{100 . 15{,}8} \; \frac{\text{gr} . \text{cal} . \text{gr}^{-1}}{\text{grad} . \text{gr}.}$$

$$\boxed{\varepsilon = 0{,}214 \text{ cal/gr.grad}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

419. Ἐντὸς τοῦ βαρομετρικοῦ κενοῦ σωλῆνος τοῦ Torricelli, ὄγκου $V = 20\ cm^3$, τίθεται ποσότης αἰθέρος $m = 2\ gr$, ἥτις, ἐξαερουμένη ἐξ ὁλοκλήρου, καταβιβάζει τὸ ὕψος τοῦ Hg ἐκ τῶν 760 mm εἰς 550 mm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τάσις ἀτμῶν τοῦ αἰθέρος (P) καὶ ποία ἡ θερμοκρασία (t^oC) τὴν στιγμὴν τῆς μετρήσεως, ἐὰν τὸ μορ. βάρος τοῦ αἰθέρος εἶναι $\mu = 74,1$, τὸ εἰδ. βάρος τοῦ ὑδραργύρου $\varepsilon = 13,6\ gr^*/cm^3$ καὶ ἡ σταθερὰ $R = 0,84\ Kg^*m/grad$.

Λύσις: Ἡ κατὰ τὴν ἐπίτευξιν τῆς ἰσορροπίας τάσις ἀτμῶν τοῦ αἰθέρος (P), μὴ ὑπάρχοντος ὑγροῦ, εἶναι προφανῶς ἡ ὑπ' αὐτοῦ ἀσκουμένη πίεσις ἀντιστοιχοῦσα πρὸς 21 cm Hg, ἤτοι:

$$P = 21.\varepsilon$$

$$P = 21.13,6\ \ cm.\frac{gr^*}{cm^3}$$

$$\boxed{P = 285,6\ gr^*/cm^2}$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης, τῶν λοιπῶν δοθεισῶν τιμῶν (V κλπ.) καὶ τοῦ τύπου τῶν τελείων ἀερίων:

$$PV = \frac{mRT}{\mu}$$

εὑρίσκομεν τὴν θερμοκροσίαν

$$T = \frac{\mu PV}{mR}$$

$$t + 273 = \frac{\mu PV}{mR}$$

$$t = \frac{\mu PV}{mR} - 273$$

$$t = \frac{74,1.285,6.20}{2.0,84} - 273\ \frac{gr.gr^*.cm^3.grad}{gr.cm^2.Kg^*m} + grad$$

$$t = \frac{74,1.285,6.20}{2.0,84.10^5} - 273\ grad$$

$$\boxed{t = -\ 270,48^oC}$$

420. Ἐντὸς κλειστοῦ δοχείου σταθεροῦ ὄγκου $V = 24,9\ lit$ τίθεται ποσότης $m_1 = 0,336\ gr$ Ὀξυγόνου καὶ $m_2 = 0,042\ gr$ Ὑδρογόνου ὑπὸ σταθερὰν θερμοκρασίαν $t = 22^oC$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ μίγματος τούτου ἀσκουμένη πίεσις ἐπὶ τῶν τοιχωμάτων τοῦ δοχείου (P), ἂν τὰ μοριακὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

βάρη τοῦ ὀξυγόνου καὶ τοῦ ὑδρογόνου εἶναι ἀντιστοίχως $\mu_1=32$ καὶ $\mu_2=2$ καὶ ἡ σταθερὰ τῶν ἀερίων ἔχῃ τιμὴν $R=0,83$ Kg*m/grad.

Λύσις: Ἡ ὑπὸ τοῦ μίγματος ἀσκουμένη πίεσις θὰ εἶναι κατὰ τὸν νόμον τοῦ Dalton:

$$P = P_1 + P_2 \qquad (1)$$

ὅπου P_1 καὶ P_2 αἱ μερικαὶ πιέσεις τοῦ ὀξυγόνου καὶ τοῦ ὑδρογόνου.

Ἀλλὰ εἶναι ὅμως (ὡς ἐκ τοῦ νόμου τῶν τελείων ἀερίων)

$$P_1 = \frac{m_1 RT}{V\mu_1} \qquad (2)$$

καὶ

$$P_2 = \frac{m_2 RT}{V\mu_2} \qquad (3)$$

ὁπότε ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ἡ (1) γίνεται:

$$P = \frac{m_1 RT}{V\mu_1} + \frac{m_2 RT}{V\mu_2}$$

ἤτοι:

$$P = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$$

$$P = \frac{R(t+273)}{V}\left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)$$

$$P = \frac{0,83.295}{24,9}\left(\frac{0,336}{32} + \frac{0,042}{2}\right)\frac{\text{Kg*m . grad}}{\text{grad . lit}}$$

$$P = \frac{0,83.295.100}{24,9}\left(\frac{0,336}{32} + \frac{0,042}{2}\right)\frac{\text{gr*}}{\text{cm}^2}$$

$$\boxed{P = 30,975 \text{ gr*/cm}^2}$$

421. Δίδεται ποσότης ὑγροῦ m=40 gr εἰς θερμοκρασίαν τινὰ $t_1=10^0$C καὶ θερμαίνεται τοῦτο, διὰ προσθήκης ποσοῦ τινὸς θερμότητος Q = 10233,6 cal, μέχρι νέας θερμοκρασίας $t_2=110^0$C ὁπότε εὑρίσκεται εἰς τὴν ἀέριον κατάστασιν μετατραπὲν εἰς ἀτμὸν εἰς ἐνδιάμεσόν τινα θερμοκρασίαν x.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία ζέσεως τοῦ σώματος (x) ἂν ἡ εἰδικὴ θερμότης του εἶναι $\varepsilon_1=0,58$ cal/gr . grad διὰ τὴν ὑγρὰν καὶ $\varepsilon_2=0,45$ cal/gr . grad διὰ τὴν ἀέριον κατάστασιν καὶ ἂν κατηναλώθησαν $Q_0=8080$ cal κατὰ τὴν ζέσιν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἡ ἀπαιτουμένη θερμότης Q_1 διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ ὑγροῦ μέχρι τοῦ σημείου ζέσεώς του θὰ εἶναι προφανῶς:

$$Q_1 = \varepsilon_1 m (x - t_1)$$

ἐνῷ ἡ διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ προκύπτοντος ἀτμοῦ ἀπὸ x μέχρι t_2 θὰ εἶναι:

$$Q_2 = \varepsilon_2 m (t_2 - x)$$

ὁπότε, ἐκ τῆς σχέσεως

$$Q = Q_1 + Q_0 + Q_2$$

ἔχομεν:

$$Q = \varepsilon_1 m (x - t_1) + Q_0 + \varepsilon_2 m (t_2 - x)$$

καὶ τελικῶς εὑρίσκομεν τὸν ἄγνωστον x:

$$x = \frac{\varepsilon_2 m t_2 - \varepsilon_1 m t_1 + Q_0 - Q}{\varepsilon_2 m - \varepsilon_1 m}$$

$$\boxed{x = 78^0 C}$$

422. Ποσότης ὑγροῦ ἴση μὲ m_1=3,6 gr ἐφιεμένη εἰς κρυσταλλωτήριον διαμέτρου D_1=6 cm καὶ ὑπὸ πίεσιν ἀτμοσφαιρικὴν H_1=760 mmHg ἐξατμίζεται ἐντὸς χρόνου t_1=18 sec.

Ζητεῖται: Ἐντὸς πόσου χρόνου (t_2) θὰ ἐξατμισθῇ ποσότης τοῦ αὐτοῦ ὑγροῦ ἴση μὲ m_2=5 gr ἐντὸς κρυσταλλωτηρίου διαμέτρου D_2=5 cm καὶ ὑπὸ ἀτμ. πίεσιν H_2=740 mmHg, ὑποτιθεμένης σταθερᾶς τῆς τάσεως ἀτμῶν τοῦ ὑγροῦ καὶ τῆς μεγίστης τάσεώς του.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἐξατμίσεως

$$v = \frac{kS(F - f)}{H}$$

θέτοντες v=m/t, ἔχομεν, διὰ τὰς δύο περιπτώσεις ἀντιστοίχως:

$$\frac{m_1}{t_1} = \frac{kS_1 (F - f)}{H_1} \qquad (1)$$

καὶ

$$\frac{m_2}{t_2} = \frac{kS_2 (F - f)}{H_2} \qquad (2)$$

ὁπότε, διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$\frac{m_1 t_2}{m_2 t_1} = \frac{kS_1 (F - f) H_2}{kS_2 (F - f) H_1}$$

ἤτοι:

$$\frac{m_1 t_2}{m_2 t_1} = \frac{S_1 H_2}{S_2 H_1}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τελικῶς:

$$t_2 = \frac{S_1 H_2 m_2 t_1}{S_2 H_1 m_1}$$

$$t_2 = \frac{D_1^2 H_2 m_2 t_1}{D_2^2 H_1 m_1}$$

$$\boxed{t_2 = 35{,}05 \text{ sec}}$$

423. Δίδεται ἀτμὸς ὕδατος θερμοκρασίας $t_1 = 50{,}5^{\circ}C$.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν (t_2) πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἀέριος ἀμμωνία ὥστε τὰ δύο σώματα νὰ παρουσιάζουν τὴν αὐτὴν ἀνηγμένην θερμοκρασίαν (τ) καὶ ποία θὰ εἶναι αὕτη, ἂν αἱ κρίσιμοι θερμοκρασίαι (εἰς βαθμοὺς Κελσίου) εἶναι διὰ μὲν τὸ ὕδωρ $t_{\kappa_1} = 374^{\circ}$ διὰ δὲ τὴν ἀμμωνίαν $t_{\kappa_2} = 133^{\circ}$.

Λύσις: Ἡ ἀνηγμένη θερμοκρασία ἀερίου, ἐξ ὁρισμοῦ, εἶναι:

$$\tau = \frac{T}{T_{\kappa}} \qquad (1)$$

ὅπου T ἡ θερμοκρασία του καὶ T_{κ} ἡ κρίσιμος θερμοκρασία του (εἰς ἀπολύτους βαθμούς).

Ὁ (1) ὅμως, διὰ τὰ δύο σώματα λαμβάνει μορφὴν ἀντιστοίχως:

$$\tau = \frac{(t_1 + 273)}{(t_{\kappa_1} + 273)} \qquad (2)$$

καὶ

$$\tau = \frac{(t_2 + 273)}{(t_{\kappa_2} + 273)} \qquad (3)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (2) καὶ (3) ὁ τύπος (1) γίνεται:

$$\frac{t_1 + 273}{t_{\kappa_1} + 273} = \frac{t_2 + 273}{t_{\kappa_2} + 273} \qquad (4)$$

Εὑρίσκομεν τότε τὸ t_2 ἐκ τῆς (4):

$$t_2 = \frac{(t_1 + 273)(t_{\kappa_2} + 273)}{(t_{\kappa_1} + 273)} - 273$$

$$\boxed{t_2 = -70^{\circ}C}$$

καί, ἐκ τῆς (2) ἢ (3):

$$\boxed{\tau = 0{,}5^{\circ} \text{ ἀνηγμ.}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

424. Ποσότης m=117 gr ἅλατος μαγειρικοῦ διαλύεται ἐντὸς ὕδατος μέχρις ὄγκου V=1,66 lit, εἰς θερμοκρασίαν t=40°C.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ὠσμωτικὴ πίεσις (P) τοῦ διαλύματος τούτου ὡς πρὸς τὸ καθαρὸν ὕδωρ, δεδομένου ὅτι τὸ μαγειρ. ἅλας διΐσταται εἰς δύο ἰόντα κατὰ τὴν διάλυσιν, τὸ δὲ μοριακόν του βάρος εἶναι μ=58,5 (R=0,83 Kg*m/grad).

Λύσις: Ἕνεκα τῆς διαστάσεως εἰς ἰόντα τοῦ ἅλατος, ὁ τύπος τῆς ὠσμ. πιέσεως

$$P = \frac{mRT}{\mu V}$$

γίνεται:

$$P = \frac{2mRT}{\mu V} \qquad (1)$$

ὁπότε προκύπτει:

$$P = \frac{2mR\,(t+273)}{\mu V}$$

$$P = \frac{2.117.0{,}83\,(40+273)}{58{,}5.1{,}66}\;\frac{gr\,.\,Kg^*m\,.\,grad}{grad\,.\,gr\,.\,lit}$$

$$\boxed{P = 62{,}6\ Kg^*/cm^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

425. Δίδεται θερμοκρασία t = 90°F.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσους βαθμοὺς Κελσίου (t_c) καὶ εἰς πόσους Ρεωμύρου (t_R) ἀντιστοιχεῖ αὕτη.

Λύσις: $t_c = 34{,}4$°C, $t_R = 27{,}5$°R.

426. Πρὸς εὕρεσιν τῆς θερμοκρασίας (t) καμίνου εἰσάγεται ἐντὸς ταύτης ῥάβδος ἐκ σιδήρου ἔχουσα μῆκος l_0=1,10 m εἰς θερμοκρασίαν t_0=0°C.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ θερμοκρασία τῆς καμίνου (t) ἂν ἡ ῥάβδος, ἐντὸς ταύτης, ἀποκτᾷ μῆκος l_t = 1,107 m, δεδομένου τοῦ συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου λ=0,000012 $grad^{-1}$.

Λύσις: t=530,3°C.

427. Δίδονται δύο θερμόμετρα, Ρεωμύρου καὶ Φαρενάϊτ.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν (t_{FR}) ταῦτα δεικνύουν τοὺς αὐτούς βαθμούς.

Λύσις: t_{FR} = — 25,6°R καὶ F.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

428. Δίδεται ἡ πυκνότης τοῦ ἀργύρου $d_0=10{,}31$ gr/cm^3 εἰς θερμοκρασίαν $t_0=0°C$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πυκνότης του (d_t) εἰς θερμοκρασίαν $t=150°C$, δεδομένου τοῦ συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς του $\varkappa=0{,}000058$ grad^{-1}.

Λύσις: $d_t = 10{,}32$ gr/cm^3.

429. Δίδεται ράβδος σιδηρᾶ μήκους (εἰς θερμοκρασίαν $t_0=0°C$) $l=1000$ m.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ αὔξησίς της (dl) κατὰ τὴν μέχρι θερμοκρασίας $t=40°C$ θέρμανσίν της, ἂν ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου εἶναι $\lambda=0{,}000012$ grad^{-1}.

Λύσις: $dt=0{,}48$ m.

430. Σιδηρᾶ ράβδος, μήκους ἀρχικοῦ $l_0=25$ cm, εἰς θερμοκρασίαν τινὰ $t_0 = 20°C$, θερμαίνεται μέχρι θερμοκρασίας $t=500°C$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐπιμήκυνσίς της (dl), ἂν ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς εἶναι $\lambda=0{,}000012$ grad^{-1}.

Λύσις: $dl=0{,}144$ cm.

431. Δίδεται σιδηρᾶ σφαῖρα διαμέτρου $d_0=10$ cm (εἰς θερμοκρασίαν $t_0=0°C$), μεγαλυτέρας κατὰ $l=0{,}005$ cm διὰ νὰ διέλθῃ ἀπὸ κυκλικὴν ὀπὴν ἑνὸς φύλλου ἀργιλλίου εὑρισκομένου εἰς τὴν αὐτὴν θερμοκρασίαν.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν (t) δι᾽ ἀμφότερα τὰ μέταλλα, θὰ δύναται ἡ σφαῖρα νὰ διέρχεται τῆς ὀπῆς, ἂν οἱ συντελεσταὶ γραμμικῆς διαστολῆς διὰ τὰ δύο μέταλλα εἶναι ἀντιστοίχως $\lambda_{Fe}=0{,}000012$ grad^{-1} καὶ $\lambda_{Al}=0{,}000022$ grad^{-1}.

Λύσις: $t=43{,}9°C$.

432. Ὀρειχαλκίνη κλῖμαξ βαθμολογεῖται εἰς cm εἰς θερμοκρασίαν $t_1=15°C$.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ πραγματικὸν μῆκος (l_1) εἰς θερμοκρασίαν t_1 τοῦ μήκους $l_2=80$ cm μετρουμένου μὲ τὴν κλίμακα εἰς θερμοκρασίαν $t_2=25°C$, ἂν ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ ὀρειχάλκου εἶναι $\lambda=0{,}000019$ grad^{-1}.

Λύσις: $l_1=80{,}015$ cm.

433. Δίδονται δύο ράβδοι μήκους l εἰς θερμοκρασίαν $t_0=0°C$. Ἡ μὲν μία εἶναι ἐκ χαλκοῦ ἡ δ᾽ ἄλλη ἐξ ἀργιλλίου καὶ συνδέονται μεταξύ των, παραλλήλως, διὰ τῶν ἄκρων των εἰς ἀπόστασιν $d=0{,}2$ cm.

Ζητεῖται: Ἂν θερμανθοῦν εἰς θερμοκρασίαν $t=300°C$ ποίαν ἐξωτερικὴν ἀκτῖνα καμπυλότητος (R) θὰ λάβῃ τὸ σύστημα,

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

δεδομένων τῶν συντελεστῶν γραμμικῆς διαστολῆς διὰ τὸν χαλκὸν καὶ τὸ ἀργίλλιον ἀντιστοίχως $\lambda_1 = 0{,}000016$ grad^{-1} καὶ $\lambda_2=0{,}000022$ grad^{-1}.

Λύσις: $R=11{,}119$ m.

434. Δίδεται ὑάλινος σωλὴν μήκος $l=36$ cm, κλειστὸς κατὰ τὸ ἓν ἄκρον του καὶ κυλινδρικός.

Ζητεῖται: Μέχρι ποίου ὕψους (h) πρέπει νὰ πληρωθῇ ὁ σωλὴν δι' ὑδραργύρου, ὥστε ὁ ὑπολοιπόμενος ὄγκος τοῦ σωλῆνος νὰ παραμένῃ ὁ αὐτὸς εἰς οἱανδήποτε θερμοκρασίαν, ἐὰν ὁ συντελεστὴς κυβικῆς διαστολῆς τοῦ ὑγραργύρου εἶναι $\varkappa_1=0{,}000018$ grad^{-1} καὶ τῆς ὑάλου $\varkappa_2=0{,}000024$ grad^{-1}.

Λύσις: $h=4{,}8$ cm.

435. Ὡρολογιακὸν ἐκκρεμὲς ἐκ χαλκοῦ ἔχει περίοδον $T_0=2$ sec εἰς θερμοκρασίαν τινα $t_0=0^\circ$C.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ θερμοκρασία γίνῃ $t_1=50^\circ$C, κατὰ πόσον (x) τὸ ὡρολόγιον θὰ καθυστερῇ ἐντὸς ἑνὸς 48ώρου, ἂν ὁ συντελεστὴς γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ χαλκοῦ εἶναι $\lambda=0{,}000016$ grad^{-1}, ὑποτιθεμένου ὅτι ἰσχύουν οἱ νόμοι τοῦ μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς.

Λύσις: $x=69{,}12$ sec.

436. Δίδεται σιδηρᾶ σφαῖρα, ἐσωτερικῶς κενή, ἀποτελουμένη ἐκ λεπτοτάτων τοιχωμάτων, περιέχουσα ποσότητα $B=20$ gr* ὕδατος, ὅπερ πληροῖ οὕτω μέρος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας (V).

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος οὗτος (V), ἄν, διὰ νὰ καλυφθῇ ὁλόκληρος ὑπὸ τοῦ διαστελλομένου ὕδατος, χρειάζεται νὰ θερμανθῇ τὸ ὅλον σύστημα κατὰ $t=10$ grad C, δεδομένου τοῦ συντελεστοῦ γραμμικῆς διαστολῆς τοῦ σιδήρου $\lambda = 0{,}000012$ grad^{-1} τοῦ δὲ ὕδατος ἀπολύτου συντελεστοῦ κυβικῆς διαστολῆς $\varkappa=0{,}00018$ grad^{-1} (Ὑποτίθεται ὅτι τὸ ὕδωρ διαστέλλεται κανονικὰ ὑπὸ σταθερὸν συντελεστὴν $\varkappa$).

Λύσις: $V=20{,}02$ cm^3.

437. Ἐντὸς κυλίνδρου σταθεροῦ ὄγκου περιέχεται ἀὴρ ὑπὸ πίεσιν $P_1=1{,}02$ Kg*/cm^2.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσους βαθμοὺς (t) πρέπει νὰ αὐξηθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ ἐγκεκλεισμένου ἀέρος ὥστε ἡ πίεσίς του νὰ γίνῃ $P_2=1{,}224$ Kg*/cm^2 (συντελ. διαστολῆς ἀερίων $\alpha=1/273$ grad^{-1}).

Λύσις: $t=54{,}6$ grad C.

438. Ἐντὸς χαλκίνου θερμιδομέτρου βάρους $\beta_0=106$ gr*, περιέχοντος ποσότητα ὕδατος $B_1 = 250$ gr*, θερμοκρασίας

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$t_1=12^oC$ ρίπτεται τεμάχιον σιδήρου βάρους $B_2=6\ gr^*$ καὶ θερμοκρασίας $t_2=100^oC$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία (t_3) τοῦ ὅλου συστήματος ἂν αἱ εἰδικαὶ θερμότητες (εἰς μονάδας $cal/gr^*.grad$) εἶναι διὰ τὸν χαλκόν, τὸ ὕδωρ καὶ τὸν σίδηρον ἀντιστοίχως $\varepsilon_0=0,09$, $\varepsilon_1=1$ καὶ $\varepsilon_2=0,105$.

Λύσις: $t_3=12,21^oC$.

439. Ἀέριον ὀξυγόνον κλείεται ἐντὸς κυλίνδρου ὑπὸ πίεσιν $P=30$ atm ὁπότε καταλαμβάνει ὄγκον $V=224$ lit, ὑπὸ θερμοκρασίαν $t=27^oC$.

Ζητεῖται: Εἰς πόσα γραμμομόρια (n) ἀντιστοιχεῖ ἡ ὡς ἄνω ποσότης ὀξυγόνου ἂν 22,4 lit ἀερίου ὑπὸ πίεσιν $P_0=1$ atm καὶ θερμοκρασίαν $t_0=0^oC$ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἓν γραμμομόριον.

Λύσις: $n=273$ mol.

440. Ποσότης ὀξυγόνου ἴση μὲ $n_1=2$ mol περιέχεται ἐντὸς ὑαλίνης σφαίρας καὶ παρουσιάζει θερμοκρασίαν $t_1=-21^oC$. Ἄλλη ποσότης, ἀζώτου, περιέχεται εἰς ἄλλην σφαῖραν ὄγκου $V=30$ lit, ὑπὸ πίεσιν $P=12$ atm. Φέρονται ἀκολούθως τὰ δύο ἀέρια εἰς συγκοινωνίαν μέσῳ λεπτοῦ σωλῆνος ἀμελητέου ὄγκου μέχρις ἀποκαταστάσεως ἰσορροπίας.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ τελικὴ θερμοκρασία τοῦ μίγματος (t), ἂν ἡ ποσότης τοῦ ἀζώτου εἶναι $n_2=6$ mol καὶ ἡ σταθερὰ τῶν ἀερίων ἔχῃ τιμὴν $R=0,082\ atm.lit.grad^{-1}$.

Λύσις: $t=-221,973^oC$.

ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

441. Ποσὸν θερμότητος $Q=196,2$ cal μετατρέπεται εἰς μηχανικὸν ἔργον (W).

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μηχανικὸν τοῦτο ἔργον (W) εἰς μονάδας τεχνικὰς ($Kg^*.m$), ἂν τὸ μηχ. ἰσοδύναμον εἶναι $\eta=4,18$ joule/cal.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῶν Meyer-Joule

$$W=\eta Q$$

ἔχομεν :

$$W=4,18.196,2\ \frac{joule.cal}{cal}$$

$$W=4,18.196,2.10^7\ \ erg\ (=dynes.cm)$$

$$W=\frac{4,18.196,2.10^7}{981.10^3.10^2}\ Kg^*.m$$

$$\boxed{W=83,6\ Kg^*.m}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

442. Μολύβδινον σῶμα βάρους $B=87,78$ Kg* πίπτει ἀπὸ ὕψους τινος $h=3$ m ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου ὅπου καὶ ἠρεμεῖ ἀποτόμως.

Ζητεῖται: Πόση θερμότης (Q) θὰ παραχθῇ ἀπὸ τὸ ἔργον τῆς πτώσεως (ἂν $\eta=4,18$ joule/cal).

Λύσις: Τὸ κατὰ τὸ διάστημα h παραχθὲν ἔργον (W) θὰ εἶναι προφανῶς:

$$W = B.h \qquad (1)$$

θὰ συνδέεται δὲ μὲ τὴν ἐμφανιζομένην θερμότητα (Q) διὰ τοῦ τύπου

$$Q = \frac{W}{\eta}$$

ὅστις, ὡς ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ W ἐκ τῆς (1), γίνεται:

$$Q = \frac{B.h}{\eta}$$

$$Q = \frac{87,78.3}{4,18}\,\frac{\text{Kg}^*.\text{m}.\text{cal}}{\text{joule}}$$

$$Q = \frac{87,78.3.981}{4,18.10^2}\,\frac{\text{joule}.\text{cal}}{\text{joule}}$$

$$\boxed{Q = 618,03 \text{ cal}}$$

443. Σφαῖρα πυροβόλου ὅπλου μάζης $m=3,6$ gr κινουμένη μὲ ταχύτητα $v_1=1000$ Km/h διαπερᾷ ξύλινον ἀντικείμενον καὶ ἐξέρχεται τούτου, μὲ ταχύτητα μειωμένην, τιμῆς $v_2=500$ Km/h.

Ζητεῖται: Πόση θερμότης (Q) παρήχθη ἐντὸς τοῦ ξύλου.

Λύσις: Ἡ πρὸ τῆς κρούσεως κινητικὴ ἐνέργεια τῆς σφαίρας (E_1) εἶναι προφανῶς:

$$E_1 = \frac{m.v_1^2}{2}$$

ἡ δὲ μετὰ τὴν διάτρησιν ἐναπομένουσα ἐνέργεια, ὡς ἐκ τῆς νέας ταχύτητος v_2, θὰ εἶναι

$$E_2 = \frac{m.v_2^2}{2}$$

ὁπότε τὸ παραχθὲν κατὰ τὴν διάτρησιν ἔργον (W) θὰ ἔχῃ τιμήν:

$$W = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2}$$

$$W = \frac{m\,(v_1^2 - v_2^2)}{2} \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἡ ἐμφανιζομένη θερμότης (Q) εἶναι τότε:

$$Q = \frac{W}{\eta}$$

ἤ, ὡς ἐκ τῆς (1):

$$Q = \frac{m\,(v_1^2 - v_2^2)}{2\eta}$$

$$Q = \frac{3{,}6\,(10^6 - 500^2)}{2.4{,}18}\ \frac{gr\,.\,Km^2.\,cal}{h^2\,.\,joule}$$

$$Q = \frac{3{,}6\,(10^6 - 25.10^4)}{2.4{,}18.36^2.10}\ cal$$

$$\boxed{Q = 24{,}9\ cal}$$

444. Βαρεῖα σιδηρᾶ σφαῖρα βάρους $B=100$ Kg* πίπτει ἐξ ὕψους $h_1=10{,}38$ m ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου καὶ ἀνακλᾶται μέχρις ὕψους $h_2=6{,}11$ m μετὰ τὴν κροῦσίν της.

Ζητεῖται: Πόση θερμότης (Q) παράγεται εἰς τὸ σημεῖον τῆς κρούσεως (ἂν $\eta=427$ Kg*.m/Kcal).

Λύσις: Τὸ παραγόμενον κατὰ τὴν πτῶσιν ἔργον (W_1) εἶναι προφανῶς:

$$W_1 = Bh_1 \qquad (1)$$

Τὸ δὲ καταναλισκόμενον κατὰ τὴν ἀνύψωσιν θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:

$$W_2 = Bh_2 \qquad (2)$$

ὁπότε ἡ διαφορὰ

$$W = W_1 - W_2 \qquad (3)$$

παριστᾷ τὸ μετατρεπόμενον εἰς θερμότητα ἔργον, τιμῆς, ὡς ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3):

$$W = B\,(h_1 - h_2)$$

ὁπότε ἔχομεν:

$$Q = \frac{B\,(h_1 - h_2)}{\eta}$$

$$Q = \frac{100\,(10{,}38 - 6{,}11)}{427}\ \frac{Kg^*.\,m\,.\,Kcal}{Kg^*.\,m}$$

$$\boxed{Q = 1\ Kcal}$$

445. Ξυλίνη σανὶς βάρους $B=84{,}4$ Kg* ὀλισθαίνει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου κατὰ διάστημά τι $S=20$ m.

Ζητεῖται: Πόση θερμότης θὰ παραχθῇ κατὰ τὴν ὡς ἄνω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

μετατόπισιν, ἂν ὁ συντελεστὴς τριβῆς μεταξὺ τῆς σανίδος καὶ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι $n=0,3$ καὶ ἂν $\eta=427$ Kg*. m/Kcal.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$F = Bn$$

εὑρίσκομεν τὴν δύναμιν τριβῆς (F), ἥτις, μετατοπιζομένη κατὰ διάστημα S παράγει ἔργον:

$$W = F.S$$
$$W = B.S.n$$

μετατρεπόμενον εἰς θερμότητα (Q), τιμῆς:

$$Q = \frac{B.S.n}{\eta}$$

$$Q = \frac{85,4.20.0,3}{427} \; \frac{Kg^*.m.Kcal}{Kg^*.m}$$

$$\boxed{Q = 600 \text{ cal}}$$

446. Σιδηρὸς τροχός, μάζης $m=20$ Kg καὶ ροπῆς ἀδρανείας $K=17,08$ Kg.m² περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονά του μὲ γωνιώδη ταχύτητα $\omega=9,81 \text{ sec}^{-1}$. Εἰς στιγμήν τινα, διὰ τροχοπέδης φέρεται ὁ τροχὸς εἰς ἠρεμίαν, ὁπότε καὶ θερμαίνεται κατὰ τὴν ἐλάττωσιν τῆς ταχύτητος.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασία τοῦ τροχοῦ εἶναι $t_1=19,9019°C$, πόση θὰ εἶναι αὕτη (t_2) ὅταν ὁ τροχὸς ἠρεμήσῃ, ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ παραγομένη θερμότης κατανέμεται κανονικῶς ἐφ᾽ ὅλου τοῦ τροχοῦ (εἰδικὴ θερμότης σιδήρου $\varepsilon=0,1$ cal/gr.grad).

Λύσις: Ἡ κινητικὴ ἐνέργεια τοῦ περιστρεφομένου τροχοῦ εἶναι:

$$W = \frac{K.\omega^2}{2}$$

Αὕτη μετατρεπομένη εἰς θερμότητα δίδει ποσὸν θερμότητος

$$Q = \frac{K.\omega^2}{2\eta} \quad (1) \quad (\text{ὅπου } \eta=427 \text{ Kg}^*.\text{m/Kcal})$$

Ἡ θερμότης ὅμως αὕτη συνδέεται μὲ τὴν μεταβολὴν θερμοκρασίας διὰ τοῦ τύπου (2)

$$Q = m.\varepsilon\,(t_2 - t_1)$$

ὁπότε ἡ (2) ἐκ τῆς (1) γίνεται:

$$\frac{K.\omega^2}{2\eta} = m.\varepsilon\,(t_2 - t_1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ οὕτω εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην θερμοκρασίαν (t_2):

$$t_2 = \frac{K.\omega^2}{2\eta.m.\varepsilon} + t_1$$

$$t_2 = \frac{17{,}08.9{,}81^2}{2.427.20.0{,}1} + 19{,}9019 \frac{Kg\,.\,m^2.\,Kcal\,.\,gr\,.\,grad}{sec^2.\,Kg^*.\,m\,.\,Kg\,.\,cal} + grad$$

$$t_2 = \frac{17{,}08.9{,}81^2.10^2}{2.427.20.0{,}1.981} + 19{,}9019\ grad + grad$$

$$\boxed{t_2 = 20^{\circ}C}$$

447. Μολυβδίνη σφαῖρα, μάζης m=10 gr, κινουμένη μὲ ταχύτητα v = 100 m/sec συγκρούεται ἐπὶ τοίχου καὶ ἠρεμεῖ ἀποτόμως.

Ζητεῖται: Πόση μᾶζα (m′) ἐκ τῆς συνολικῆς τῆς σφαίρας θὰ τακῇ, ἂν ἡ εἰδ. θερμότης τοῦ μολύβδου εἶναι ε = 0,03 cal/gr . grad, τὸ σημεῖον τήξεώς του t = 327°C καὶ ἡ λανθάνουσα θερμότης τήξεώς του q=5,5 cal/gr, ὑποτιθεμένου ὅτι ὁλόκληρος ἡ παραγομένη θερμότης μένει ἐπὶ τῆς σφαίρας καὶ ὅτι ἡ ἀρχικὴ θερμοκρασίας της εἶναι t_1=326°C.

Λύσις: Τὸ κατὰ τὴν κροῦσιν μετατρεπόμενον εἰς θερμότητα ἔργον

$$W = \frac{mv^2}{2}$$

θὰ δώσῃ θερμότητα

$$Q = \frac{mv^2}{2\eta} \qquad (1)$$

Ἐκ ταύτης μέρος μόνον (Q′) θὰ καταναλωθῇ διὰ τὴν θέρμανσιν τοῦ σώματος ἀπὸ t_1 μέχρι t, τὸ δ' ὑπόλοιπον (Q″) θὰ προκαλέσῃ τὴν τῆξιν τῆς μάζης m′, ὁπότε εἶναι:

$$Q' = m\varepsilon\,(t - t_1) \qquad (2)$$

$$Q'' = m'.q \qquad (3)$$

$$Q = Q' + Q''$$

ἤτοι, ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3):

$$\frac{mv^2}{2\eta} = m\varepsilon\,(t - t_1) + m'q$$

καί:

$$m' = m\left(\frac{v^2}{2\eta q} - \frac{\varepsilon\,(t - t_1)}{q}\right)$$

$$\boxed{m' = 3{,}746\ gr}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

448. Ἀπὸ τῆς κορυφῆς κεκλιμένου ἐπιπέδου γωνίας κλίσεως $\varphi = 30^0$ ἀφίεται νὰ ὀλισθήσῃ βαρὺ σῶμα μάζης m=8,36 Kg, ὅπερ διανύει διάστημα S=12,5 m τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου ἐντὸς χρόνου t=5 sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς εἰς τὴν τριβὴν ὀφειλομένης θερμότητος (Q), τῆς παραγομένης κατὰ τὴν ὀλίσθησιν ($g=10$ m/sec², $\eta=4,18$ joules/cal).

Λύσις: Ἐκ τῶν στοιχείων S καὶ t εὑρίσκομεν τὴν ἐπιτάχυνσιν (γ) μεθ' ἧς τὸ σῶμα ὀλισθαίνει, ὡς ἐκ τοῦ τύπου

$$S = \frac{\gamma t^2}{2}.$$

ἐξ οὗ εἶναι:

$$\gamma = \frac{2S}{t^2} \qquad (1)$$

Ἐφ' ἑτέρου ὅμως εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡ ἐπιτάχυνσις τοῦ ὀλισθαίνοντος σώματος (γ_0) συναρτήσει τῆς g:

$$\gamma_0 = g.\eta\mu\varphi \qquad (2)$$

Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ὅτι, ἐὰν εἶναι $\gamma < \gamma_0$ (ὅπως πρέπει ἕνεκα τῆς ὑπάρξεως τριβῆς μειονούσης τὴν ἐπιτάχυνσιν) θὰ ὑπάρχῃ ἐπιτάχυνσίς τις (γ_x) τιμῆς:

$$\gamma_x = \gamma_0 - \gamma \qquad (3)$$

ὀφειλομένη εἰς τὴν δύναμιν τριβῆς (F_x) ἥτις προφανῶς θὰ εἶναι (ὡς ἐκ τῆς (3)):

$$F_x = (\gamma_0 - \gamma)\, m$$

ἤ, ἐκ τῶν (1) καὶ (2):

$$F_x = \left(g.\eta\mu\varphi - \frac{2S}{t^2}\right) m$$

θὰ παράγῃ δὲ ἔργον:

$$W = \left(g.\eta\mu\varphi - \frac{2S}{t^2}\right) mS$$

ἢ θερμότητα:

$$Q = \frac{\left(g.\eta\mu\varphi - \frac{2S}{t^2}\right) mS}{\eta}$$

$$Q = \frac{\left(10.0,5 - \frac{2.12,5}{5^2}\right) 8,36.12,5}{4,18} \; \frac{m.Kg.m.cal}{sec^2.joules}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$Q = \frac{4.8{,}36.12{,}5.10^2.10^2.10^8}{4{,}18.10^7} \; \frac{\text{joules . cal}}{\text{joules}}$$

$$\boxed{Q = 100 \text{ cal}}$$

449. Ἁπλῆ μηχανή, ἐργαζομένη μὲ μέσην ἰσχὺν $J=85{,}4$ HP (θεωρητικῶς), ἀποδίδει ἔργον $W_0=12810$ Kg*. m ἐντὸς χρόνου $t=3$ sec.

Ζητεῖται: Πόση θερμότης (Q) θὰ ἐμφανισθῇ ἐντὸς τοῦ ὡς ἄνω χρόνου t ($\eta=427$ Kg*m/Kcal).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἰσχύος $J=W/t$ εὑρίσκομεν τὸ συνολικῶς παραγόμενον ἔργον (W) ἐντὸς τοῦ χρόνου t:

$$W = J \,.\, t \qquad (1)$$

ὁπότε τὸ μετατρεπόμενον εἰς θερμότητα ἔργον (W_ϑ) θὰ εἶναι προφανῶς:

$$W_\vartheta = W - W_0$$

ἤ, ἐκ τῆς (1):

$$W_\vartheta = J\,.\,t - W_0$$

ὁπότε ἡ προκύπτουσα θερμότης εἶναι:

$$Q = \frac{J\,.\,t - W_0}{\eta}$$

$$Q = \frac{85{,}4.3 - 12810}{427} \; \frac{(\text{HP.sec} - \text{Kg*. m})\,\text{Kcal}}{\text{Kg*. m}}$$

$$Q = \frac{85{,}4.3.75 - 12810}{427} \; \frac{\left(\frac{\text{Kg*. m}}{\text{sec}} . \text{sec} - \text{Kg*. m}\right)\text{Kcal}}{\text{Kg*. m}}$$

$$\boxed{Q = 15 \text{ Kcal}}$$

450. Σιδηρᾶ ῥάβδος μήκους ἀρχικοῦ $l_0=100$ cm ὀλισθαίνει ἐπὶ ὁριζοντίου ἐπιπέδου μετὰ τοῦ ὁποίου παρουσιάζει συντελεστὴν τριβῆς $n=0{,}5$, διανύουσα, μὲ παράλληλον μετάβασιν, διάστημα $S=41{,}8$ m ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ τελικὸν μῆκος τῆς ῥάβδου (l), ἂν ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ σιδήρου εἶναι $\lambda = 0{,}000012$ grad^{-1}, ἡ εἰδικὴ θερμότης του $\varepsilon=0{,}1$cal/gr*. grad, ὑποτιθεμένου ὅτι ὅλη ἡ παραγομένη θερμότης θὰ παραμένῃ ἐπὶ τῆς ῥάβδου.

Λύσις: Ἡ δύναμις τριβῆς (F), διδομένη ἐκ τοῦ τύπου

$$F = n\,.\,B$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ μετατοπιζομένη κατὰ S παράγει ἔργον:

$$W = n . B . S$$

ἢ θερμότητα

$$Q = \frac{n . B . S}{\eta} \qquad (1)$$

αὐξάνουσαν τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ποσοῦ B κατὰ t^o, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον:

$$Q = B . \varepsilon . t$$

ὅστις, ἐκ τῆς (1), γίνεται

$$\frac{n . B . S}{\eta} = B . \varepsilon . t$$

ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν αὔξησιν τῆς θερμοκρασίας (t):

$$t = \frac{n . S}{\eta . \varepsilon} \qquad (2)$$

Τέλος, ἐκ τῆς αὐξήσεως ταύτης (t) εὑρίσκομεν τὸ τελικὸν μῆκος:

$$l = l_0 (1 + \lambda t)$$

ὅπερ, ὡς ἐκ τῆς (2), ἔχει τιμήν:

$$l = l_0 \left(1 + \frac{\lambda . n . S}{\eta . \varepsilon}\right)$$

$$\boxed{l = 1 + 6.10^{-9} \text{ m}}$$

451. Δίδεται ποσὸν θερμότητος Q=1000 cal, θερμοκρασίας $t_2 = 227^oC$ καὶ φέρεται ἀκολούθως εἰς θερμοκρασίαν $t_1 = 120^oC$.

Ζητεῖται: Πόσον ἔργον (W) δύναται νὰ παραχθῇ ἐκ τῆς ὡς ἄνω μεταβολῆς.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Carnot:

$$Q' = \frac{Q (T_2 - T_1)}{T_2}$$

ἤτοι

$$Q' = \frac{Q (t_2 - t_1)}{273 + t_2} \qquad (1)$$

εὑρίσκομεν τὴν εἰς ἔργον μετατρέψιμον θερμότητα (Q') ἥτις θ' ἀντιστοιχεῖ εἰς ἔργον:

$$W = \eta . Q'$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤ, ἐκ τῆς (1):

$$W = \frac{\eta \cdot Q\,(t_2 - t_1)}{273 + t_2}$$

$$\boxed{W = 894{,}52 \text{ joules}}$$

452. Θερμικὴ μηχανή, ἀποδίδουσα θεωρητικῶς τὸ ἔργον ἐκ θερμότητος παρουσιάζει, ἐντὸς χρόνου $t=0{,}1$ sec κατανάλωσιν ποσοῦ θερμότητος $Q=800$ cal, ὅπερ μεταπίπτει ἀπὸ θερμοκρασίας τινος ὑψηλῆς $\theta_2 = 527°C$ εἰς ἄλλην θερμοκρασίαν $\theta_1=142°C$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ θεωρητικὴ ἰσχὺς (J) τῆς ὡς ἄνω μηχανῆς.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Carnot

$$Q' = \frac{Q\,(T_2 - T_1)}{T_2}$$

καὶ τῶν γνωστῶν τύπων $W = \eta \cdot Q'$ καὶ $J = \frac{W}{t}$

ἔχομεν:

$$J = \frac{\eta \cdot Q\,(T_2 - T_1)}{t \cdot T_2}$$

$$J = \frac{\eta \cdot Q\,(\theta_2 - \theta_1)}{t\,(\theta_2 + 273)}$$

$$J = \frac{4{,}18.800\,(527 - 142)}{0{,}1\,(527 + 273)} \; \frac{\text{joule} \cdot \text{cal} \cdot \text{grad}}{\text{cal} \cdot \text{grad} \cdot \text{sec}}$$

$$\boxed{J = 16{,}093 \text{ Kwatt}}$$

453. Ἀέριόν τι εὑρίσκεται ἐγκεκλεισμένον ἐντὸς κυλίνδρου ὑπὸ πίεσιν $P_1=12$ atm καὶ ὄγκον $V_1=4{,}1$ lit, ἐκτονοῦται δὲ ἀδιαθέρμως μέχρις ὄγκου $V_2=6$ lit.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ὑπὸ τὸν νέον ὄγκον πίεσις (P_2), ἂν ὁ λόγος τῶν εἰδικῶν θερμοτήτων τοῦ ἀερίου εἶναι $\gamma=2$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἀδιαθέρμου μεταβολῆς

$$P_1 V_1^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

ἔχομεν:

$$P_2 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}$$

$$P_2 = 12 \left(\frac{4{,}1}{6}\right)^2 \text{ atm}$$

$$\boxed{P_2 = 5{,}548 \text{ atm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

454. Δίδεται ἀέριον ὑπὸ ἀρχικὴν πίεσιν $P_1=16$ atm, ὄγκον $V_1=30$ lit καὶ θερμοκρασίαν $t_1=165°C$ καὶ ἐκτονοῦται ἀδιαβατικῶς μέχρι πιέσεως $P_2=1$ atm.

Ζητεῖται: Ποῖος θὰ εἶναι ὁ ὑπὸ τὴν πίεσιν ταύτην νέος ὄγκος (V_2) ὡς καὶ ποία ἡ θερμοκρασία (t_2), ἂν εἶναι $\gamma=2$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$P_1V_1^{\gamma} = P_2V_2^{\gamma}$$

εὑρίσκομεν κατ' ἀρχὴν τὸν ὄγκον V_2, ὅστις θὰ εἶναι:

$$V_2 = V_1 \sqrt[\gamma]{\frac{P_1}{P_2}}$$

$$V_2 = 30 \sqrt[2]{\frac{16}{1}} \text{ lit}$$

$$\boxed{V_2 = 120 \text{ lit}}$$

Διὰ δὲ τὴν εὕρεσιν τῆς θερμοκρασίας ἔχομεν τὸν τύπον:

$$\frac{P_1V_1}{P_2V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

ἤτοι:

$$\frac{P_1V_1}{P_2V_2} = \frac{t_1+273}{t_2+273}$$

ὁπότε εὑρίσκομεν:

$$t_2 = \frac{(t_1+273)\,P_2V_2}{P_1V_1} - 273$$

$$\boxed{t_2 = -31°C}$$

455. Δίδεται ποσὸν θερμότητος $Q=70$ cal εὑρισκόμενον εἰς ὑψηλὴν θερμοκρασίαν $t_2=19{,}6°C$.

Ζητεῖται: Πόση πρέπει νὰ γίνῃ ἡ θερμοκρασία (t_1) τοῦ ὡς ἄνω ποσοῦ ἵνα παραχθῇ ἔργον $W=10$ joules.

Λύσις: Ἔστω Q' ἡ παράγουσα τὸ ἔργον W θερμότης καὶ T_1 καὶ T_2 αἱ ἀπόλυτοι θερμοκρασίαι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς t_1 καὶ t_2. Ἔχομεν τὸν τύπον τοῦ Carnot:

$$Q' = Q\,\frac{T_2 - T_1}{T_2} \qquad (1)$$

καὶ τὴν σχέσιν:

$$Q' = \frac{W}{\eta} \qquad (2)$$

ὅπου εἶναι $\eta=4{,}18$ joules/cal.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐξισοῦντες τὰς (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τότε:

$$Q\,\frac{T_2 - T_1}{T_2} = \frac{W}{\eta}$$

ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$T_1 = T_2 - \frac{T_2 W}{Q\eta}$$

ἤτοι:

$$t_1 = t_2 - \frac{(t_2 + 273)\,W}{Q\eta}$$

$$\boxed{t_1 = 9{,}6^{\circ}C}$$

456. Θερμικὴ ἀκτινοβολία, ἐκπεμπομένη ὑπὸ θερμοῦ σώματος, παρουσιάζει μῆκος κύματος $\lambda = 9900\,\text{Å}$ καὶ διαδίδεται μὲ ταχύτητα $c = 3.10^{10}$ cm/sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ὑπὸ ἑκάστου quantum θερμότητος μεταφερομένη ἐνέργεια (E), ἂν ἡ σταθερὰ τοῦ Planck ἔχῃ τιμὴν $h = 6{,}6.10^{-27}$ erg . sec.

Λύσις: Τὸ μῆκος κύματος συνδέεται ὡς γνωστὸν μὲ τὴν συχνότητα (ν) διὰ τοῦ τύπου

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \qquad (1)$$

ἡ δὲ συχνότης μὲ τὴν ἐνέργειαν διὰ τοῦ τύπου τοῦ Planck

$$E = h\nu \qquad (2)$$

ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$E = \frac{h \,.\, c}{\lambda}$$

$$E = \frac{6{,}6.10^{-27}.3.10^{10}}{9900.10^{-8}}\;\frac{\text{erg . sec . cm}}{\text{sec . cm}}$$

$$\boxed{E = 2.10^{-12}\ \text{erg}}$$

457. Θερμικὴ ἀκτινοβολία συχνότητος $\nu = 3.10^{14}\ \text{sec}^{-1}$ προσπίπτει ἐπὶ ποσότητος ὕδατος μάζης $m = 66$ gr καὶ θερμοκρασίας $t_1 = 12^{\circ}C$.

Ζητεῖται: Πόσα quanta (n) τῆς ὡς ἄνω ἀκτινοβολίας πρέπει νὰ προσπέσουν ἐπὶ τοῦ ὕδατος τούτου, ὥστε ἡ θερμοκρασία του νὰ γίνῃ $t_2 = 15^{\circ}C$, ἂν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι $\varepsilon = 1$ cal/gr . grad καὶ ἂν ὁλόκληρος ἡ μεταφερομένη θερμότης παραμένῃ ὡς τοιαύτη, διαδιδομένη δι' ὅλης τῆς μάζης τοῦ ὑγροῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἡ ὑπὸ ἑκάστου quantum μεταφερομένη ἐνέργεια εἶναι προφανῶς:

$$E = h\nu$$

ἢ ὑπὸ n quantum συνολικῶς:

$$E_n = nh\nu$$

αὕτη δὲ ἀντιστοιχεῖ εἰς θερμότητα (Q) τιμῆς

$$Q = \frac{nh\nu}{\eta} \qquad (1)$$

αὐξάνουσαν τὴν θερμοκρασίαν τοῦ ὕδατος κατὰ τὸν τύπον:

$$Q = m\varepsilon\,(t_2 - t_1) \qquad (2)$$

ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$$\frac{nh\nu}{\eta} = m\varepsilon\,(t_2 - t_1)$$

καὶ

$$n = \frac{\eta m\varepsilon\,(t_2 - t_1)}{h\nu}$$

$$n = \frac{4{,}18.66\,(15 - 12)}{6{,}6.10^{-27}.3.10^{14}}\ \frac{\text{joules}\,.\,\cancel{\text{gr}}\,.\,\cancel{\text{cal}}\,.\,\text{grad}\,.\,\text{sec}}{\text{cal}\,.\,\text{gr}\,.\,\cancel{\text{grad}}\,.\,\text{erg}\,.\,\text{sec}}$$

$$n = \frac{4{,}18.66.3}{6{,}6.3.10^{-13}}\ \frac{\text{joules}}{\text{erg}}$$

$$n = \frac{4{,}18.66.3.10^{7}}{6{,}6.3.10^{-13}}\ \frac{\text{erg}}{\text{erg}}$$

$$\boxed{n = 4{,}18.10^{21}\ \text{quanta}}$$

458. Θερμικὴ μηχανὴ ὠφελίμου ἰσχύος J=41,8 HP καίει ποσότητα m=8000 gr πετρελαίου καθ' ὥραν μὲ ἀνωτέραν θερμοκρασίαν κυλίνδρου t_2=450°C καὶ κατωτέραν t_1=120°C.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ λόγος (ν) τῆς ὠφελίμου πρὸς τὴν θεωρητικὴν ἰσχὺν (J_0), ἂν τὸ πετρέλαιον καιόμενον ἀποδίδει θερμότητα q=9000 Kcal/Kg.

Λύσις: Ἡ εἰς μίαν ὥραν καιομένη ποσότης πετρελαίου δίδει προφανῶς θερμότητα

$$Q = m\,.\,q$$

ἥτις ἀποδίδει ἔργον καθ' ὥραν (ἰσχὺν)

$$J_0 = \frac{\eta.Q\,(t_2 - t_1)}{t_2 + 273} \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε ὁ λόγος

$$\nu = \frac{J}{J_0}$$

ὡς ἐκ τῆς (1) γίνεται:

$$\nu = \frac{J\,(t_2 + 273)}{\eta\,.\,Q\,(t_2 - t_1)}$$

$$\nu = \frac{41{,}8.723}{4{,}18.8000.9000.330}\;\frac{HP\,.\,grad\,.\,cal\,.\,hr\,.\,Kg}{joules\,.\,gr\,.\,Kcal\,.\,grad}$$

$$\nu = \frac{981.41{,}8.75.723.3600.10^3}{10.4{,}18.8000.9000.330.10^3}\;\frac{joules\,.\,grad\,.\,cal\,.\,sec\,.\,Kg}{sec\,.\,joules\,.\,Kg\,.\,cal\,.\,grad}$$

$$\boxed{\nu = 80{,}5\,\%}$$

459. Δίδεται μεταλλικὴ πλὰξ ἐπιφανείας βάσεως $S=120$ cm^2 καὶ πάχους $\lambda=2$ cm, τῆς ὁποίας ἡ μία ὄψις εὑρίσκεται εἰς σταθερὰν θερμοκρασίαν $t_1=20^oC$ ἡ δ' ἄλλη εἰς $t_2=150^oC$.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ διερχομένη ἐκ τῆς μιᾶς εἰς τὴν ἄλλην ὄψιν θερμότης εἶναι $Q=7800$ cal/sec, νὰ εὑρεθῇ πόσος εἶναι ὁ συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος (u) τοῦ ὑλικοῦ.

Λύσις: Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Fourier θὰ ἰσχύῃ διὰ τὸ ὡς ἄνω φαινόμενον ἡ σχέσις

$$Q = \frac{uS\,(t_2 - t_1)}{\lambda}$$

ἐξ οὗ ἔχομεν

$$u = \frac{Q\,.\,\lambda}{S\,(t_2 - t_1)}$$

$$u = \frac{7800.2}{120\,(150 - 20)}\;\frac{cal\,.\,cm}{sec\,.\,cm^2.\,grad}$$

$$\boxed{u = 1\ cal/grad\,.\,cm\,.\,sec}$$

460. Δίδεται σιδηροῦς κύλινδρος πάχους τοιχωμάτων $\lambda = 1{,}5$ cm καὶ συνολικῆς ἐπιφανείας $S = 2000$ cm^2 διὰ τοῦ ὁποίου διαβιβάζεται ἀέριον σταθερᾶς θερμοκρασίας $\theta_1=230^oC$.

Ζητεῖται: Πόση θερμότης (Q) θὰ ἐξέλθῃ τοῦ κυλίνδρου διὰ τῶν τοιχωμάτων του ἐντὸς χρόνου $t=45$ min, ἂν οὗτος εὑρίσκεται εἰς περιβάλλον σταθερᾶς θερμοκρασίας $\theta_2=80^oC$ καὶ ἂν ὁ συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος τοῦ σιδήρου εἶναι $u=0{,}15$ cgs.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Κατὰ τὸν νόμον τοῦ Fourier, ἡ διερχομένη κατὰ sec ποσότης θερμότητος (q) θὰ εἶναι:

$$q = \frac{u.S(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda}$$

ἡ δ' ἐντὸς χρόνου t ἀντιστοίχως:

$$Q = \frac{u.S.t(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda}$$

ἤτοι

$$Q = \frac{0{,}15.2000.45\ (230 - 80)}{1{,}5} \frac{cal.cm^2.min.grad}{grad.cm.sec.cm}$$

$$Q = \frac{0{,}15.2000.45.150.60}{1{,}5} cal$$

$$\boxed{Q = 81000\ Kcal}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

461. Θερμικὴ μηχανή, καταναλίσκουσα ποσότητα ἄνθρακος $m = 10$ Kg/h, ἀνυψώνει ὄγκον ὕδατος $V = 30$ m³ εἰς ὕψος $l = 50$ m ἐντὸς χρόνου $t = 1$ h ἂν εἶναι $q = 8500 \frac{Kcal}{Kg}$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόδοσις (ν) τῆς μηχανῆς ταύτης.

Λύσις: $\nu = 4{,}4\ ^0/_0$.

462. Ποσότης ὑδραργύρου πίπτει ἐξ ὕψους $h = 5$ m ἐπὶ ἐπιφανείας ἐστερημένης ἀγωγιμότητος.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσους βαθμοὺς (t) θ' ἀνέλθῃ ἡ θερμοκρασία του μετὰ τὴν πτῶσιν, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ὁλόκληρος ἡ κινητική του ἐνέργεια μετατρέπεται εἰς θερμότητα καὶ δεδομένης τῆς εἰδικῆς θερμότητος τοῦ ὑδραργύρου $\varepsilon = 0{,}033$ cal/gr.grad.

Λύσις: $t = 0{,}36$ grad.

463. Σφαῖρα σιδήρου βάρους $B_1 = 800$ Kg* πίπτει ἀπὸ ὕψους $h_1 = 10$ m ἐπὶ πλακὸς ἐκ μολύβδου βάρους $B_2 = 6$ Kg* καὶ θερμοκρασίας $t = 12^oC$, ὅτε καὶ ἀναπηδᾷ μέχρις ὕψους $h_2 = 0{,}245$ m. Μετὰ ταῦτα ἐμβαπτίζεται ἀμέσως ἡ πλὰξ ἐντὸς ὕδατος βάρους $B_3 = 5$ Kg* καὶ θερμοκρασίας $t' = 12^oC$, ὁπότε τοῦτο καθίσταται θερμοκρασίας $t'' = 15{,}5^oC$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος (η) εἰς Kg*.m/Kcal, ἐκ τοῦ ὡς ἄνω πειράματος, ἂν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μολύβδου εἶναι $\varepsilon = 0{,}031$ cal/gr.grad.

Λύσις: $\eta = 430{,}8$ Kg*.m/Kcal.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

464. Ἐκ καταρράκτου ὕψους $h = 10$ m πίπτει ποσότης ὕδατος $V = 1$ m^3 ἐντὸς χρόνου $t = 1$ sec.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσους βαθμοὺς (θ) θ° ἀνυψοῦται ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος μετὰ τὴν πτῶσιν ταύτην, ἐὰν λογισθῇ ὡς ἀρχικὴ ταχύτης τῆς πτώσεως $v_0 = 0$, ἂν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ ὕδατος εἶναι $\varepsilon = 1$ cal/gr. grad καὶ ἐὰν $\eta = 427$ Kg*. m/Kcal (μὴ λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς ἐξατμίσεως).

Λύσις: $\theta = 0{,}234$ grad.

465. Καιόμενος λιγνίτης ἀποδίδει ποσὸν θερμότητος $q = 7850$ cal/gr.

Ζητεῖται: Πόσον εἶναι τὸ ἀντίστοιχον ἔργον (W), εἰς μονάδας cgs καὶ εἰς Kg* m.

Λύσις: $W = 32833.10^7$erg, $W = 3351{,}95$ Kg*. m.

466. Ἁμαξοστοιχία μάζης $m = 250$ Tonn κινεῖται εὐθυγράμμως καὶ ἰσοταχῶς μὲ ταχύτητα $v = 72$ Km/h.

Ζητεῖται: Ποία θερμότης (Q) θὰ παραχθῇ ἂν ἡ ἁμαξοστοιχία ἀναγκασθῇ καὶ ἠρεμήσῃ διὰ τοῦ τροχοπεδικοῦ συστήματος (ἂν $\eta = 4{,}18$ joules/cal).

Λύσις: $Q = 22000$ Kcal.

467. Δίδεται τετράχρονος μονοκύλινδρος δηζελοκινητὴρ ὅπου ποσὸν θερμότητος $Q = 4265$ cal ὑφίσταται πτῶσιν ἀπὸ θερμοκρασίας τινος $t_1 = 580$°C εἰς θερμοκρασίαν $t_2 = 150$°C ἐντὸς τεσσάρων παλινδρομῶν τοῦ ἐμβόλου.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς (J) τοῦ κινητῆρος τούτου ἂν ποσὸν ἴσον μὲ τὸ $^1/_5$ τοῦ παραγομένου ἔργου καταναλίσκεται εἰς τὸ σύστημα διστῆρος—στροφάλου—σφονδήλου καὶ ἂν ὁ ἄξων περιστρέφεται μὲ συχνότητα στροφῶν $N = 7{,}5$ sec^{-1}.

Λύσις: $J = 18{,}361$ HP.

468. Δίδεται ἀέριον ὑπὸ ἀρχικὴν πίεσιν $P_1 = 50$ atm καὶ ὄγκον $V_1 = 2$ lit καὶ ἐκτονοῦται μέχρις ὄγκου $V_2 = 8$ lit.

Ζητεῖται: Ποία διαφορὰ πιέσεων (dP) θὰ παρουσιασθῇ μεταξὺ τῆς ἀδιαθέρμου καὶ ἰσοθέρμου ἐκτονώσεως, ἂν ὁ λόγος τῶν εἰδικῶν θερμοτήτων διὰ τὸ ὡς ἄνω ἀέριον εἶναι $\gamma = 1{,}4$.

Λύσις: $dP = 5{,}32$ atm.

469. Βαρὺς σφόνδηλος μηχανῆς περιστρέφεται ἐλευθέρως μὲ γραμμικὴν ταχύτητα εἰς τὸ ἄκρον τῆς περιφερείας του $v = 2{,}05$ m/sec.

Ζητεῖται: Πόση θερμότης (Q) θὰ παραχθῇ ἂν ὁ σφόνδηλος ἠρεμήσῃ διὰ τροχοπέδης, δεδομένης τῆς ἀκτῖνός του $R = 1$m

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ τῆς ῥοπῆς ἀδρανείας του $K=80$ Kg. m², ἂν $\eta=4,2025$ joules/cal.

Λύσις: $Q=40$ cal.

470. Ἐντὸς ἀτμοθαλάμου λέβητος ἀτμομηχανῆς παράγεται ἀτμὸς σταθερᾶς θερμοκρασίας $t_1=340^0C$, ὅστις δι᾽ ἀτμαγωγοῦ σωλῆνος κυλινδρικοῦ ἄγεται εἰς τὸν κύλινδρον.

Ζητεῖται: Ἂν τὸ πάχος τῶν τοιχωμάτων τοῦ σωλῆνος εἶναι $d=0,1$ cm, τὸ μῆκός του $\lambda=10$ m καὶ ἡ μέση διάμετρός του $D=2$ cm, ἡ θερμακρασία τοῦ περιβάλλοντος $t_2=40^0C$ καὶ ὁ συντελεστὴς θερμικῆς ἀγωγιμότητος τοῦ ὑλικοῦ τοῦ σωλῆνος $u=0,15$ cgs, πόση θερμότης (Q) χάνεται κατὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ἀτμοῦ εἰς ἕκαστον sec.

Λύσις: $Q=2823$ Kcal/sec.

471. Τὸ βαρὺ ἄκρον μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς μάζης $M=9860$ gr καὶ μήκους $\lambda=4$ m, εἰς τόπον ἔνθα εἶναι $g=1000$ cgs, ἐν ἰσορροπίᾳ εὑρισκόμενον βάλλεται ὁριζοντίως ὑπὸ βλήματος μάζης $m=40$ gr, ὅπερ ἐνσφηνοῦται οὕτω εἰς τὸ ἄκρον τοῦ ἐκκρεμοῦς, προκαλεῖ ἔκλυσιν ποσοῦ θερμότητος $Q=24$ cal καὶ ἀναγκάζει τὸ ἐκκρεμὲς ν᾽ ἀποκλίνῃ κατὰ γωνίαν $\varphi=60^0$.

Ζητεῖται: Μὲ ποίαν ταχύτητα (v) τὸ βλῆμα ἔπληξε τὸ ἐκκρεμές, ἐὰν εἶναι $\eta=4,18$ joules/cal.

Λύσις: $v=122,13$ m/sec.

472. Τὰ δύο τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται κύλινδρος θερμικῆς μηχανῆς ὑπὸ τοῦ ἐμβόλου του συγκοινωνοῦν τὸ μὲν ἓν μὲ τὸν ἀτμοθάλαμον λέβητος παρέχοντος ἀτμὸν θερμοκρασίας $t_1=100^0C$ τὸ δ᾽ ἄλλο μὲ τὸν χῶρον ψυγείου ἔνθα ἡ πίεσις εἶναι $P_0=66$ mmHg.

Ζητεῖται: Ἂν ὁ ὑδράργυρος ἔχῃ εἰδ. βάρος $\varepsilon=13,6$ gr*/cm³, ὁ ἀὴρ $\varepsilon'=1,293$ gr*/lit, ὁ ἀτμὸς $\varepsilon''=0,625$gr*/lit, ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἔργον (W_1) μιᾶς διαδρομῆς ὡς καὶ τὸ ἔργον (W_2) τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς ἓν gr καταναλισκομένου ἀτμοῦ.

Λύσις: $W_1=952$ Kg*. m, $W_2=158$ joules.

473. Παγοποιητικὴ μηχανὴ λειτουργοῦσα ἀντιστρεπτῶς μεταξὺ τῶν θερμοκρασιῶν $t=20^0C$ καὶ $t'=-50^0C$ παράγει ἐξ ὕδατος θερμοκρασίας t πάγον.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ἐλάχιστον ἔργον (W) ὅπερ ἀπαιτεῖται διὰ τὴν παραγωγὴν ἑνὸς gr πάγου, δεδομένης τῆς θερμότητος πήξεως τοῦ ὕδατος $q=80$ cal/gr καὶ τοῦ $\eta=4,18$ joules/cal.

Λύσις: $W=131,2$ joules.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

474. Δίδεται τὸ εἰς τὸ σύστημα cgs—Celsius μηχανικὸν ἰσοδύναμον τῆς θερμότητος $\eta = 4{,}18.10^7$.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μηχανικὸν ἰσοδύναμον (H) εἰς τὸ ἀγγλικὸν σύστημα, ὅπου ὡς μονὰς δυνάμεως λαμβάνεται ἡ λίμπρα (lb*), ὡς μήκους ὁ ποῦς (1 ft=30,5 cm) καὶ ὡς θερμὶς (cal^{eng}) τὸ ποσὸν τῆς θερμότητος ὅπερ ἀπαιτεῖται διὰ νὰ αὐξηθῇ κατὰ 1° Fahrenheit ἡ θερμοκρασία μιᾶς λίμπρας ὕδατος (g=981,17 cm/sec^2).

Λύσις: $H = 775\ lb^*.ft/cal^{eng}$.

475. Θερμικὴ ἀκτινοβολία, ἀποτελουμένη ἀπὸ quanta μήκους κύματος $\lambda_1 = 8000\ \mathring{A}$ προσπίπτει ἐπὶ σώματος, ὁπότε ἕκαστον quantum μετὰ τὴν ἐπὶ τοῦ σώματος πρόσκρουσιν ἀνακλᾶται μὲ νέον μῆκος κύματος $\lambda_2 = 9000\ \mathring{A}$.

Ζητεῖται: Πόσην ἐνέργειαν (E) ἐγκαταλείπει ἕκαστον quantum ἐπὶ τοῦ σώματος ($h = 6{,}6.10^{-27}$ erg. sec, $c = 3.10^{10}$ cm/sec).

Λύσις: $E = 2{,}75.10^{-13}$ erg.

476. Ἑξακύλινδρος βενζινοκινητήρ, ὠφελίμου ἰσχύος J = 42,7 HP, παρουσιάζει συντελεστὴν ἀποδώσεως N = 25 % μεταξὺ τῆς θεωρητικῆς προβλεπομένης ἰσχύος καὶ τῆς ἀποδιδομένης τοιαύτης, ἐργαζόμενος μεταξὺ τῶν ἄκρων θερμοκρασιῶν $t_1 = 100°C$ καὶ $t_2 = 427°C$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ὑπὸ ἑκάστου κυλίνδρου καταναλισκομένη θερμότης (Q) κατὰ sec.

Λύσις: Q=10,7 Kcal/sec.

477. Ἀέριόν τι ὑπὸ πίεσιν $P = 14\ Kg^*/cm^2$ εὑρίσκεται ἐγκεκλεισμένον ἐντὸς κυλίνδρου ὄγκου σταθεροῦ V=6 lit.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερική του ἐνέργεια (U) ὑπὸ τὰς ὡς ἄνω συνθήκας, ἂν ὁ λόγος τῶν εἰδικῶν θερμοτήτων του εἶναι $\gamma = 1{,}42$.

Λύσις: U=2000 Kg*. m.

478. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα διαστάσεων δίδονται ὡς θεμελιώδεις αἱ διαστάσεις τῆς θερμότητος [Q]=q, τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος [η]=η, τῆς δυνάμεως [F]=f καὶ τοῦ χρόνου [t]=t.

Ζητεῖται: Ποῖαι εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ἔργου [W], τοῦ διαστήματος [S], τῆς ταχύτητος [v] καὶ τῆς ἐπιταχύνσεως [γ].

Λύσις: $[W] = q.\eta$, $[S] = q.\eta.f^{-1}$, $[v] = q.\eta.f^{-1}.t^{-1}$, $[\gamma] = q.\eta.f^{-1}.t^{-2}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

479. Εἰς αὐθαίρετον σύστημα διαστάσεων δίδονται ὡς θεμελιώδεις αἱ διαστάσεις τῆς δράσεως $[D]=d$, τοῦ χρόνου $[t]=t$ καὶ τοῦ μηχανικοῦ ἰσοδυνάμου τῆς θερμότητος $[\eta]=\eta$.

Ζητεῖται: Ποῖαι εἶναι αἱ διαστάσεις τῆς θερμότητος $[Q]$, καὶ τοῦ ἔργου $[W]$.

Λύσις: $[W]=d.t^{-1}$, $[Q]=d.t^{-1}.\eta^{-1}$.

480. Ἀέριον σῶμα, μάζης $m=5$ gr ἐγκλείεται ἐντὸς κυλίνδρου ὄγκου $V=5$ lit ὑπὸ πίεσιν $P=1$ Kg*/cm καὶ θερμοκρασίαν $t=127°C$.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μοριακὸν βάρος (μ) τοῦ ἀερίου ἂν ἡ σταθερὰ τῶν ἀερίων εἶναι $R=0{,}82$ Kg*. m/grad.

Λύσις: $\mu=32{,}8$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

V. ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ

481. Δίδεται σίδηρος, ἔχων μέτρον ἐλαστικότητος $E = 16000$ Kg^{*}/mm^{2} καὶ πυκνότητα $d = 7{,}8\ gr/cm^{3}$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐντὸς τούτου ταχύτης τοῦ ἤχου (v).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Newton ἔχομεν :

$$v = \sqrt{\frac{E}{d}}$$

$$v = \sqrt{\frac{16000}{7{,}8}}\sqrt{\frac{Kg^{*}.\,cm^{3}}{mm^{2}.\,gr}}$$

$$v = \sqrt{\frac{16.981.10^{8}}{7{,}8}}\sqrt{\frac{cm^{2}}{sec^{2}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{16.981.10^{4}}{7{,}8}}\sqrt{\frac{m^{2}}{sec^{2}}}$$

$$\boxed{v = 4487\ \frac{m}{sec}}$$

482. Δίδεται ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς στερεοῦ ἴση μὲ $v = 1100\ m/sec$.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μέτρον ἐλαστικότητος (E) τοῦ στερεοῦ, ἂν ἡ πυκνότης του εἶναι $d = 6{,}2\ gr/cm^{3}$.

Λύσις: Λύοντες τὸν τύπον τοῦ Newton ὡς πρὸς τὸ E ἔχομεν :

$$E = d.\,v^{2}$$

$$E = 6{,}2.1100^{2}\ \frac{gr.\,m^{2}}{cm^{3}.\,sec^{2}}$$

$$E = 6{,}2.121.10^{8}\ \frac{dynes}{cm^{2}}$$

$$\boxed{E = 7647\ Kg^{*}/mm^{2}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

483. Δίδεται ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς σιδήρου, εἰς θερμοκρασίαν $t_1=0^oC$ ἴση μὲ $v=5000$ m/sec.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ ταχύτης ἐντὸς τοῦ σιδήρου (v_2) εἰς θερμοκρασίαν $t_2=100^oC$, ὑποτιθεμένου ὅτι δὲν μεταβάλλεται ἡ ἐλαστικότης τοῦ μετάλλου μὲ τὴν θερμοκρασίαν, ἂν ὁ γραμμικὸς συντελεστὴς διαστολῆς τοῦ σιδήρου εἶναι $\lambda=0{,}000012$ $grad^{-1}$.

Λύσις: Ἔστω d_1 ἡ πυκνότης τοῦ σιδήρου εἰς θερμοκρασίαν t_1, ἔχομεν τότε

$$v_1=\sqrt{\frac{E}{d_1}} \qquad (1)$$

ἀντιστοίχως ἔστω d_2 ἡ πυκνότης εἰς θερμοκρασίαν t_2, ὅπου εἶναι

$$d_2=\frac{d_1}{(1+ut)} \qquad (2)$$

θὰ εἶναι τότε:

$$v_2=\sqrt{\frac{E}{d_2}}$$

ἤτοι

$$v_2=\sqrt{\frac{E\,(1+ut)}{d_1}} \qquad (3)$$

Διαιροῦντες τὰς (1) καὶ (3) κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{E\,d_1}{d_1\,E\,(1+ut)}}$$

ὁπότε ἔχομεν:

$$v_2=v_1\sqrt{1+ut}$$

$$v_2=v_1\sqrt{1+3\lambda\,(t_2-t_1)}$$

$$\boxed{v_2=5008{,}5\ \frac{m}{sec}}$$

484. Ἐντὸς ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος, πυκνότητος $d=0{,}0012$ gr/cm^3, ὁ ἦχος παρουσιάζει ταχύτητα διαδόσεως $v=340$ m/sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πίεσις τοῦ ἀέρος (P), ἂν ὁ λόγος τῶν εἰδικῶν θερμοτήτων του εἶναι $\gamma=1{,}41$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Laplace

$$v=\sqrt{\frac{P\,.\,\gamma}{d}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λύοντες ὡς πρὸς P εὑρίσκομεν :

$$P = \frac{dv^2}{\gamma}$$

$$P = \frac{0,0012.340^2}{1,41} \quad \frac{gr.m^2}{cm^3.sec^2}$$

$$P = \frac{0,0012.340^2.10^4}{1,41} \quad \frac{dynes}{cm^2}$$

$$P = \frac{0,0012.340^2.10^4}{1,41.981.10^3} \quad \frac{Kg^*}{cm^2}$$

$$\boxed{P = 1,002\ Kg^*/cm^2}$$

485. Ἐντὸς ἀερίου ὑπὸ πίεσιν τινὰ ἀρχικὴν (P_1) ὁ ἦχος παρουσιάζει ταχύτητα $v_1 = 500$ m/sec.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ταχύτης (v_2) ἂν ἡ θερμοκρασία τοῦ ἀερίου αὐξηθῇ κατὰ t=163,8 grad ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον, ὑποτιθεμένου τοῦ γ σταθεροῦ.

Λύσις: Ἡ ὑπὸ σταθερὸν ὄγκον πίεσις (P_2), ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν αὔξησιν t θὰ εἶναι, ὡς ἐκ τοῦ Νόμου τοῦ Gay Lussac :

$$P_2 = P_1\left(1 + \frac{t}{273}\right)$$

ὁπότε ὁ τύπος τοῦ Laplace, διὰ τὰς δύο πιέσεις γίνεται ἀντιστοίχως :

$$v_1 = \sqrt{\frac{P_1 . \gamma}{d}} \qquad (1)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{P_1 (1 + t/273)\ \gamma}{d}} \qquad (2)$$

ἐφ' ὅσον, μὴ αὐξανομένου τοῦ ὄγκου, παραμένει ἡ πυκνότης (d) σταθερά.

Διαιροῦντες, ἐν συνεχείᾳ, τὰς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη ἔχομεν :

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{1}{1 + t/273}}$$

ἐξ οὗ :

$$v_1 = v_2 \sqrt{1 + t/273}$$

$$\boxed{v_2 = 633,6\ m/sec}$$

486. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $v_1 = 340$ m/sec, ἐντὸς ἀέρος ὑπὸ θερμοκρασίαν $t_1 = 0°C$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου (v_2) ἐντὸς τῆς αὐτῆς ποσότητος ἀέρος ἐὰν μεταβληθῇ ἡ θερμοκρασία καὶ γίνῃ $t_2=60^oC$.

Λύσις: Ὁ συνδέων τὰ στοιχεῖα τῶν δύο καταστάσεων, μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ποσότητος ἀερίου, τύπος τῶν τελείων ἀερίων, ἔχει μορφὴν

$$\frac{P_1V_1}{P_2V_2}=\frac{T_1}{T_2}$$

διὰ τὴν ὡς ἄνω μεταβολήν, ὁπότε ἡ πίεσις P_2 ἔχει τιμὴν

$$P_2=\frac{P_1V_1(t_2+273)}{V_2(t_1+273)} \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Laplace ἔχομεν, ὅμως, διὰ τὰς δύο καταστάσεις ἀντιστοίχως τὰς σχέσεις:

$$v_1=\sqrt{\frac{P_1\gamma}{d_1}}, \quad v_1=\sqrt{\frac{P_1V_1\gamma}{m}} \qquad (2)$$

$$v_2=\sqrt{\frac{P_2\gamma}{d_2}}, \quad v_2=\sqrt{\frac{P_2V_2\gamma}{m}} \qquad (3)$$

ὁπότε διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς τελικὰς μορφὰς τῶν (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν:

$$\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{P_1V_1}{P_2V_2}}$$

ἤτοι τὴν σχέσιν:

$$v_2=v_1\sqrt{\frac{P_2V_2}{P_1V_1}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας, ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τῆς P_2 ἐκ τῆς (1), εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$v_2=v_1\sqrt{\frac{t_2+273}{t_1+273}}$$

$$v_2=340\sqrt{\frac{333}{273}}\ \frac{m}{sec}$$

$$\boxed{v_2=375{,}36\ \frac{m}{sec}}$$

487. Παρατηρητής, ἱστάμενος εἰς τὸ χεῖλος φρέατος, ἀφίνει νὰ πέσῃ ἐντὸς αὐτοῦ λίθον ($g=10\ m/sec^2$) καὶ ἀκούει τὸν κρότον ἐντὸς τοῦ πυθμένος μετὰ πάροδον χρόνου $t=6$ sec.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάθος (h) τοῦ φρέατος, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $v=340$ m/sec.

Λύσις: Ἔστω t_1 ὁ ἀπαιτούμενος διὰ τὴν πτῶσιν τῆς λίθου χρόνος. Οὗτος θὰ εἶναι, προφανῶς, ὡς ἐκ τῆς ἐπιταχυνομένης κινήσεως:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \tag{1}$$

Ἔστω, ἐν συνεχείᾳ, t_2 ὁ ἀπαιτούμενος ὑπὸ τοῦ ἤχου χρόνος διὰ νὰ φθάσῃ οὗτος ἐκ τοῦ πυθμένος εἰς τὸ χεῖλος. Θὰ εἶναι

$$t_2 = \frac{h}{v} \tag{2}$$

ὡς ἐκ τῆς ὁμαλῆς κινήσεως τοῦ ἤχου.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τότε:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v} = t$$

ἤτοι:

$$gh^2 - (2tgv + 2v^2)\,h + t^2gv^2 = 0$$

$$10\,h^2 - 156400\,h + 41616000 = 0$$

$$\boxed{h = 271 \text{ m}}$$

488. Δίδεται δίσκος σειρῆνος τοῦ Seebeck, φέρων εἰς ἀπόστασιν $R=80$ cm ἀπὸ τοῦ κέντρου του, ὀπὰς ἐν συνόλῳ $n=24$ περιφερειακῶς διατεταγμένας καὶ παράγων ἦχον συχνότητος $N=480$ sec^{-1}.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης τῶν ὀπῶν (v) διὰ τὴν παραγωγὴν τοῦ ὡς ἄνω ἤχου.

Λύσις: Ἔστω n_0 ἡ συχνότης περιστροφῆς τοῦ δίσκου. Αὕτη θὰ συνδέεται ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν μὲ τὰ λοιπὰ στοιχεῖά του διὰ τοῦ τύπου

$$v = 2\pi R n_0 \tag{1}$$

ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ μὲ τὴν συχνότητα N καὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὀπῶν διὰ τοῦ τύπου

$$N = n \,.\, n_0 \tag{2}$$

ὁπότε λύοντες τὰς (1) καὶ (2) ὡς πρὸς n_0 καὶ ἐξισοῦντες τὰ δεύτερα μέλη τῶν προκυπτουσῶν σχέσεων ἔχομεν:

$$\frac{v}{2\pi R} = \frac{N}{n}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί :

$$v = \frac{2\pi RN}{n}$$

$$v = \frac{6,28.80.480}{24} \frac{cm}{sec}$$

$$\boxed{v = 100,48 \text{ m/sec}}$$

489. Δίδεται ἦχος συχνότητος $N = 680 \text{ sec}^{-1}$, διαδιδόμενος ἐντὸς τοῦ ἀέρος μὲ ταχύτητα $v = 340$ m/sec.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν (S) θὰ μεταδοθῆ ἐντὸς χρόνου (t) ἀντιστοιχοῦντος πρὸς ἓξ παλμικὰς κινήσεις πλήρεις.

Λύσις: Ἔστω T ἡ περίοδος τοῦ ἤχου, ὁ χρόνος t θὰ εἶναι προφανῶς :

$$t = 6T$$

ὁπότε τὸ διάστημα S θὰ εἶναι :

$$S = v \, . \, t$$

$$S = 6vT \qquad (1)$$

Ἡ περίοδος ὅμως T εἶναι $T = 1/N$, ὁπότε ὁ τύπος (1) γίνεται :

$$S = \frac{6v}{N}$$

ἤτοι :

$$S = \frac{6.340}{680} \frac{m \, . \, sec}{sec}$$

$$\boxed{S = 3 \text{ m}}$$

490. Ἦχος ὡρισμένης συχνότητος (N) παρουσιάζει εἰς τὸν ἀέρα ταχύτητα διαδόσεως $v = 332$ m/sec καὶ μῆκος κύματος $\lambda = 2$ m.

Ζητεῖται: Ποῖον μῆκος κύματος (λ′) θὰ παρουσιάζῃ ὁ αὐτὸς ἦχος ἐντὸς τοῦ ὕδατος ὅπου ἡ ταχύτης διαδόσεώς του εἶναι $v' = 1464$ m/sec.

Λύσις: Διὰ τὸν ἀέρα καὶ τὸ ὕδωρ ἔχομεν ἀντιστοίχως τοὺς δύο τύπους :

$$\lambda = \frac{v}{N}$$

καὶ

$$\lambda' = \frac{v'}{N}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τοὺς ὁποίους διαιροῦντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν :

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{v}{v'}$$

ὁπότε εἶναι :

$$\lambda' = \frac{\lambda \cdot v'}{v}$$

$$\boxed{\lambda' = 8{,}83 \text{ m}}$$

491. Ἠχητικὴ πηγή, παράγουσα ἦχον περιόδου $T_0 = 0{,}0025$ sec κινεῖται πλησιάζουσα παρατηρητήν, μὲ σχετικὴν ὡς πρὸς τοῦτον ταχύτητα $u = 100$ m/sec.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ περίοδος (T) ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὁ παρατηρητὴς θ᾿ ἀκούσῃ τὸν ἦχον, ἂν οὗτος ἔχῃ ταχύτητα διαδόσεως $v = 340$ m/sec.

Λύσις: Ἐὰν ἡ ἠχητικὴ πηγὴ ὑποτεθῇ ἀκίνητος, τότε ὁ ἦχος ἐντὸς χρόνου T_0 θὰ διανύσῃ διάστημα (λ_0) τιμῆς :

$$\lambda_0 = v \cdot T_0 \qquad (1)$$

Ταυτοχρόνως ὅμως ἡ πηγὴ ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου θὰ πλησιάσῃ τὸν παρατηρητὴν κατὰ διάστημα

$$S = u \cdot T_0 \qquad (2)$$

ὁπότε θ᾿ ἀπέχῃ τούτου κατὰ διάστημα λ τιμῆς :

$$\lambda = \lambda_0 - S$$

ἤτοι, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) :

$$\lambda = vT_0 - uT_0$$

$$\lambda = T_0 (v - u) \qquad (3)$$

Τὸ διάστημα ὅμως τοῦτο (λ) θὰ εἶναι τὸ φαινομενικῶς ὑπὸ τοῦ ἤχου διανυθὲν ὡς πρὸς τὸν παρατηρητὴν ἐντὸς χρόνου T_0, θὰ εἶναι δηλαδή, διὰ τὸν παρατηρητὴν φαινομενικὸν μῆκος κύματος καὶ θὰ ἔχῃ ὡς ἐκ τούτου φαινομενικὴν περίοδον T συμφώνως πρὸς τὸν τύπον

$$\lambda = v \cdot T$$

ὅστις, ὡς ἐκ τῆς (3), γίνεται :

$$T_0 (v - u) = vT$$

ὁπότε εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$T = \frac{T_0 (v - u)}{v} \qquad (4)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καλούμενον τύπον τοῦ Doppler, ἐξ οὗ τελικῶς:

$$T = \frac{0{,}0025\,(340-100)}{340}\ \frac{\sec . m . \sec}{\sec . m}$$

$$\boxed{T = 0{,}0017 \sec}$$

492. Ἀεροπλάνον κινεῖται ὡς πρὸς στόχον μὲ ταχύτητα παράγον ἦχον, ὑπὸ τῶν κινητήρων του, συχνότητος $N_0 = 800 \sec^{-1}$, ἐντὸς τοῦ ἀέρος ὅπου ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $v = 332$ m/sec.

Ζητεῖται: Ποίαν ταχύτητα (u) πρέπει νὰ ἔχῃ τὸ ἀεροπλάνον ἵνα μὴ γίνεται ἀκουστὸς ὁ ἦχός του, δεδομένου ὅτι ἡ μεγίστη ἀκουστὴ συχνότης, διὰ τὸν εἰς τὸν στόχον εὑρισκόμενον παρατηρητήν, εἶναι $N = 30000 \sec^{-1}$.

Λύσις: Διὰ νὰ μὴ γίνῃ ἀκουστὸς ὁ ἦχος πρέπει νὰ παρουσιάζῃ ὡς πρὸς τὸν παρατηρητὴν συχνότητα τοὐλάχιστον $N = 30000 \sec^{-1}$.

Πρὸς τοῦτο, λαμβάνοντες τὸν τύπον τοῦ Doppler (τὸν (4) τῆς ἀσκ. 491), καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ T_0 καὶ T ἔχομεν:

$$N = \frac{N_0 . v}{v - u} \qquad (1)$$

ὁπότε, λύοντες ὡς πρὸς u εὑρίσκομεν:

$$u = \frac{v\,(N - N_0)}{N}$$

$$u = \frac{332\,(30000 - 800)}{30000}\ \frac{m}{\sec}$$

$$\boxed{u = 323{,}15 \text{ m/sec}}$$

493. Σιδηρόδρομος, παράγων ἦχον διὰ τῆς σειρῆνος του γνωστῆς συχνότητος $N_0 = 800 \sec^{-1}$, κινεῖται μακρὰν τοῦ σταθμοῦ, ὁπότε ὁ ἦχός του φαίνεται, διὰ τοὺς ἐν τῷ σταθμῷ, ὡς ἔχων συχνότητα $N = 700 \sec^{-1}$.

Ζητεῖται: Μὲ ποίαν ταχύτητα κινεῖται ὁ σιδηρόδρομος (u) ὡς πρὸς τὸν σταθμόν, πλησιάζων ἢ ἀπομακρυνόμενος τούτου, δεδομένης τῆς ταχύτητος διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα $v = 340$ m/sec.

Λύσις: Λαμβάνοντες τὸν συνδέοντα τὰς συχνότητας τύπον τοῦ Doppler ((1) τῆς ἀσκ. 492):

$$N = \frac{N_0 . v}{v - u}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λύοντες ὡς πρὸς u

$$u = \frac{v\,(N - N_0)}{N} \qquad (1)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες εὑρίσκομεν :

$$\boxed{u = -153 \text{ Km/h}}$$

ὁπότε ἐκ τῆς ἀρνητικῆς τιμῆς τῆς ταχύτητος u συμπεραίνομεν ὅτι αὕτη εἶναι ἀντίθετος πρὸς τὴν v, ἤτοι ὅτι ὁ σιδηρόδρομος ἀπομακρύνεται τοῦ σταθμοῦ μὲ 153 χιλιόμετρα καθ' ὥραν.

494. Δίδεται ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα $v = 300$ m/sec.

Ζητεῖται: Μὲ ποίαν ταχύτητα πρέπει νὰ κινῆται ἀεροπλάνον ὡς πρὸς παρατηρητὴν ἀκίνητον, ὥστε ἡ συχνότης τοῦ ἤχου τῶν κινητήρων του $N_0 = 1000 \text{ sec}^{-1}$ νὰ φθάνῃ ὡς ὑπέρηχος συχνότης $N = 120000 \text{ sec}^{-1}$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου (1) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως

$$u = \frac{v\,(N - N_0)}{N}$$

εὑρίσκομεν

$$u = \frac{340\,(120000 - 1000)}{120000}\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$\boxed{u = 404{,}6\ \frac{\text{Km}}{\text{h}}}$$

495. Μεταλλικὴ χορδή, τεινομένη διὰ δυνάμεως F=30 Kg* παράγει ἦχον μήκους κύματος, εἰς τὸν ἀέρα, $\lambda = 0{,}5$ m.

Ζητεῖται: Ποίας συχνότητος (N′) θὰ εἶναι ὁ ὑπὸ τῆς αὐτῆς χορδῆς παραγόμενος ἦχος ὑπὸ τάσιν F′=120 Kg*, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $v = 340$ m/sec.

Λύσις: Ἔστω N ἡ συχνότης τοῦ ἔχοντος μῆκος κύματος λ ἤχου. Αὕτη προφανῶς θὰ εἶναι :

$$N = \frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{F}{\pi \cdot d}} \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου ὅμως ἡ συχνότης N′ θὰ εἶναι :

$$N' = \frac{1}{2lr}\sqrt{\frac{F'}{\pi . d}} \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$\frac{N}{N'} = \sqrt{\frac{F}{F'}}$$

ἥτις ἐκ τῆς τιμῆς N=v/λ γίνεται :

$$\frac{v}{N'\lambda} = \sqrt{\frac{F}{F'}}$$

ὁπότε λύοντες ὡς πρὸς N′ εὑρίσκομεν :

$$N' = \frac{v}{\lambda}\sqrt{\frac{F'}{F}}$$

$$N' = \frac{340}{0,5}\sqrt{\frac{120}{30}}$$

$$\boxed{N' = 1360 \text{ sec}^{-1}}$$

496. Δίδεται ἀνοικτὸς ἠχητικὸς σωλὴν μήκους Λ = 2 m διεγειρόμενος διὰ ρεύματος ἀέρος ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι v=332 m/sec.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ συχνότης (N) τοῦ παραγομένου θεμελειώδους τόνου.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$N = \frac{v}{2\Lambda}$$

εὑρίσκομεν :

$$N = \frac{332}{2.2}\,\frac{\text{m}}{\text{sec.m}}$$

$$\boxed{N = 83 \text{ sec}^{-1}}$$

497. Ὁ ὑπὸ ἠχητικοῦ ἀνοικτοῦ σωλῆνος παραγόμενος θεμελειώδης ἦχος, ἀκουόμενος διὰ τοῦ ἀέρος ἔχει συχνότητα $N=170\ \text{sec}^{-1}$, ἀκουόμενος δὲ μέσῳ τοῦ μετάλλου τοῦ σωλῆνος ἔχει συχνότητα $N'=2250\ \text{sec}^{-1}$.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ σωλῆνος (Λ) καὶ ποία ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ ἀέρος (v) καὶ ποία ἐντὸς τοῦ μετάλλου (v′), ἂν αἱ δύο ταχύτητες ἔχουν λόγον v′/v=15.

Λύσις: Ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων

$$N = \frac{v}{2\Lambda}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$N' = \frac{v'}{2\Lambda}$$

$$\frac{v'}{v} = 15$$

ἀποτελουσῶν σύστημα εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν τριῶν ἀγνώστων v, v′ καὶ Λ, αἵτινες εἶναι :

$$\boxed{\begin{aligned} v &= 340 \text{ m/sec} \\ v' &= 5100 \text{ m/sec} \\ \Lambda &= 1 \text{ m} \end{aligned}}$$

498. Δίδεται χορδὴ γραμμικῆς πυκνότητος μ=5 gr/m, ἥτις τεινομένη ὑπὸ δυνάμεως F = 20 Kg* παρουσιάζει συχνότητα N = 56 sec⁻¹.

Ζητεῖται : Ποῖον εἶναι τὸ μῆκός της (λ).

Λύσις : Ἐκ τοῦ τύπου τῶν χορδῶν

$$N = \frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

ἔχομεν :

$$\lambda = \frac{1}{2N}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\lambda = \frac{1}{2.56}\sqrt{\frac{20}{5}} \quad \frac{1}{\text{sec}^{-1}}\sqrt{\frac{\text{Kg*}.\text{m}}{\text{gr}}}$$

$$\lambda = \frac{1}{2.56}\sqrt{\frac{20.10^3.981.10^2}{5}} \quad \text{sec}\sqrt{\frac{\text{gr}.\text{cm}.\text{cm}}{\text{sec}^2.\text{gr}}}$$

$$\lambda = \frac{1}{2.56}\sqrt{\frac{20.981.10^5}{5}} \quad \text{cm}$$

$$\boxed{\lambda = 176{,}86 \text{ cm}}$$

499. Παρατηρητὴς ἀπέχει ἐξ ἑνὸς τοίχου ἀνακλῶντος τὸν ἦχον κατ᾽ ἀπόστασιν τινα ὡρισμένην S. Μεταξὺ τοῦ παρατηρητοῦ καὶ τοῦ τοίχου καὶ ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου πρὸς τὸν τοῖχον ὁριζοντίας εὐθείας ὑπάρχει ἠχητικὴ πηγή.

Ζητεῖται : Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς πηγῆς ἀπὸ τὸν τοῖχον (x) ἂν ὁ παρατηρητὴς ἀκούει δύο ἤχους (ἀπ᾽ εὐθείας καὶ ἐξ ἀνακλάσεως) εἰς διαφορὰν χρόνου θ = 2 sec, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι v=332 m/sec.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ὁ ἀπ' εὐθείας ἦχος φθάνων εἰς τὸν παρατηρητὴν θὰ διανύσῃ διάστημα (S—x) εἰς χρόνον ἔστω t_1 ὁπότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$S - x = vt_1 \qquad (1)$$

Ἀντιστοίχως ὁ ἐξ ἀνακλάσεως ἦχος διανύῃ διάστημα (S + x) εἰς χρόνον ἔστω t_2, ὁπότε ἔχομεν :

$$S + x = vt_2 \qquad (2)$$

ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὴν (1) ἀπὸ τὴν (2) εὑρίσκομεν τότε τὴν σχέσιν :

$$2x = vt_2 - vt_1$$

ἐξ ἧς εἶναι :

$$x = \frac{v\,(t_2 - t_1)}{2}$$

ὁπότε θέτοντες θ ὅπου $(t_2 - t_1)$ ἔχομεν τελικῶς :

$$x = \frac{v\theta}{2}$$

$$x = \frac{332.2}{2}\ \frac{m.sec}{sec}$$

$$\boxed{x = 332\ m}$$

500. Τὸ ἄκρον μακροῦ μεταλλικοῦ σύρματος μήκους $l = 1000$ m κρούεται διὰ σφύρας, ὁπότε ὁ ἦχος φθάνει εἰς παρατηρητὴν εὑρισκόμενον εἰς τὸ ἄλλον ἄκρον εἰς διαφορὰν χρόνου θ=2,8 sec, ἀπ' εὐθείας μέσῳ τοῦ σύρματος καὶ μέσῳ τοῦ ἀέρος.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς τοῦ μετάλλου (v) ἂν ἐντὸς τοῦ ἀέρος εἶναι v=333 m/sec.

Λύσις: Ἔστω t ὁ χρόνος τῆς διελεύσεως τοῦ ἤχου διὰ τοῦ σύρματος καὶ t_0 διὰ τοῦ ἀέρος. Ἔχομεν τότε προφανῶς τὰς σχέσεις

$$l = vt \qquad (1)$$

$$l = v_0 t_0 \qquad (2)$$

$$\theta = t - t_0 \qquad (3)$$

αἵτινες ἀποτελοῦν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους (v, t, t_0), ἐξ οὗ, λύοντες, εὑρίσκομεν τὸν ἄγνωστον v :

$$\boxed{v = 5000\ m/sec}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

501. Δίδεται ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἰς θερμοκρασίαν $t_0=0^oC$ ἴση μὲ $v_0=330,6$ m/sec.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ταχύτης του (v) ὅταν ἡ θερμοκρασία γίνῃ $t=30^oC$.

Λύσις: $v=348,45$ m/sec.

502. Δίδεται ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἰς θερμοκρασίαν $t_0=0^oC$ ἴση μὲ $v_0=330,6$ m/sec.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν θερμοκρασίαν (t) ἡ ταχύτης του θὰ εἶναι $v=336$ m/sec.

Λύσις: $t=8,95^oC$.

503. Ὁ ἦχος πυροδοτήσεως διανύει τὴν ἀπόστασιν (S) μεταξὺ τοῦ πυροβόλου καὶ παρατηρητοῦ τινος εἰς χρόνον $t=20$ sec, ἐντὸς ἀέρος θερμοκρασίας $\theta=22^oC$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις αὕτη (S) ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι $v_0=330,6$ m/sec ὑπὸ θερμοκρασίαν $\theta_0=0^oC$.

Λύσις: $S=6869,9$ m.

504. Ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα ὑπὸ θερμοκρασίαν τινα εἶναι $v_1=340$ m/sec.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ταχύτης του (v_2) ἐντὸς Ὑδρογόνου, ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν καὶ θερμοκρασίαν, ἂν ἡ σχετικὴ ὡς πρὸς τὸν ἀέρα πυκνότης τούτου εἶναι $d=0,069$.

Λύσις: $v_2=1297,7$ m/sec.

505. Βραχὺς ἦχος παραγόμενος ὑπὸ παρατηρητοῦ πρὸ ἑνὸς τοίχου γίνεται ἐκ δευτέρου ἀκουστὸς μετὰ παρέλευσιν χρόνου $t=1,5$ sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις (S) τοῦ τοίχου ἀπὸ τὸν παρατηρητήν, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $v=340$ m/sec.

Λύσις: $S=255$ m.

506. Δίδεται ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου ἐντὸς ὕδατος ἴση μὲ $v=1435$ m/sec.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος (λ) ἤχου διαδιδομένου διὰ τοῦ ὕδατος μὲ συχνότητα $N=40$ sec^{-1}.

Λύσις: $\lambda=35,875$ m.

507. Δίδεται σειρὴν τοῦ Seebeck, φέρουσα 24 ὀπὰς εἰς τὴν περιφέρειάν της καὶ περιστρεφομένη μὲ περίοδον $T=1/1104$ sec.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ συχνότης (N) τοῦ παραγομένου ἤχου.

Λύσις: $N=441,6\ sec^{-1}$.

508. Χαλκίνη χορδὴ τεινομένη διὰ δυνάμεως $F_1=20\ Kg^*$ πάλλεται μὲ συχνότητα $N_1=920\ sec^{-1}$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ συχνότης (N_2) τῆς χορδῆς ὅταν ἡ τείνουσα δύναμις γίνῃ $F_2=25\ Kg^*$.

Λύσις: $N_2=1016,83\ sec^{-1}$.

509. Δίδεται μεταλλικὴ χορδὴ πυκνότητος $d=7,8\ gr/cm^3$, μήκους $l=1$ m καὶ διαμέτρου $\delta=1$ mm.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ συχνότης (N) τοῦ παραγομένου ὑπὸ ταύτης θεμελιώδους ἤχου, ὅταν ἡ τείνουσα δύναμις εἶναι $F=42,54\ Kg^*$.

Λύσις: $N=130,5\ sec^{-1}$.

510. Ἡ ἐντὸς τοῦ ὕδατος ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι $v=1461$ m/sec (εἰς θερμοκρασίαν $t=20^oC$ περίπου).

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μέτρον ἐλαστικότητος τοῦ ὕδατος (E) ἂν ἡ πυκνότης του εἶναι $d=1\ gr/cm^3$.

Λύσις: $E=2,134.10^{10}\ dynes/cm^2$.

511. Ἀτμόπλοιον μήκους $l=120$ m ταξειδύει εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης, ὁπότε ὁ ἦχος τῆς ἕλικος συλλαμβάνεται εἰς τὴν πρώρην (ὑπὸ καταλλήλου δέκτου) ὡσὰν νὰ προέρχεται ἀπὸ διεύθυνσιν σχηματίζουσαν γωνίαν $\varphi=45^o$ μὲ τὸν ὁρίζοντα.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ βάθος τῆς θαλάσσης (x) μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ταχύτητος τοῦ πλοίου.

Λύσις: $x=60$ m.

512. Μεταλλικὴ χορδή, τεινομένη μεταξὺ δύο ἄκρων καὶ παλλομένη, παράγει ἦχον συχνότητος περιλαμβανομένης μεταξὺ $N_1=256\ sec^{-1}$ καὶ $N_2=320\ sec^{-1}$, ὁπότε φαίνεται ἀκινητοῦσα ὅταν φωτίζεται μὲ συχνότητα λάμψεων $n=90\ sec^{-1}$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ συχνότης (N) τῆς χορδῆς.

Λύσις: $N=270$ ἢ $315\ sec^{-1}$.

513. Δίδεται μεταλλικὴ χορδὴ παράγουσα ἦχον συχνότητος $N=270\ sec^{-1}$, μήκους $l=50$ cm καὶ γραμμικῆς πυκνότητος $\delta=0,00098$ gr/cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μᾶζα (M) τῆς τεινούσης δυνάμεως, ἂν ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος εἶναι $g=9,8\ m/sec^2$.

Λύσις: $M=729$ gr.

514. Δίδεται λεπτὴ σιδηρᾶ χορδὴ μήκους $l=50$ cm, τομῆς $\sigma=0,5\ mm^2$, πυκνότητος $d=7,7\ gr/cm^3$, τεινομένη ἀπὸ τὸ ἓν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἄκρον διὰ δυνάμεως (F) καὶ στερεωμένη κατὰ τὸ ἄλλον ἄκρον.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τείνουσα δύναμις (F), ὥστε ὁ θεμελιώδης παραγόμενος ἦχος νὰ εἶναι mi, (N_3=327 sec^{-1}).

Λύσις: F=41,965 Kg*.

515. Δίδεται θεμελιώδης ἦχος συχνότητος N_0=175,56 sec^{-1}.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος (λ) τοῦ τρίτου ἁρμονικοῦ του εἰς τὸν ἀέρα, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἶναι v=334,4 m/sec.

Λύσις: λ=0,476 m.

516. Δύο ὅμοιοι ἀνοικτοὶ ἠχητικοὶ σωλῆνες περιέχουν, ὑπὸ τὴν αὐτὴν πίεσιν, ὁ μὲν εἷς ἀέρα εἰς θερμοκρασίαν t_0=0°C ὁ δ' ἕτερος ἀέρα εἰς θερμοκρασίαν t_1=28°C.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ διάστημα (N_1/N_0) τῶν δύο ἤχων, ἂν ὁ συντελεστὴς διαστολῆς τῶν ἀερίων εἶναι α=1/273 grad^{-1}.

Λύσις: N_1/N_0=1,05.

517. Δύο ἦχοι, συχνότητος ἀντιστοίχως N_1=261 sec^{-1} καὶ N_2=274 sec^{-1}, παράγονται ταυτοχρόνως ὑπὸ δύο ἠχητικῶν σωλήνων.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ συχνότης (n) τῶν προκυπτόντων διακροτημάτων.

Λύσις: n=13 sec^{-1}.

518. Δίδεται ἦχος μήκους κύματος, εἰς τὸν ἀέρα, λ=20 m διαδιδόμενος ὑπὸ ταχύτητα v=340 m/sec.

Ζητεῖται: Πόση εἶναι ἡ ὑπὸ ἑκάστου quantum ἤχου μεταφερομένη ἐνέργεια (E), ἂν ἡ σταθερὰ τοῦ Planck ἔχῃ τιμὴν h=6,6.10^{-27} erg . sec.

Λύσις: E=112,2.10^{-27} erg.

519. Ἠχητικὴ πηγή, παράγουσα ἦχον συχνότητος N_1=800 sec^{-1} ἀπομακρύνεται παρατηρητοῦ μὲ ταχύτητα μετατοπίσεως u=65 m/sec.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ συχνότης (N_2) ὑπὸ τὴν ὁποίαν θ' ἀντιλαμβάνεται τὸν ἦχον ὁ παρατηρητής, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι v=335 m/sec.

Λύσις: N_2=670 sec^{-1}.

520. Ἦχος συχνότητος N ἀκούεται ὑπὸ παρατηρητοῦ μὲ συχνότητα N′ εἴτε οὗτος πλησιάζει πρὸς τὴν πηγὴν μὲ ταχύτητα u εἴτε ἡ πηγὴ πρὸς τὸν παρατηρητὴν μὲ τὴν αὐτὴν ταχύτητα.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ταχύτης αὕτη (u) ἂν ἡ ταχύτης τοῦ ἤχου εἰς τὸν ἀέρα εἶναι v.

Λύσις: u=0, N′=N.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

VI. ΟΠΤΙΚΗ

521. Δίδεται ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτὸς $c = 3.10^{10}$ cgs.
Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ μῆκος κύματος (λ) φωτεινῆς ἀκτινοβολίας συχνότητος $N = 450.10^{12}\ sec^{-1}$.
Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\lambda = \frac{c}{N}$$

ἔχομεν :

$$\lambda = \frac{3.10^{10}}{450.10^{12}} \frac{cm.\,sec^{-1}}{sec^{-1}}$$

$$\boxed{\lambda = 6{,}6.10^{-5}\ cm}$$

522. Δίδεται τὸ μῆκος κύματος φωτεινῆς ἀκτινοβολίας ἴσον μὲ $\lambda = 3600$ Å καὶ ἡ τιμὴ τῆς σταθερᾶς τοῦ Planck ἴση μὲ $h = 6{,}6.10^{-27}$ erg . sec.
Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μᾶζα (m) ἑκάστου φωτονίου τῆς ἀκτινοβολίας ταύτης, ἂν ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι $c = 3.10^{10}$ cm/sec.
Λύσις: Ἐκ τῶν τύπων

$$m = \frac{hN}{c^2}$$

καὶ

$$N = c/\lambda$$

ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν πρῶτον τὴν τιμὴν τοῦ N ἐκ τοῦ δευτέρου εὑρίσκομεν :

$$m = \frac{h}{c\lambda}$$

$$m = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-27}}{3.10^{10}.3600} \frac{erg\,.\,sec}{cm\,.\,sec^{-1}.\text{Å}}$$

$$m = \frac{6{,}6.10^{-27}}{3.10^{10}.36.10^{2}.10^{-8}} \frac{erg\,.\,sec}{cm\,.\,sec^{-1}\,.\,cm}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$m = \frac{6,6.10^{-27}}{3.36.10^{4}} \quad \frac{gr . cm^2 . sec^{-2} . sec}{cm . sec^{-1} . cm}$$

$$\boxed{m = 6,1.10^{-33} \ gr}$$

523. Διὰ νὰ φθάση τὸ φῶς ἀστέρος τινος εἰς τὴν Γῆν ἀπαιτεῖ χρόνον t=2 y (2 ἐτῶν).

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀστέρος (S) ἂν ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι $c=3.10^{10}$ cgs.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$S = ct$$

εὑρίσκομεν:

$$S = 3.10^{10}.2 \ \frac{cm . y}{sec}$$

$$S = 3.2.12.30.24.60.60.10^{10} \ \frac{cm . sec}{sec}$$

$$S = 3.2.12.3.24.6.6.10^{13} \ cm$$

$$S = \frac{3.2.12.3.24.6.6.10^{13}}{10^2.10^3} \ Km$$

$$\boxed{S = 186624.10^{6} \ Km}$$

524. Δίδεται δίσκος συσκευῆς τοῦ Fizeau ἀκτῖνος R=1 m, φέρων ἀριθμὸν ὀδόντων ν=300 εἰς τὴν περιφέρειάν του ὅστις χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν μέτρησιν τῆς ταχύτητος τοῦ φωτὸς ($c=3.10^{10}$ cm/sec) μεταξὺ δύο σταθμῶν ἀπεχόντων κατὰ ἀπόστασιν S=15,7 Km.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γραμμικὴ ταχύτης (v) τῆς περιφερείας τοῦ δίσκου.

Λύσις: Εἰς τὸν τύπον τοῦ Fizeau

$$c = 4SN\nu$$

ἀντικαθιστῶντες τὴν συχνότητα περιστροφῆς (N) διὰ τοῦ ἴσου της ἐκ τοῦ τύπου τῆς κυκλικῆς κινήσεως

$$v = 2\pi RN$$

ἔχομεν τὸν τύπον

$$c = \frac{4SNv}{2\pi R}$$

Λύοντες ἀκολούθως τοῦτον ὡς πρὸς v εὑρίσκομεν:

$$v = \frac{\pi Rc}{2S\nu}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε εἶναι :

$$v = \frac{3,14.1.3.10^{10}}{2.15,7.300} \quad \frac{m \,.\, cm \,.\, sec^{-1}}{Km}$$

$$\boxed{v = 100 \ m/sec}$$

525. Δίδεται φωτεινὴ πηγὴ ἰσχύος $I = 360$ HK.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ φωτεινὴ ροὴ (Φ) ἡ περιλαμβανομένη εἰς κῶνον στερεᾶς γωνίας $\varphi = 90^{\circ}$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου - ὁρισμοῦ τῆς φωτεινῆς ἰσχύος

$$I = \frac{\Phi}{\varphi}$$

θέτοντες τὴν γωνίαν φ εἰς ἀκτίνια (rad) εὑρίσκομεν

$$\Phi = I \,.\, \varphi$$

$$\Phi = 360 \,.\, \frac{6,28.90}{360} \ HK \,.\, rad$$

$$\Phi = 565,2 \ HK \,.\, rad$$

καὶ δεδομένου ὅτι 1 HK . rad = 1 Lumen, τελικῶς :

$$\boxed{\Phi = 565,2 \ Lumen}$$

526. Φωτεινὴ πηγὴ εὑρισκομένη ἀπὸ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἡμιδιαφανοῦς ὑάλου φωτίζει ταύτην μὲ φωτισμὸν $\varepsilon = 360$ Lux.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν (λ), ἀπὸ τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς ὑάλου, πρέπει νὰ τεθῇ ἑτέρα φωτεινὴ πηγὴ ἰσχύος $I = 1440$ HK, ὥστε οἱ φωτισμοὶ τῶν δύο ὄψεων τῆς ἐπιφανείας νὰ εἶναι ἴσοι.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\varepsilon = \frac{I}{\lambda^2}$$

λύοντες ὡς πρὸς λ ἔχομεν :

$$\lambda = \sqrt{\frac{I}{\varepsilon}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1440}{360}} \ \sqrt{\frac{HK}{Lux}}$$

$$\lambda = 2 \sqrt{\frac{HK}{Lux}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Δεδομένου ὅμως ὅτι 1 Lux = 1 HK/m², εὑρίσκομεν ἐν συνεχείᾳ :

$$\lambda = 2\sqrt{\frac{HK}{HK \, . \, m^{-2}}}$$

$$\boxed{\lambda = 2 \text{ m}}$$

527. Τετραγωνικὸν ἔλασμα λευκοπυρωμένου μετάλλου, πλευρᾶς d=2 cm ἐκπέμπει φῶς μὲ ἰσχὺν I=1484 HK.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ λαμπρότης (e) τῆς πηγῆς ταύτης.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$e = \frac{I}{S}$$

ἔχομεν :

$$e = \frac{I}{d^2}$$

$$e = \frac{1484}{4} \quad \frac{HK}{cm^2}$$

$$\boxed{e = 371 \text{ sb}}$$

528. Δίδονται δύο φωτειναὶ πηγαί, ἰσχύος ἀντιστοίχως I_1=100 HK καὶ I_2=8 HK ἀπέχουσαι μεταξύ των κατὰ ἀπόστασιν L=120 cm.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν μεταξὺ τῶν δύο πηγῶν πρέπει νὰ τεθῇ ἡμιδιαφανὴς ὕαλος, ὥστε αὕτη νὰ φωτίζεται ὑπὸ τῆς I_1 μὲ δεκαπλάσιον φωτισμὸν ἢ ὑπὸ τῆς I_2.

Λύσις: Ἔστω ὅτι ἡ ὕαλος πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἀπόστασιν **x** ἀπὸ τῆς I_1 καὶ (L—x) ἀπὸ τῆς I_2. Ὁ ὑπὸ τῆς I_1 παρεχόμενος φωτισμὸς θὰ εἶναι τότε :

$$\varepsilon_1 = \frac{I_1}{x_1^2} \qquad (1)$$

ὁ δὲ ὑπὸ τῆς I_2 :

$$\varepsilon_2 = \frac{I_2}{(L-x)^2} \qquad (2)$$

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως

$$\varepsilon_1 = 10\varepsilon_2 \qquad (3)$$

ἔχομεν, ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) :

$$\frac{I_1}{x^2} = \frac{10.I_2}{(L-x)^2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$(I_1 - 10\ I_2)\ x^2 - 2\ I_1 L x + I_1 L^2 = 0$$

ἤτοι

$$80x^2 - 24000x + 1440000 = 0$$

ὁπότε λύοντες τελικῶς ἔχομεν :

$$\boxed{x = 62{,}25\ \text{cm}}$$

529. Φωτεινὴ πηγή, ἀγνώστου ἰσχύος (I_1) πρέπει νὰ τεθῇ εἰς ἀπόστασιν $\lambda_1 = 50$ cm ἀπὸ τῆς ἡμιδιαφανοῦς πλακὸς φωτομέτρου, ὥστε νὰ δώσῃ τὸν αὐτὸν φωτισμὸν μὲ τὸν παρεχόμενον ὑπὸ ἑτέρας πηγῆς ἰσχύος $I_2 = 30{,}25$ HK εὑρισκομένης εἰς ἀπόστασιν $d = 5$ cm πέραν τῆς πηγῆς I_1.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς τῆς πηγῆς I_1.

Λύσις: Ἔστω λ_2 ἡ ἀπόστασις τῆς I_2 ἀπὸ τοῦ ὀργάνου, θὰ εἶναι προφανῶς :

$$\lambda_2 = \lambda_1 + d$$

Ὁ τύπος τότε τῶν φωτομέτρων γίνεται :

$$\frac{I_1}{\lambda_1^2} = \frac{I_2}{(\lambda_1 + d)^2}$$

ὁπότε εὑρίσκομεν :

$$I_1 = \frac{I_2 \lambda_1^2}{(\lambda_1 + d)^2}$$

$$\boxed{I_1 = 25\ \text{HK}}$$

530. Δίδονται δύο ἐπίπεδα κάτοπτρα ὑπὸ γωνίαν (φ) ὁπότε ἐξ ἑνὸς ἀντικειμένου σχηματίζονται συνολικῶς 9 εἴδωλα.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ γωνία (φ) τῶν δύο κατόπτρων.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$n = \frac{360}{\varphi} - 1$$

ὅπου n ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰδώλων καὶ φ ἡ γωνία εἰς μοίρας, ἔχομεν :

$$n\varphi = 360 - \varphi$$

ἤτοι :

$$\varphi = \frac{360}{n+1}$$

$$\boxed{\varphi = 36^0}$$

531. Κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος εἶναι R=42 cm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν θέσιν (π) ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος πρέπει νὰ τεθῇ φωτεινὸν σημεῖον ὥστε τὸ εἴδωλόν του νὰ σχηματισθῇ εἰς ἀπόστασιν $\pi' = -\varepsilon/2$ ἀπὸ τῆς κορυφῆς (εἴδωλον φανταστικόν).

Λύσις: Ἐκ τῶν τύπων

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}$$

καὶ

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{R}$$

ἔχομεν τὸν σύνθετον τύπον:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}$$

εἰς τὸν ὁποῖον θέτοντες

$$\pi' = -\frac{\varepsilon}{2}$$

ἤτοι

$$\pi' = -\frac{R}{4}$$

εὑρίσκομεν:

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{R}$$

$$\pi = \frac{R}{6}$$

$$\boxed{\pi = 7 \text{ cm}}$$

532. Φωτεινὴ εὐθεία, μήκους $AB = 10$ cm τίθεται κάθετος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα κατόπτρου, ἀκτῖνος καμπυλότητος $R = 60$ cm.

Ζητεῖται: Εἰς ποίαν ἀπόστασιν (π) πρέπει νὰ εὑρίσκεται ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κατόπτρου ὥστε τὸ εἴδωλόν της νὰ ἔχῃ ὕψος $A'B' = 30$ cm καὶ νὰ εἶναι πραγματικόν.

Λύσις: Ἐκ τῶν δύο τύπων

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} \qquad (1)$$

καὶ

$$\frac{AB}{\pi} = \frac{A'B'}{\pi'} \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

θέτοντες εἰς τὴν (1) τὴν τιμὴν τοῦ π′ ἐκ τῆς (2) ἔχομεν κατ᾽ ἀρχήν :

$$\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{\pi}+\frac{AB}{A'B'.\pi}$$

Ἐν συνεχείᾳ, θέτοντες ὅπου ε τὸ ἴσον του (ε=R/2), ἔχομεν:

$$\frac{2}{R}=\frac{1}{\pi}+\frac{AB}{A'B'.\pi}$$

ὁπότε λύοντες ὡς πρὸς π εὑρίσκομεν :

$$\pi=\frac{R\,(A'B'+AB)}{2\,.\,A'B'} \qquad (3)$$

$$\pi=\frac{60\,(30+10)}{2\,.\,30}\ \text{cm}$$

$$\boxed{\pi=40\ \text{cm}}$$

533. Δίδονται τὰ αὐτὰ στοιχεῖα ὡς εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν, πλὴν ὅμως τὸ εἴδωλον A′B′ εἶναι φανταστικόν.

Ζητεῖται : Ἡ ἀπόστασις π.

Λύσις : Λαμβάνοντες τὸν τύπον (3) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως θέτομεν

$$A'B'=-30$$

καθ᾽ ὅσον ἕκαστον φανταστικὸν στοιχεῖον κατόπτρου παριστάνεται δι᾽ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

Εὑρίσκομεν τότε :

$$\boxed{\pi=20\ \text{cm}}$$

534. Δίδεται κάτοπτρον κοῖλον ἰσχύος f=5 διοπτριῶν καὶ τίθεται πρὸ αὐτοῦ φωτεινὴ εὐθεῖα μήκους A=7 cm κάθετος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, εἰς ἀπόστασιν π=10 cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς.

Ζητεῖται : Εἰς ποίαν ἀπόστασιν (π′) ἀπὸ τῆς κορυφῆς θὰ εὑρίσκεται τὸ εἴδωλόν της καὶ ποῖον θὰ εἶναι τὸ μέγεθός του (Ε).

Λύσις : Ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\varepsilon}=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}$$

ἔχομεν

$$f=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi'}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\pi' = \frac{\pi}{f\pi - 1}$$

$$\pi' = \frac{10}{5.10 - 1} \quad \frac{cm}{\frac{cm}{m} - 1}$$

$$\pi' = \frac{10}{\frac{5.10}{100} - 1} \quad \frac{cm}{\frac{cm}{cm} - 1}$$

$$\boxed{\pi' = -20\ cm}$$

ἄρα τὸ εἴδωλον θὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν 20 cm ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου (φανταστικόν).

Ἐν συνεχείᾳ, διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγέθους (Ε) ἔχομεν :

$$\frac{A}{\pi} = \frac{E}{\pi'}$$

$$E = \frac{A\pi'}{\pi}$$

$$E = \frac{7\,(-20)}{10} \quad \frac{cm\,.\,cm}{cm}$$

$$\boxed{E = -14\ cm}$$

ἐπιβεβαιομένης τῆς φανταστικότητος τοῦ εἰδώλου διὰ τοῦ ἀρνητικοῦ σημείου τοῦ μεγέθους του.

535. Διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου, φωτεινὸν ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν $\pi = 75$ cm δίδει εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν $\pi' = 120$ cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ κατόπτρου (ε).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}$$

λύοντες ὡς πρὸς ε ἔχομεν :

$$\varepsilon = \frac{\pi\,.\,\pi'}{\pi + \pi'}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$\varepsilon = \frac{75.120}{75+120} \quad \frac{cm \,.\, cm}{cm}$$

$$\boxed{\varepsilon = 46{,}15 \ cm}$$

536. Φωτεινὴ γραμμὴ κάθετος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα κοίλου κατόπτρου, ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varepsilon = 40$ cm, ἀπέχει τῆς κορυφῆς κατὰ $\pi = 60$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου (π΄) καὶ ποῖον τὸ μέγεθος τούτου (Ε) ἂν τὸ ἀντικείμενον ἔχῃ ὕψος $A = 4$ cm.

Λύσις: Ἀφ᾽ ἑνὸς ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}$$

λύοντες ὡς πρὸς π΄ καὶ ἀντικαθιστῶντες διὰ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν ἔχομεν :

$$\boxed{\pi' = 120 \ cm}$$

ἀφ᾽ ἑτέρου ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{A}{\pi} = \frac{E}{\pi'}$$

ἔχομεν :

$$E = \frac{A \,.\, \pi'}{\pi}$$

$$\boxed{E = 8 \ cm}$$

537. Εἰς ἀπόστασιν $\pi = 30$ cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς κυρτοῦ κατόπτρου τίθεται φωτεινὸν ἀντικείμενον παράλληλον πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, μήκους $A = 10$ cm.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου (Ε) ἂν ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις τοῦ φακοῦ εἶναι $\varepsilon = -20$ cm.

Λύσις: Διὰ τὰ παράλληλα πρὸς τὸν κύριον ἄξονα μεγέθη λαμβάνομεν κατ᾽ ἀρχὴν τὸν τύπον

$$\frac{A}{\pi^2} = \frac{E}{\pi'^2}$$

ὁπότε ἔχομεν :

$$E = \frac{A \,.\, \pi'^2}{\pi^2} \qquad (1)$$

Ἀφ᾽ ἑτέρου ὅμως ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi'}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὑρίσκομεν :

$$\pi' = \frac{-\pi \, . \, \varepsilon}{\pi - \varepsilon} \qquad (2)$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν τοῦ π΄ ἐκ τῆς (2) εἰς τὴν (1) ἔχομεν

$$E = \frac{A\left(\dfrac{-\pi\varepsilon}{\pi - \varepsilon}\right)^2}{\pi^2}$$

$$E = \frac{A \, . \, \varepsilon^2}{(\pi - \varepsilon)^2}$$

$$\boxed{E = 1{,}6 \text{ cm}}$$

538. Διὰ σφαιρικοῦ κατόπτρου ἀντικείμενον εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν $\pi = 30$ cm δίδει εἴδωλον φανταστικὸν εἰς ἀπόστασιν $\pi' = -12$ cm.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ ἂν τὸ κάτοπτρον εἶναι κοῖλον ἢ κυρτὸν καὶ ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις (ε).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}$$

ἔχομεν :

$$\varepsilon = \frac{\pi \, . \, \pi'}{\pi + \pi'}$$

$$\varepsilon = \frac{30\,(-12)}{30 - 12} \ \text{cm}$$

$$\boxed{\varepsilon = -20 \text{cm}}$$

Ἄρα τὸ κάτοπτρον εἶναι κυρτὸν ὡς ἐκ τῆς φανταστικῆς ἑστίας.

539. Φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτουσα ἐπὶ διόπτρου ὑπὸ γωνίαν $\pi = 20^\circ$ διαθλᾶται μὲ γωνίαν διαθλάσεως $\delta = 16^\circ$.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ δείκτης διαπλάσεως (n) τοῦ δευτέρου μέσου ὡς πρὸς τὸ πρῶτον.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$n = \frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἔχομεν :

$$n = \frac{\eta\mu 20^0}{\eta\mu 16^0}$$

$$n = \frac{0,34202}{0,27564}$$

$$\boxed{n = 1,24}$$

540. Ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς κοινῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι $n_1 = 1,6$, ὁ δὲ τοῦ ἀδάμαντος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα $n_2 = 2$.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ἀδάμαντος ὡς πρὸς τὴν ὕαλον (n_3).

Λύσις: Ἔστωσαν αἱ σχέσεις

$$n_1 = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta}$$

$$n_2 = \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\gamma}$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη ταύτας εὑρίσκομεν :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\beta}$$

ἢ

$$\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\gamma} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (1)$$

ἀλλ' ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι :

$$n_3 = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\gamma}$$

ἐξ αὐτοῦ ἔχομεν τότε

$$n_3 = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\boxed{n_3 = 1,23}$$

541. Δίδεται ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα $n = 1,54$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ὁρικὴ γωνία (ω) ἀκτῖνος ὁδευούσης ἐντὸς τῆς ὑάλου καὶ προσπιπτούσης ἐπὶ τοῦ διόπτρου ὑάλου-ἀέρος, ὡς καὶ ποία ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς (c') ἐντὸς τῆς ὑάλου, ἂν ἐντὸς τοῦ ἀέρος αὕτη εἶναι $c = 3.10^{10}$ cm/sec.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\eta\mu\omega = \frac{1}{n}$$

ἔχομεν

$$\eta\mu\omega = \frac{1}{1,54}$$

$$\boxed{\omega = 40^\circ 30'}$$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ταχύτητος c′ ἔχομεν:

$$n = \frac{c}{c'}$$

ὁπότε

$$c' = \frac{c}{n}$$

$$c' = \frac{3.10^{10}}{1,54}\ \frac{cm}{sec}$$

$$\boxed{c' = 1,9.10^{10}\ cm/sec}$$

542. Δίδεται πρῖσμα διαθλαστικῆς γωνίας $A = 30^\circ$.

Ζητεῖται: Ἂν ἐπ᾽ αὐτοῦ προσπίπτη ἀκτὶς ὑπὸ γωνίαν $\pi = 42^\circ$, ποία θὰ εἶναι ἡ γωνία ἀναδύσεως ταύτης (π'), ἂν ἡ γωνία ἐκτροπῆς εἶναι $E = 50^\circ$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$E = \pi + \pi' - A$$

ἔχομεν:

$$\pi' = E + A - \pi$$

$$\pi' = 50 + 30 - 42$$

$$\boxed{\pi' = 38^\circ}$$

543. Φωτεινὴ ἀκτὶς μονοχρόου φωτὸς προσπίπτει ἐπὶ πλακιδίου, πάχους d=20 cm, ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως $\pi = 45^\circ$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ παράλληλος μετατόπισις (λ) τῆς ἀκτῖνος ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως εἶναι $n = 1,6$.

Λύσις: Κατὰ τὴν εἴσοδον τῆς ἀκτῖνος εἰς τὸ πλακίδιον ἔχομεν γωνίαν διαθλάσεως (δ) εὑρισκομένην ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta} = n$$

ὁπότε:

$$\eta\mu\delta = \frac{\eta\mu\pi}{n} \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἂν καλέσωμεν l τὴν διαδρομὴν τῆς ἀκτῖνος ἐντὸς τοῦ πλακιδίου ἔχομεν ἐν συνεχείᾳ τὰς σχέσεις :

$$\lambda = l \,.\, \eta\mu\,(\pi - \delta) \qquad (2)$$

$$d = l \,.\, \sigma\upsilon\nu\delta \qquad (3)$$

ὁπότε θέτοντες τὴν τιμὴν τοῦ l ἐκ τῆς (3) εἰς τὴν (2) εὑρίσκομεν :

$$\lambda = \frac{d \,.\, \eta\mu\,(\pi - \delta)}{\sigma\upsilon\nu\delta} \qquad (4)$$

ὁπότε εὑρίσκοντες τὴν δ ἐκ τῆς (1) ἔχομεν, ἐκ τῆς (4), κατὰ προσέγγισιν :

$$\boxed{\lambda = 7{,}6 \text{ cm}}$$

544. Ἀμφίκυρτος φακός, ἀποτελούμενος ἐξ ὑλικοῦ δείκτου διαθλάσεως $n=1{,}7$ ἔχει ἐπιφανείας ἀκτῖνος καμπυλότητος ἀντιστοίχως $R_1=6$ m καὶ $R_2=8$ m.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ συγκεντρωτικὴ δύναμις (ἰσχὺς f) τοῦ φακοῦ τούτου.

Λύσις: Ἐκ τῶν δύο τύπων

$$f = \frac{1}{\varepsilon}$$

καὶ

$$\frac{1}{\varepsilon} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

ἔχομεν τὸν τύπον :

$$f = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$f = (1{,}7-1)\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)\ \frac{1}{m}$$

$$f = 0{,}204\ \frac{1}{m}$$

$$\boxed{f = 0{,}204 \text{ διοπτρ.}}$$

545. Ἐπιπεδόκυρτος φακὸς μὲ ἀκτῖνα καμπυλότητος $R=2{,}1$ m ἀποτελεῖται ἐξ ὑλικοῦ δείκτου διαθλάσεως $n=1{,}7$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις (ε) τοῦ φακοῦ τούτου.

Λύσις: Διὰ τοὺς ἐπιπεδοκύρτους φακοὺς ὁ γενικὸς τύπος

$$\frac{1}{\varepsilon} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λαμβάνει μορφὴν

$$\frac{1}{\varepsilon}=\frac{(n-1)}{R} \qquad (1)$$

καθ᾽ ὅσον λαμβανομένης τῆς ἐπιπέδου ἐπιφανείας μὲ $R_2=\infty$ ἔχομεν $1/R_2=0$.

Ἐκ τοῦ (1) εὑρίσκομεν τότε:

$$\varepsilon=\frac{R}{n-1}$$

$$\boxed{\varepsilon=3\ m}$$

546. Ἀμφικοίλου φακοῦ αἱ δύο ἀκτῖνες καμπυλότητος εἶναι ἀντιστοίχως $R_1=4$ m καὶ $R_2=8$m, ὁ δὲ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὑλικοῦ του εἶναι n=1,6.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις (ε).

Λύσις: Διὰ τοὺς ἀμφικοίλους φακούς, ὡς γενικῶς διὰ τοὺς ἀποκεντρωτικούς, πρέπει ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις (φανταστικὴ) νὰ εἶναι ἀρνητική, ὡς ἐκ τούτου εἰς τὸν τύπον

$$\frac{1}{\varepsilon}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) \qquad (1)$$

τοῦ (n—1) ὄντος πάντοτε θετικοῦ πρέπει νὰ εἶναι ἀρνητικὸν τὸ ὑπόλοιπον, ἤτοι:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}<0$$

ὁπότε ἂν εἶναι $R_2>R_1$ ὁ τύπος (1) δέον νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν

$$\frac{1}{\varepsilon}=(n-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν:

$$\varepsilon=\frac{R_1 . R_2}{(n-1)(R_1-R_2)}$$

$$\varepsilon=\frac{4 . 8}{(1{,}6-1)(4-8)}\ \frac{m . m}{m}$$

$$\boxed{\varepsilon=-13{,}33\ m}$$

547. Δίδεται πρῖσμα διαθλαστικῆς γωνίας $A=60^\circ$, ἀποτελούμενον ἐξ ὑλικοῦ δείκτου διαθλάσεως $n=\sqrt{2}$.

Ζητεῖται: Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν ἀκτὶς προσπίπτῃ ἐπ᾽ αὐτοῦ ὑπὸ γωνίαν $\pi=45^\circ$ τὸ πρῖσμα εὑρίσκεται εἰς τὴν Νευτώνειον θέσιν του.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἔστω ἀρχικῶς ἡ σχέσις

$$\frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta} = n$$

εὑρίσκομεν ἐκ ταύτης:

$$\eta\mu\delta = \frac{\eta\mu\pi}{n}$$

$$\eta\mu\delta = \frac{\eta\mu 45^{o}}{\sqrt{2}}$$

$$\eta\mu\delta = 0{,}5$$

$$\boxed{\delta = 30^{o}}$$

Ἀφ᾽ ἑτέρου ὅμως ἔχομεν τὴν γνωστὴν σχέσιν

$$A = \delta + \delta'$$

ἐξ ἧς προκύπτει:

$$\delta' = A - \delta$$

$$\delta' = 60^{o} - 30^{o}$$

$$\boxed{\delta' = 30^{o}}$$

ὁπότε, ἕνεκα τῆς ἰσότητος

$$\delta = \delta' = 30^{o}$$

ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα

$$\pi = \pi' = 45^{o}$$

ἤτοι τῆς Νευτωνείου θέσεως:

$$\boxed{\pi' = 45^{o}}$$

548. Εἰς ἀπόστασιν $\pi = 25$ cm ἀπὸ ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ τιθέμενον φωτεινὸν σημεῖον, ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος, δίδει πραγματικὸν εἴδωλον εἰς ἀπόστασιν $\pi' = 5$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας, ἂν τὸ ὑλικὸν τοῦ φακοῦ ἔχῃ δείκτην διαθλάσεως $n = 1{,}5$.

Λύσις: Ἐκ τῶν δύο θεμελιωδῶν τύπων τῶν φακῶν

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{(n-1)}{R} \qquad (1)$$

καὶ

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'} \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἴδωλον εἰς δύο θέσεις φακοῦ παρατιθεμένου μεταξὺ σημείου καὶ παραπετάσματος.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις (ε) τοῦ φακοῦ τούτου, ἂν αἱ δύο θέσεις ὑφ' ἃς φαίνεται εὐκρινῶς τὸ εἴδωλον ἐπὶ τοῦ παραπετάσματος ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ d=0,5 m.

Λύσις: Ἔστω π ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν θέσιν τοῦ κατόπτρου. Θὰ ἔχωμεν ἐξ αὐτοῦ προφανῶς τὴν σχέσιν:

$$\pi + \pi' = S \qquad (1)$$

Κατὰ τὴν δευτέραν θέσιν, μὴ μεταβληθείσης τῆς ἑστιακῆς ἀποστάσεως, δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς π' τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἀπὸ τὴν νέαν θέσιν τοῦ κατόπτρου, ὁπότε πλὴν τῆς σχέσεως (1) θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ:

$$\pi' - \pi = d \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), ἀποτελουσῶν σύστημα, εὑρίσκομεν τότε τὰς τιμὰς τῶν π καὶ π' συναρτήσει τῶν γνωστῶν S καὶ d, ὁπότε εἶναι:

$$\pi = \frac{S-d}{2} \qquad (3)$$

$$\pi' = \frac{S+d}{2} \qquad (4)$$

Τότε ἡ θεμελιώδης σχέσις

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}$$

ἐκ τῶν (3) καὶ (4) γίνεται:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{2}{S-d} + \frac{2}{S+d}$$

ὁπότε εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\varepsilon = \frac{(S+d)\,(S-d)}{4S}$$

$$\varepsilon = \frac{12{,}5.11{,}5}{4.12}\ \mathrm{m}$$

$$\boxed{\varepsilon = 2{,}99\ \mathrm{m}}$$

553. Ὑάλινον ἡμισφαίριον, ἀποτελούμενον ἐξ ὑλικοῦ δείκτου διαθλάσεως $n = \sqrt{\frac{3}{2}}$, δέχεται τὴν πρόσπτωσιν μονο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

χρόου ἀκτῖνος εἰς τὸ κέντρον τῆς ἐπιπέδου κυκλικῆς ἐπιφανείας του ὑπὸ γωνίαν $\alpha = 30^\circ$ μεταξὺ ἀκτῖνος καὶ ἐπιφανείας.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ γωνία ἐκτροπῆς (Ε) μεταξὺ τῆς εἰσερχομένης καὶ ἐξερχομένης ἀκτῖνος.

Λύσις: Ἡ μόνη ἐκτροπὴ θὰ λάβῃ προφανῶς χώραν κατὰ τὴν εἴσοδον τῆς ἀκτῖνος, διότι κατὰ τὴν ἔξοδόν της θὰ ὁδεύῃ καθέτως πρὸς τὸ δίοπτρον ὡς προερχομένη ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ἡμισφαιρίου.

Εἶναι ὅμως :

$$E = \pi - \delta$$

ὅπου προφανῶς

$$\pi = 90^\circ - \alpha$$

ὁπότε ἔχομεν :

$$E = 90^\circ - \alpha - \delta$$

$$E = 60^\circ - \delta \qquad (1)$$

εὑρίσκοντες τὴν δ ἐκ τῶν σχέσεων :

$$\frac{\text{ημ}\,(90^\circ - \alpha)}{\text{ημ}\delta} = n$$

$$\text{ημ}\delta = \frac{\text{ημ}\,(90^\circ - \alpha)}{n}$$

$$\text{ημ}\delta = \frac{\text{ημ}\,60^\circ}{\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{ημ}\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \delta = 45^\circ \qquad (2)$$

Τότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2), τελικῶς ἔχομεν :

$$E = 60^\circ - 45^\circ$$

$$\boxed{E = 15^\circ}$$

554. Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος συγκεντρωτικοῦ φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varepsilon = 50$ cm, εἰς ἀπόστασιν ἀπ᾽ αὐτοῦ $\pi = 25$ cm τίθεται φωτεινὸν σημεῖον. Αἱ ἐκ τούτου προερχόμεναι ἀκτῖνες, διερχόμεναι διὰ τοῦ φακοῦ, προσπίπτουν ἐπὶ ἐπιπέδου κατόπτρου, εὑρισκομένου πρὸς τὸ ἀντίθετον μέρος τοῦ φακοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν $d = 25$ cm ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ του κέντρου, μετὰ ταῦτα δὲ ἀνακλώμεναι διέρχονται ἐκ νέου διὰ τοῦ φακοῦ ὁπότε τελικῶς σχηματίζουν εἴδωλόν τι, εἰς ἀπόστασίν τινα (π_0) ἀπὸ τοῦ φακοῦ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις αὕτη (π_0) τοῦ εἰδώλου.

Λύσις: Ἔστω π' ἡ ἀπόστασις τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὸν φακὸν εἰδώλου, φανταστικοῦ καὶ πρὸς τὸ μέρος τοῦ π (καθ' ὅσον $\pi < \varepsilon$). Ἔχομεν τότε:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi'}$$

$$\pi' = -\frac{\pi\varepsilon}{\pi + \varepsilon}$$

ὁπότε τὸ εἴδωλον τοῦτο θ' ἀπέχῃ τοῦ κατόπτρου κατὰ ἀπόστασιν π_1 τιμῆς

$$\pi_1 = d + \pi'$$

$$\pi_1 = d - \frac{\pi\varepsilon}{\pi + \varepsilon}$$

καὶ θὰ σχηματίζῃ νέον εἴδωλον ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον κάτοπτρον εἰς ἀπόστασιν π_1 ἐντὸς αὐτοῦ, ἤτοι εἰς ἀπόστασιν π_2 ἀπὸ τοῦ φακοῦ, ὅπου εἶναι

$$\pi_2 = d + \pi_1$$

$$\pi_2 = d + d - \frac{\pi\varepsilon}{\pi + \varepsilon} \qquad (1)$$

Τὸ εἴδωλον τοῦτο θὰ παράγῃ τότε τελικὸν εἴδωλον ὡς πρὸς τὸν φακὸν εἰς ἀπόστασιν π_0 ὅπου εἶναι:

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\pi_2} + \frac{1}{\pi_0}$$

ἤτοι, ἐκ τῆς (1):

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{2d - \dfrac{\pi\varepsilon}{\pi + \varepsilon}} + \frac{1}{\pi_0}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} = \frac{(\pi + \varepsilon)}{2d\,(\pi + \varepsilon) - \pi\varepsilon} + \frac{1}{\pi_0}$$

$$\frac{1}{50} = \frac{(50 + 25)}{2.25\,(50 + 25) - 25.50} + \frac{1}{\pi_0}$$

$$\frac{1}{50} = \frac{3}{100} + \frac{1}{\pi_0}$$

$$\boxed{\pi_0 = -100 \text{ cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι θὰ εὕρωμεν εἴδωλον φανταστικὸν εἰς ἀπόστασιν π_0 ἀπὸ τοῦ φακοῦ.

555. Δίδονται δύο φακοί, ἰσχύος ἀντιστοίχως $f_1 = 5\ m^{-1}$ $f_2 = 10\ m^{-1}$ εὑρισκόμενοι μὲ συμπίπτοντα τὸν κύριον ἄξονά των.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ μεταξύ των ἀπόστασις (d) ὥστε δέσμη παράλληλος, εἰσερχομένη διὰ τοῦ ἑνὸς φακοῦ, νὰ ἐξέρχεται τοῦ δευτέρου πάλιν παράλληλος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα.

Λύσις: Διὰ νὰ πληροῦται ἡ ὡς ἄνω συνθήκη πρέπει νὰ εἶναι:

$$d = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad (1)$$

ὅπου ε_1 καὶ ε_2 αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις τῶν δύο φακῶν, καὶ τοῦτο ἵνα ἡ ἑστία τοῦ ἑνὸς συμπίπτῃ μὲ τὴν τοῦ ἄλλου.

Ἀλλ' ἡ (1) γράφεται:

$$d = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

ὁπότε

$$d = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}\,m$$

$$\boxed{d = 0{,}3\ m}$$

556. Δίδεται μικροσκόπιον ἀποτελούμενον ἐκ δύο φακῶν, ἑστιακῆς ἀποστάσεως ἀντιστοίχως $\varepsilon_1 = 5$ cm καὶ $\varepsilon_2 = 0{,}5$ cm, ἀπεχόντων μεταξύ των κατὰ $\lambda = 10$ cm.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ μεγέθυνσις (μ_0) διὰ φυσιολογικὸν ὀφθαλμὸν (ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως $\alpha_0 = 25$ cm) καὶ πόση (μ_1) διὰ μύωπα (ἀπόστασις εὐκρ. ὁράσεως $\alpha_1 = 12{,}5$ cm).

Λύσις: Λαμβάνομεν τὸν τύπον τῆς μεγεθύνσεως τοῦ συνθέτου μικροσκοπίου:

$$\mu = \frac{\lambda \cdot \alpha}{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}$$

εἰς ὃν θέτοντες τὰς τιμὰς τῶν ε_1, ε_2 κλπ. καὶ τῶν α_0 ἀφ' ἑνὸς καὶ α_1 ἀφ' ἑτέρου ἔχομεν τελικῶς:

$$\boxed{\begin{aligned} \mu_0 &= 100 \\ \mu_1 &= 50 \end{aligned}}$$

557. Μονόχρους φωτεινὴ δέσμη προσπίπτει ἐπὶ ὑαλίνης πλακός, δρώσης ὡς κατόπτρου.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως (π), ὥστε ἡ ἀνακλωμένη ἀκτὶς νὰ εἶναι ὁλικῶς εὐθυγράμμως πεπο-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λωμένη, ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι $n = 1,75$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Brewster, δι' ὁλικὴν πόλωσιν ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi\pi = n$$

ὁπότε

$$\varepsilon\varphi\pi = 1,75$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\pi = \lambda o\gamma\, 1,75$$

$$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\pi = 0,24304$$

$$\boxed{\pi = 60^\circ 15' 20''}$$

558. Φωτεινὴ δέσμη μονοχρόου φωτός, ἀποτελουμένη ἀπὸ φωτόνια κυανᾶ, κήκους μύματος $\lambda = 4310\ \mathring{A}$, προσπίπτουσα ἐπὶ εἰδικοῦ κωλύματος ὑφίσταται ἀπώλειαν ἐνεργείας, ὥστε ἑκάστου φωτονίου ἡ συνολικὴ ἐνέργεια νὰ ἐλαττοῦται κατὰ τὸ 1/20.

Ζητεῖται: Νὰ εὑρεθῇ ἂν ἡ ἐξ ἀνακλάσεως ἀκτινοβολία εἶναι ὁρατὴ ἢ ὄχι, καὶ ἂν ναὶ ποῖον εἶναι τότε τὸ χρῶμα καὶ τὸ μῆκος κύματός της (λ').

Λύσις: Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος ἀρκεῖ ἡ εὕρεσις τῆς τιμῆς τοῦ λ'. Πρὸς τοῦτο ἔστω E ἡ ἐνέργεια ἑκάστου ἀρχικοῦ κυανοῦ φωτονίου, αὕτη θὰ εἶναι προφανῶς:

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda} \qquad (1)$$

ὅπου h ἡ σταθερὰ τοῦ Planck καὶ c ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτός. Ἔστω προσέτι E′ ἡ ἐνέργεια ἑκάστου νέου φωτονίου:

$$E' = \frac{h \cdot c}{\lambda'} \qquad (2)$$

Δεδομένης ὅμως τῆς σχέσεως

$Q = cV$

$$E' = \frac{19 \cdot E}{20} \qquad c = \frac{Q}{V} = \qquad (3)$$

ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν:

$$\frac{hc}{\lambda'} = \frac{19hc}{20\lambda}$$

ὁπότε εἶναι:

$$\lambda' = \frac{20\lambda}{19}$$

$$\boxed{\lambda' = 4536,8\ \mathring{A}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἄρα ἡ ἀκτινοβολία θὰ ἐξακολουθῇ νὰ εἶναι κυανῆ (ὡς περιλαμβανομένη μεταξὺ 4100—4900 Å) ἀλλὰ μεγαλυτέρου μήκους κύματος τείνουσα πρὸς τὸ πράσινον.

559. Φωτεινὸν ἀντικείμενον κάθετον πρὸς τὸν κύριον ἄξονα ἐπιπεδοκύρτου φακοῦ ἀπέχει ἐκ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τούτου κατὰ $\pi = 36$ cm, ἐκπέμπει δὲ φῶς σύνθετον ἐξ ἀκτινοβολίας H (μὲ δείκτην διαθλάσεως $n_H = 1,343$) καὶ ἄλλης ἀκτινοβολίας C (μὲ δείκτην διαθλάσεως $n_c = 1,331$).

Ζητεῖται: Πόσον (x) ἀπέχουν μεταξύ των τὰ δύο εἴδωλα χρώματος H καὶ C, ἂν ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ φακοῦ εἶναι $R = 8$ cm.

Λύσις: Ἔστωσαν E_H καὶ E_c αἱ δύο κύριαι ἑστίαι διὰ τὰ χρώματα H καὶ C ἀντιστοίχως. Θὰ εἶναι προφανῶς:

$$\frac{1}{E_H} = \frac{(n_H - 1)}{R} \qquad (1)$$

καὶ

$$\frac{1}{E_c} = \frac{(n_c - 1)}{R} \qquad (2)$$

τὰ δὲ εἴδωλα, διὰ τὰ δύο χρώματα, θὰ εὑρίσκωνται εἰς ἀποστάσεις ἀντιστοίχως π_H' καὶ π_c', ὁπότε αἱ σχέσεις

$$\frac{1}{E_H} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi_H'}$$

καὶ

$$\frac{1}{E_c} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi_c'}$$

ἐκ τῶν (1) καὶ (2) γίνονται ἀντιστοίχως:

$$\frac{(n_H - 1)}{R} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi_H'} \qquad (3)$$

καὶ

$$\frac{(n_c - 1)}{R} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi_c'} \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) δυνάμεθα ἐν συνεχείᾳ εὐκόλως νὰ εὕρωμεν τὴν ζητουμένην διαφορὰν $x = \pi_c' - \pi_H'$, ἥτις θὰ εἶναι:

$$x = \frac{R \cdot \pi}{(n_c - 1)\pi - R} - \frac{R \cdot \pi}{(n_H - 1)\pi - R}$$

$$\boxed{x = 7,3 \text{ cm}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

560. Ἐπὶ πρίσματος διαθλαστικῆς γωνίας $A=45°$ προσπίπτει δέσμη λευκοῦ φωτὸς ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως $\pi=25°$.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ἄνοιγμα (φ) τῆς ἐξερχομένης ἐγχρώμου δέσμης, ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως διὰ μὲν τὸ ἐρυθρὸν εἶναι $n_1=1{,}61$ διὰ δὲ τὸ ἰῶδες $n_2=1{,}7$.

Λύσις: Ἔστω E_1 ἡ ἐκτροπὴ τοῦ ἐρυθροῦ καὶ E_2 ἡ τοῦ ἰώδους φωτός. Ἡ πρώτη ἐκ τούτων προκύπτουσα σχέσις εἶναι:

$$\varphi = E_2 - E_1 \qquad (1)$$

ἀλλὰ ἡ E_1 εἶναι:

$$E_1 = \pi + \pi_1 - A \qquad (2)$$

ἡ δὲ E_2:

$$E_2 = \pi + \pi_2 - A \qquad (3)$$

ὁπότε ἡ φ θὰ εἶναι, ὡς ἐκ τῆς (1):

$$\varphi = \pi_2 - \pi_1 \qquad (4)$$

ὅπου π_1 καὶ π_2 αἱ γωνίαι ἐξόδου τῶν δύο ἀκτινοβολιῶν. Τὰς γωνίας ὅμως ταύτας δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν συστημάτων

$$\frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta_1} = n_1 \qquad (5,\alpha)$$

$$A - \delta_1 = \delta_1' \qquad (5,\beta)$$

$$\frac{\eta\mu\delta_1}{\eta\mu\delta_1'} = n_1 \qquad (5,\gamma)$$

καὶ

$$\frac{\eta\mu\pi}{\eta\mu\delta_2} = n_2 \qquad (6,\alpha)$$

$$A - \delta_2 = \delta_2' \qquad (6,\beta)$$

$$\frac{\eta\mu\pi_2}{\eta\mu\delta_2'} = n_2 \qquad (6,\gamma)$$

ὁπότε εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\boxed{\varphi = 6°45'}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

561. Δίδεται κοῖλον σφαιρικὸν κάτοπτρον, ἀκτῖνος καμπυλότητος $R=60$ cm.

Ζητεῖται: Πόση εἶναι ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις (ε) καὶ πόση ἡ ἰσχύς του (f).

Λύσις: $\varepsilon=30$ cm, $f=3{,}33\ m^{-1}$ (διοπτρίαι).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

562. Δίδεται ἀμφίκυρτος φακός, δείκτου διαθλάσεως $n=1,5$ καὶ ἀκτίνων καμπυλότητος $R_1=18$ cm καὶ $R_2=15$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακή του ἀπόστασις (ε).

Λύσις: $\varepsilon=16,3$ cm.

563. Δίδεται φακός, ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varepsilon=30$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἰσχύς του (f).

Λύσις: $f=3,33$ m^{-1}.

564. Εἰς ἀπόστασιν $\pi=60$ cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς κοίλου κατόπτρου τίθεται φωτεινὸν σημεῖον.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἀπόστασις (π') τοῦ εἰδώλου του, ἂν ἡ ἀκτὶς καμπυλότητος τοῦ κατόπτρου εἶναι $R=40$ cm.

Λύσις: $\pi'=30$ cm.

565. Φωτεινὸν σημεῖον τιθέμενον εἰς ἀπόστασιν $\pi=20$ cm ἀπὸ τῆς κορυφῆς σφαιρικοῦ κατόπτρου δίδει εἴδωλον φανταστικὸν εἰς ἀπόστασιν $\pi'=95$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις (ε) τοῦ κατόπτρου καὶ ποῖον τὸ εἶδος τούτου.

Λύσις: $\varepsilon = -25,3$ cm (κάτοπτρον κυρτὸν ὡς ἐκ τῆς ὑπάρξεως φανταστικῆς κυρίας ἑστίας).

566. Δίδεται σύστημα ἐκ δύο φακῶν, ἐχόντων τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα, ἐξ ὧν ὁ μὲν εἷς ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν $\varepsilon_1=10$ cm, ὁ δ' ἕτερος (ἀποκλίνων) ἑστιακὴν ἀπόστασιν $\varepsilon_2 = -30$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις (ε) καὶ ποία ἡ ἰσχὺς (f) τοῦ συστήματος.

Λύσις: $\varepsilon=45$ cm, $f=2,22$ m^{-1} (διοπτρίαι).

567. Ὑψηλοῦ πύργου ἡ σκία ἔχει μῆκος $l=42$ m, ἐνῶ παρακειμένης κατακορύφου ράβδου, ὕψους $h_1=1$ m, τὸ μῆκος εἶναι $l_1=60$ cm.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ πύργου (h).

Λύσις: $h=70$ m.

568. Δίδεται ὁ δείκτης διαθλάσεως ὑάλου ὡς πρὸς τὸν ἀέρα ἴσος μὲ $n=\sqrt{2}$.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὁρικῆς γωνίας ἀκτῖνος ὁδευούσης ἀπὸ τῆς ὑάλου εἰς τὸν ἀέρα.

Λύσις: $\omega=45^\circ$.

569. Πρὸ συγκλίνοντος φακοῦ, ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varepsilon=80$ cm, τίθεται φωτεινὴ ράβδος, ὕψους $A=5$ cm εἰς ἀπόστασιν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

π=12 cm ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου, κάθετος πρὸς τὸν κύριον ἄξονα.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου (π′) καὶ ποῖον τὸ ὕψος τούτου (Ε).

Λύσις: π′=24 cm, Ε=10 cm.

570. Πρεσβύωπος ἡ ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως εἶναι α=60 cm.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς τοῦ φακοῦ (f), ὅστις δέον νὰ χρησιμοποιηθῇ ὥστε ἡ ἀπόστασις τῆς εὐκρινοῦς ὁράσεως λάβῃ τιμὴν α′=30 cm.

Λύσις: f=1,64 m^{-1} (διοπτρίαι).

571. Δίδεται ἡ περιφέρεια τῆς Γῆς Π=40000 Km καὶ ἡ ἀπόστασις Ἡλίου - Γῆς d=23240 R (ὅπου R ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς).

Ζητεῖται: Πόσον χρόνον (t) ἀπαιτεῖ τὸ φῶς διὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τοῦ Ἡλίου εἰς τὴν Γῆν, ἂν ἡ ταχύτης διαδόσεως τοῦ φωτὸς εἶναι c=3.10^{10} cgs.

Λύσις: t=8 min 13 sec.

572. Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος κοίλου σφαιρικοῦ κατόπτρου τιθέμενον φωτεινὸν σημεῖον, εἰς ἀπόστασιν σ=20 cm ἀπὸ τῆς κυρίας ἑστίας, σχηματίζει εἴδωλον φανταστικὸν εἰς ἀπόστασιν σ′=100 cm ἀπὸ τῆς αὐτῆς ἑστίας.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις (ε) τοῦ κατόπτρου τούτου.

Λύσις: ε=44,7 cm.

573. Φωτεινὴ ἀκτὶς μονοχρόου φωτὸς εἰσερχομένη ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως π=45° ἐντὸς πρίσματος, ἀποτελουμένου ἐξ ὑάλου δείκτου διαθλάσεως n=$\sqrt{2}$, ἐξέρχεται τούτου παράλληλος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ διαθλαστικὴ γωνία (Α) τοῦ πρίσματος.

Λύσις: Α=75°.

574. Ἐπίπεδον κάτοπτρον, δεχόμενον τὴν πρόσπτωσιν μονοχρόου φωτεινῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας του, στρέφεται κατὰ φ=22° μὲ ἄξονα κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἀνακλάσεως καὶ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου προσπτώσεως.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον (θ) θὰ στραφῇ ἡ ἀνακλωμένη ἀκτίς.

Λύσις: θ=44°, ἤτοι γενικῶς θ=2φ.

575. Φωτεινὴ ἀκτὶς μονόχρους προσπίπτει ὑπὸ γωνίαν ω ἐπὶ πλακὸς διαφανοῦς, μὲ παραλλήλους ἕδρας, πάχους d καὶ δείκτου διαθλάσεως n.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις (x) μεταξὺ τῆς εἰσερχομένης καὶ τῆς ἐξερχομένης τῆς πλακὸς ἀκτῖνος, συναρτήσει τῶν ὡς ἄνω στοιχείων.

Λύσις: $x = d\left(ημω - \frac{συνω \,.\, ημω}{\sqrt{n^2 - ημ^2ω}}\right)$

576. Φωτεινὴ εὐθεῖα, μήκους $l = 15,5$ cm, τιθεμένη καθέτως πρὸς τὸν κύριον ἄξονα φακοῦ εἰς ἀπόστασιν $π = 5$ cm ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ του κέντρου σχηματίζει εἴδωλον φανταστικὸν μήκους $l' = 62$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις (ε) καὶ τὸ εἶδος τοῦ φακοῦ.

Λύσις: $ε = 6,66$ cm (φακὸς συγκλίνων).

577. Δίδεται ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις συγκεντρωτικοῦ φακοῦ $ε = 5$ cm καὶ ἡ ἀπόστασις εὐκρινοῦς ὁράσεως δι᾿ ἐμμέτρωπα καὶ μύωπα ὀφθαλμὸν ἀντιστοίχως $α_1 = 30$ cm καὶ $α_2 = 12,5$ cm.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν μεγεθύνσεων δι᾿ ὀφθαλμὸν ἐμμέτρωπα καὶ μύωπα (M_1/M_2).

Λύσις: $M_1/M_2 = 2$.

578. Φωτεινὸν ἀντικείμενον, ὕψους $h = 5$ m παρατηρεῖται δι᾿ ἀστρονομικῆς διόπτρας φερούσης ἀντικειμενικὸν φακὸν ἑστιακῆς ἀποστάσεως $ε_1 = 1$ m καὶ προσοφθάλμιον ἑστ. ἀποστάσεως $ε_2 = 2$ cm.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν δύο φακῶν εἶναι $d = 1,8$ m καὶ ἡ τοῦ ἀντικειμένου ἀπὸ τοῦ ἀντικειμενικοῦ $S = 500$ m, ποία θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ εἰδώλου ἀπὸ τοῦ προσοφθαλμίου (α) καὶ ποῖον τὸ μέγεθος τοῦ τελικοῦ εἰδώλου (E).

Λύσις: $α = -18$ cm, $E = 10$ cm.

579. Φωτεινὴ ἀκτίς, ὁδεύουσα ἐντὸς θειούχου ἄνθρακος καὶ προσπίπτουσα ἐπὶ διόπτρου θειούχου ἄνθρακος—ἀέρος δὲν ἐξέρχεται τοῦ ὑγροῦ ἂν ἡ γωνία προσπτώσεως εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 37° καὶ $54'$.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ δείκτης διαθλάσεως (n) τοῦ θειούχου ἄνθρακος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα.

Λύσις: $n = 1,628$.

580. Μονόχρους φωτεινὴ ἀκτὶς προσπίπτει ἐπὶ τῆς μιᾶς ἕδρας πρίσματος, διαθλαστικῆς γωνίας $A = 60^\circ$ καὶ δείκτου διαθλάσεως $n = 1,5$, ὑπὸ γωνίαν προσπτώσεως $π = 30^\circ$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ γωνία ($π'$) τῆς ἐξόδου τῆς φωτεινῆς ἀκτῖνος.

Λύσις: $π' = 13^\circ$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

581. Φωτεινὸν ἀντικείμενον τίθεται ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονος εἰς ἀπόστασιν $\pi=20$ cm ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου συγκλίνοντος φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varepsilon=10$ cm. Δεύτερος φακός, ἀποκλίνων, ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varepsilon'=-30$ cm τίθεται μὲ κοινὸν κύριον ἄξονα εἰς ἀπόστασιν $d=30$ cm ἀπὸ τοῦ πρώτου φακοῦ.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις (π') τοῦ σχηματιζομένου τελικοῦ εἰδώλου.

Λύσις: $\pi'=-7{,}5$ cm.

582. Πρεσβύωψ ὀφθαλμὸς δύναται νὰ βλέπῃ εὐκρινῶς μόνον εἰς ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀποστάσεως εὐκρινοῦς ὁράσεως, ἥτις εἶναι $\alpha=25$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς (f) τῶν ἀπαιτουμένων φακῶν.

Λύσις: $f=4$ m^{-1} (διοπτρίαι).

583. Λεπτὴ φωτεινὴ ἀκτὶς λευκοῦ φωτὸς διέρχεται συμμετρικῶς δι' ἑνὸς πρίσματος ἐκ θειούχου ἄνθρακος, διαθλαστικῆς γωνίας $A=60^\circ$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐκτροπὴ (E_D) διὰ τὸ κίτρινον χρῶμα D καὶ ποία ἡ γωνία (φ) μεταξὺ τῶν ἀκτίνων χρώματος C καὶ F, ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως διὰ τὰ χρώματα ταῦτα εἶναι ἀντιστοίχως $n_D=1{,}6276$, $n_C=1{,}6182$ καὶ $n_F=1{,}6523$.

Λύσις: $E_D=48^\circ 56'$, $\varphi=3^\circ 25'$.

584. Ἀκτὶς λευκοῦ φωτὸς προσπίπτει πλαγίως ἐπὶ λείας ὑδατίνης ἐπιφανείας.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως (π) ὥστε τὸ κίτρινον χρῶμα D νὰ εἶναι, μετὰ τὴν ἀνάκλασιν πεπολωμένον κατὰ τὸ μέγιστον, ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος διὰ τὸ χρῶμα D εἶναι $n_D=1{,}334$.

Λύσις: $\pi=53^\circ 7'$.

585. Πεπολωμένη ἀκτὶς κιτρίνου χρώματος D εἰσέρχεται ἐντὸς σακχαρούχου διαλύματος 10 % καὶ ὁδεύει ἐντὸς αὐτοῦ κατὰ μῆκός τι $\lambda=20$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ γωνία στροφῆς (α) τῆς πεπολωμένης ἀκτῖνος, ἂν ἡ εἰδικὴ στροφικὴ ἱκανότης τοῦ σακχάρου διὰ τὸ χρῶμα D εἶναι $[\alpha]=66^\circ 49'$.

Λύσις: $\alpha=13^\circ 30'$.

586. Κοῖλον κάτοπτρον ἔχει ἑστιακὴν ἀπόστασιν $\varepsilon=25$ cm Ἐπὶ τοῦ κυρίου ἄξονός του καὶ εἰς ἀπόστασιν $\pi=15$ cm τίθεται φωτεινὴ γραμμὴ ὕψους $A=10$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις (π') καὶ τὸ μέγεθος τοῦ εἰδώλου (E).

Λύσις: $\pi'=-9{,}4$ cm, $E=6{,}3$ cm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

587. Δίδεται ἡ φαινομένη διάμετρος τοῦ Ἡλίου $d = 32'$.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ διάμετρος (d') τοῦ εἰδώλου του κατὰ τὴν χρησιμοποίησιν κοίλου φακοῦ ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varepsilon = 15$ m.

Λύσις: $d' = 14$ cm.

588. Στρῶμα αἰθέρος πάχους $d_1 = 2$ cm ἐπιπλέει ὑδατίνου στρώματος πάχους $d_2 = 3$ cm.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ φαινομενικὸν βάθος τοῦ πυθμένος (x) τοῦ περιέχοντος τὰ ὑγρὰ δοχείου, ἂν οἱ ἀπόλυτοι δεῖκται διαθλάσεως διὰ τὸν αἰθέρα καὶ τὸ ὕδωρ εἶναι ἀντιστοίχως $n_1 = 1,36$ καὶ $n_2 = 1,33$.

Λύσις: $x = 3,72$ cm.

589. Φωτεινὸν ἀντικείμενον ὁρώμενον διὰ μέσου ἑνὸς ὑαλίνου κύβου κατὰ μίαν διεύθυνσιν $\vartheta = 60^\circ$ μὲ τὴν μίαν ἐκ τῶν ἑδρῶν του φαίνεται πλαγίως μετατοπισμένον κατ' ἀπόστασιν $d = 5,29$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ πλευρὰ (α) τοῦ κύβου, ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως τῆς ὑάλου εἶναι $n = 1,55$.

Λύσις: $\alpha = 10$ cm.

590. Συγκλίνων φακός, ἀποτελούμενος ἐξ ὑλικοῦ δείκτου διαθλάσεως $n_1 = 1,54$, ἔχει εἰς τὸν ἀέρα ἑστιακὴν ἀπόστασιν $\varepsilon_1 = 40$ cm.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις (ε_2) τοῦ αὐτοῦ φακοῦ ἐντὸς ὕδατος, ἂν ὁ δείκτης διαθλάσεως τοῦ ὕδατος ὡς πρὸς τὸν ἀέρα εἶναι $n_2 = 1,33$.

Λύσις: $\varepsilon_2 = 136,8$ cm.

591. Ἐπιπεδόκυρτος φακός, ἀκτῖνος καμπυλότητος $R = 20,9$ cm, ἀποτελούμενος ἐξ ὑάλου δείκτου διαθλάσεως $n_1 = 1,55$ ὡς πρὸς τὸν ἀέρα, ἐμβαπτίζεται ἐντὸς ὕδατος (δείκτου διαθλάσεως $n_2 = 1,33$ ὡς πρὸς τὸν ἀέρα).

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἑστιακὴ ἀπόστασις (ε) τοῦ φακοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος.

Λύσις: $\varepsilon = 127$ cm.

592. Δίδεται σύστημα ἀποτελούμενον ἐκ δύο φακῶν συγκλινόντων ἑστιακῆς ἀποστάσεως ἀντιστοίχως $\varepsilon_1 = 20$ cm καὶ $\varepsilon_2 = 30$ cm, εὑρισκομένων οὕτως ὥστε νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ θέσις (π) καὶ τὸ ὕψος (Α) φωτεινοῦ ἀντικειμένου καθέτου πρὸς τὸν κύριον ἄξονα, ἂν τὸ εἴδω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

λόν του ἔχῃ ὕψος $E=0,333$ cm καὶ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν $\pi'=10$ cm πέραν τοῦ δευτέρου φακοῦ.

Λύσις : $A=2$ cm, $\pi=100$ cm (πρὸ τοῦ πρώτου φακοῦ).

593. Δίδεται ἐπιπεδόκυρτος φακὸς μὲ ἀκτῖνα καμπυλότητος $R=25$ cm.

Ζητεῖται : Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ ἑστιακαὶ ἀποστάσεις (ε_1 καὶ ε_2) διὰ τὸ ἐρυθρὸν καὶ ἰῶδες χρῶμα, ἂν οἱ δεῖκται διαθλάσεως διὰ τὰ χρώματα ταῦτα εἶναι ἀντιστοίχως $n_1=1,5$ καὶ $n_2=1,6$, ὡς καὶ ποῖαι θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις (d) τῶν δύο εἰδώλων φωτεινοῦ σημείου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν $\pi=30$ cm ἀπὸ τοῦ ὀπτικοῦ κέντρου τοῦ φακοῦ.

Λύσις : $\varepsilon_1=41,66$ cm, $\varepsilon_2=50$ cm, $d=32,14$ cm.

594. Φωτεινὴ πηγὴ τίθεται εἰς ἀπόστασιν $\pi=10$ cm πρὸ κοίλου κατόπτρου ἑστιακῆς ἀποστάσεως $\varepsilon=20$ cm καὶ εἰς ἀπόστασιν $d=100$ cm ἀπὸ παραπετάσματος.

Ζητεῖται : Ἂν ἡ πηγὴ μόνη της φωτίζῃ τὸ παραπέτασμα διὰ φωτισμοῦ φ, ποῖος θὰ εἶναι ὁ φωτισμὸς (φ΄) τοῦ παραπετάσματος ὅταν τοῦτο δέχεται καὶ τὸ ὑπὸ τοῦ κατόπτρου ἀποστελλόμενον φῶς, ὑποτιθεμένου ὅτι τὸ κάτοπτρον θεωρεῖται τέλειον ἀπὸ ἀπόψεως ἀνακλάσεως.

Λύσις : $\varphi'=3,37\varphi$.

595. Ὁ φωτισμὸς μιᾶς λείας ἐπιφανείας ὁ ὀφειλόμενος εἰς πανσέληνον εὑρισκομένην εἰς τὸ Ζενὶθ εἶναι $\varphi=0,014$ Lumen/ft^2 (1 ft=1 feet=1 ποῦς=30 cm).

Ζητεῖται : Εἰς ποίαν ἀπόστασιν (x) ἀπὸ ἐπιφανείας πρέπει νὰ τεθῇ ἠλεκτρικὴ λυχνία ἰσχύος $I=500$ HK, ὥστε ὁ προκαλούμενος φωτισμὸς νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν τῆς πανσελήνου.

Λύσις : $x=56,7$ m.

596. Φάσμα ἀστέρος, ὁρώμενον διὰ φασματοσκοπίου ἀκριβείας, παρουσιάζει, διὰ τὴν γραμμὴν F τοῦ Ὑδρογόνου (μήκους κύματος $\lambda=4861$ Å) μετατόπισιν $d=0,1$ Å πρὸς τὸ ἰῶδες.

Ζητεῖται : Ποία εἶναι, συμφώνως πρὸς τὸν νόμον Doppler-Fizeau, ἡ ταχύτης κινήσεως τοῦ ἀστέρος (v) ἂν ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι $c=3.10^{10}$ cgs.

Λύσις : $v=6,2$ Km/sec (πρὸς τὴν Γῆν).

597. Φωτεινὴ πηγὴ ἀνάπτει καὶ σβύνει μὲ σταθερὰν συχνότητα λάμψεων $N=435$ sec^{-1}, παρατηρεῖται δὲ μέσῳ ἐπιπέδου περιστρεφομένου κατόπτρου εὑρισκομένου εἰς ἀπόστασιν τοιαύτην ὥστε τὸ κέντρον περιστροφῆς του ν' ἀπέχῃ κατὰ $d=100$ cm ἀπὸ τῆς πηγῆς.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις (x) δύο διαδοχικῶν εἰδώλων τῆς πηγῆς, ἂν τὸ κάνοπτρον στρέφεται μὲ περίοδον T=0,2 sec.

Λύσις: x=14,4 cm.

598. Δίδεται σύστημα ἐκ δύο κατόπτρων ἐχόντων τὸν αὐτὸν κύριον ἄξονα. Τούτων τὸ μὲν ἓν εἶναι κυρτὸν τὸ δ' ἕτερον κοῖλον μὲ ἀκτῖνα καμπυλότητος ἔχουσαν τὴν αὐτὴν ἀπόλυτον τιμὴν R=2 m, τίθενται δὲ ταῦτα μὲ τὰς ἀνακλώσας ἐπιφανείας ἔναντι ἀλλήλων καὶ εἰς ἀπόστασιν d=2,5 m μεταξὺ τῶν κορυφῶν των.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσον θ' ἀπέχουν (x) τὰ δύο εἴδωλα, ἅτινα σχηματίζονται ὑπὸ φωτεινοῦ σημείου εὑρισκομένου μεταξὺ τῶν δύο κατόπτρων καὶ εἰς ἀπόστασιν π=1,5 m ἀπὸ τοῦ κοίλου, κατὰ περιπτώσεις πρώτης ἀνακλάσεως ἐπὶ τοῦ κοίλου καὶ δευτέρας ἐπὶ τοῦ κυρτοῦ καὶ ἀντιστρόφως.

Λύσις: x=50 cm.

599. Φασματικὴ γραμμὴ ἀστέρος ἔχει μῆκος κύματος λ=4300 Å.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ φαινόμενον μῆκος κύματος (λ') τῆς γραμμῆς ταύτης, ἂν ὁ ἀστὴρ ἀπομακρύνεται τῆς Γῆς μὲ ταχύτητα u=500 Km/sec.

Λύσις: λ'=4307 Å.

600. Δίδεται φωτεινὴ ἀκτινοβολία μήκους κύματος

$$\lambda = 5000\ \text{Å}.$$

Ζητεῖται: Πόση εἶναι ἡ φαινομένη μᾶζα (m) ἑκάστου φωτονίου τῆς ἀκτινοβολίας ταύτης, ἂν ἡ σταθερὰ τοῦ Planck ἔχῃ τιμὴν $h = 6{,}6.10^{-27}$ cgs.

Λύσις: $m = 4{,}4.10^{-33}$ gr.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

VII. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

ΣΤΑΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

601. Δύο ἀντίθετα ἠλεκτρικὰ φορτία ἀντιστοίχως $Q_1 = 98$ ΗΣΜ ποσ. καὶ $Q_2 = -135$ ΗΣΜ ποσ. ἀπέχουν μεταξύ των κατὰ ἀπόστασιν $R = 7$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν φορτίων ἐμφανιζομένη δύναμις (F) ἕλξεως.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ Coulomb

$$F = K \frac{Q_1 . Q_2}{R^2}$$

ἔχομεν :

$$F = \frac{98\,(-135)}{7^2} \frac{\left(gr^{\frac{1}{2}} . cm^{\frac{3}{2}} . sec^{-1}\right)^2}{cm^2}$$

$$F = -270 \; gr . cm . sec^{-2}$$

$$\boxed{F = -270 \text{ dynes}}$$

Τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον δεικνύει τὴν ἐμφάνισιν ἕλξεως.

602. Δύο ὅμοια ὁμόσημα ἠλεκτρικὰ φορτία (Q) ἀπέχοντα κατ' ἀπόστασιν $R = 100000$ m ἀπωθοῦνται διὰ δυνάμεως $F = 9810$ Kg*.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ ἑκάστου φορτίου (Q).

Λύσις: Λύοντες τὸν τύπον τοῦ Coulomb ὡς πρὸς τὸ Q (ὅπου $Q_1 = Q_2 = Q$) ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$Q = R \sqrt{F}$$

ὁπότε εὑρίσκομεν :

$$Q = 10^5 \sqrt{981.10} \; m \sqrt{Kg^*}$$

$$Q = 10^5 . 10^2 \sqrt{981.10.10^3.981} \; cm \sqrt{dynes}$$

$$Q = 981.10^9 \text{ ΗΣΜ ποσ.}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$Q = \frac{981.10^9}{3.10^9} \text{ Coulomb}$$

$$\boxed{Q = 327 \text{ Coulomb}}$$

603. Ἠλεκτρικὴ ποσότης $Q_1 = 400$ ΗΣΜ ποσ. εὑρίσκεται συγκεντρωμένη εἰς ἓν σημεῖον. Εἰς ἀπόστασιν $R = 10$ m ἀπὸ τούτου τίθεται μικρὸν σιδηροῦν σφαιρίδιον, φέρον ἠλεκτρικὴν ποσότητα $Q_2 = 3600$ ΗΣΜ ποσ. καὶ ἔχον μᾶζαν $m = 1{,}44$ gr.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ στιγμιαία ἐπιτάχυνσις (γ) τοῦ σφαιριδίου m εἰς τὴν ὡς ἄνω θέσιν.

Λύσις: Ἔστω F ἡ δύναμις ἣν ὑφίσταται τὸ σφαιρίδιον. Αὕτη προφανῶς θὰ εἶναι :

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \qquad (1)$$

ὁπότε ἡ ζητουμένη ἐπιτάχυνσις

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

ἐκ τῆς (1) θὰ εἶναι :

$$\gamma = \frac{Q_1 . Q_2}{mR^2}$$

ἤτοι :

$$\gamma = \frac{400.3600}{1{,}44.10^2} \; \frac{\text{ΗΣΜπ. ΗΣΜπ}}{\text{gr. m}^2}$$

$$\gamma = \frac{400.3600}{1{,}44.10^2.10^4} \; \frac{\text{ΗΣΜπ. ΗΣΜπ}}{\text{gr.cm}^2}$$

$$\gamma = \frac{4.36.10^4}{1{,}44.10^6} \; \frac{\text{dynes}}{\text{gr}}$$

$$\boxed{\gamma = 1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}}$$

604. Δύο σφαιρικοὶ ἀγωγοί, ἀκτίνων ἀντιστοίχως $r_1 = 3$ m καὶ $r_2 = 2$ m ἀπέχουν ἀλλήλων κατὰ $R = 20$ m (ἀπόστασις τῶν κέντρων των), φέρουν δὲ ἕκαστος ἠλεκτρικὰ φορτία ὑπὸ δυναμικὸν ἀντιστοίχως $V_1 = 40$ Volt καὶ $V_2 = 25$ ΗΣΜ δυν.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐμφανιζομένη μεταξὺ τῶν ἀγωγῶν τούτων δύναμις (F).

Λύσις: Τὰ φορτία ἑκάστου ἀγωγοῦ (Q_1 καὶ Q_2) θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$Q_1 = V_1 . r_1 \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ

$$Q_2 = V_2 . r_2 \qquad (2)$$

ὁπότε ἡ ἐμφανιζομένη μεταξὺ τούτων δύναμις

$$F = \frac{Q_1 . Q_2}{R^2}$$

θὰ εἶναι, ὡς ἐκ τῶν τιμῶν τῶν Q_1 καὶ Q_2 ἐκ τῶν (1) καὶ (2) :

$$F = \frac{V_1 . r_1 . V_2 . r_2}{R^2}$$

$$F = \frac{40.3.25.2}{20^2} \quad \frac{\text{Volt} . \text{m} . \text{ΗΣΜδ}. \text{m}}{\text{m}^2}$$

$$F = \frac{2.3.4.25.10}{4.10^2} \text{ Volt} . \text{ΗΣΜδ}$$

$$F = \frac{2.3.4.25.10}{3.4.10^4} \text{ ΗΣΜδ. ΗΣΜδ}$$

$$F = \frac{50}{10^3} (\text{ΗΣΜδ})^2$$

$$F = 0{,}05 \left(\text{gr}^{\frac{1}{2}} . \text{cm}^{\frac{3}{2}} . \text{sec}^{-1} \right)^2$$

$$F = 0{,}05 \text{ gr} . \text{cm} . \text{sec}^{-2}$$

$$\boxed{F \; 0{,}05 \text{ dynes}}$$

605. Δίδεται ἀγωγὸς χωρητικότητος C_1=1200 μF φορτισμένος διὰ ποσότητος Q_1=4.10⁷ ΗΣΜπ.

Ζητεῖται: Ποῖον δυναμικὸν (V) θὰ λάβῃ ὁ ἀγωγὸς οὗτος ἂν ἔλθῃ εἰς ἐπαφὴν μὲ ἕτερον ἀγωγὸν δυναμικοῦ V_2=360 Volt καὶ χωρητικότητος C_2=3000 μF.

Λύσις: Κατὰ τὴν ἐπαφὴν τῶν ἀγωγῶν τὸ κοινὸν δυναμικόν των (V) θὰ εἶναι :

$$V = \frac{Q}{C} \qquad (1)$$

ὅπου εἶναι Q ἡ συνολικὴ ποσότης τῶν δύο ἀγωγῶν καὶ C τὸ ἄθροισμα τῶν χωρητικοτήτων των.

Ὡς ἐκ τούτου ὁ (1) δύναται νὰ γραφῇ

$$V = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐπειδὴ

$$Q_2 = V_2 . C_2$$

ὁ τύπος (2) τελικῶς γίνεται :

$$V = \frac{Q_1 + V_2 . C_2}{C_1 + C_2}$$

$$V = \frac{4.10^7 + 360.3000}{1200 + 3000} \quad \frac{\text{Η}\Sigma\text{Μ}\pi + \text{Volt. }\mu\text{F}}{\mu\text{F}}$$

$$V = \frac{4.10^7 . 3^{-1} . 10^{-9} + 360.3000}{4200} \quad \frac{\text{Coul} + \text{Volt. }\mu\text{F}}{\mu\text{F}}$$

$$V = \frac{\frac{4.10^7}{3.10^9} + 360.3000}{4200} \quad \frac{\text{Volt. }\mu\text{F} + \text{Volt. }\mu\text{F}}{\mu\text{F}}$$

$$V = \frac{10{,}13 + 1080000}{4200} \quad \frac{\mu\text{F . Volt}}{\mu\text{F}}$$

$$\boxed{V = 260{,}142 \text{ Volt}} \approx 260{,}2 \text{ V}$$

606 Ἀγωγὸς χωρητικότητος $C_1 = 150$ ΗΣΜχ, φέρων φορτίον $Q_1 = 365$ ΗΣΜπ φέρεται εἰς ἐπαφὴν διὰ σύρματος ἀμελητέας χωρητικότητος μὲ δεύτερον ἀγωγὸν χωρητικότητος $C_2 = 250$ ΗΣΜχ καὶ φορτισμένον διὰ ποσότητος $Q_2 = 435$ ΗΣΜπ.

Ζητεῖται : Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ ποσότητες (Q_1' καὶ Q_2') αἵτινες θὰ παραμείνουν ἐπὶ ἑκάστου ἀγωγοῦ μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν καὶ τὴν διακοπὴν τῆς ἐπαφῆς.

Λύσις : Μετὰ τὴν ἀποκατάστασιν τῆς ἐπαφῆς τὸ κοινὸν δυναμικὸν τῶν ἀγωγῶν θὰ εἶναι προφανῶς :

$$V = \frac{Q_1 + Q_2}{C_1 + C_2} \qquad (1)$$

Μετὰ τὴν διακοπὴν τῆς ἐπαφῆς, ὁ πρῶτος ἀγωγὸς παρουσιάζων δυναμικὸν V θὰ ἔχῃ ποσότητα Q_1' συμφώνως πρὸς τὸν τύπον

$$Q_1' = V . C_1$$

ἤτοι, ἐκ τῆς (1) :

$$Q_1' = \frac{(Q_1 + Q_2) C_1}{C_1 + C_2} \qquad (2)$$

Ὁμοίως, ὁ δεύτερος ἀγωγὸς θὰ φέρῃ ποσότητα

$$Q_2' = V . C_2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἤτοι, ἐκ τῆς (1):

$$Q_2' = \frac{(Q_1 + Q_2)\,C_2}{C_1 + C_2} \qquad (3)$$

Δι' ἀντικαταστάσεως τῶν οἰκείων τιμῶν εὑρίσκομεν τότε, ἐκ τῶν (2) καὶ (3) τὰς ζητουμένας ταύτας ποσότητας:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_1 &= 300 \text{ ΗΣΜπ.} \\ Q_2 &= 500 \text{ ΗΣΜπ.} \end{aligned}}$$

607 Πυκνωτὴς φέρων ἠλεκτρικὴν ποσότητα ὑπὸ δυναμικὸν $V=120$ volt ἐκφορτίζεται ἐντὸς θερμιδομέτρου, ὁπότε ἐμφανίζεται θερμότης $\Theta=14400$ cal.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ πυκνωτοῦ τούτου (C), ἂν θεωρηθῇ τὸ ὕδωρ κακὸς ἀγωγὸς τοῦ ἠλεκτρισμοῦ μὲ $K=1$.

Λύσις: Ἡ κατὰ τὴν ἐκφόρτισιν ἐμφανιζομένη θερμότης (Θ) πρέπει νὰ εἶναι ἀντίστοιχος πρὸς τὸ παραγόμενον κατὰ ταύτην ἔργον (W) ἴσον μὲ τὴν ἐνέργειαν τοῦ πυκνωτοῦ.

Εἶναι ὅμως:

$$W = \frac{CV^2}{2} \qquad (1)$$

ὁπότε, ἐκ τῆς σχέσεως

$$W = \eta\Theta$$

καὶ τῆς τιμῆς τοῦ W ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$\frac{CV^2}{2} = \eta\Theta$$

ἐξ οὗ εἶναι:

$$C = \frac{2\eta\Theta}{V^2}$$

$$C = \frac{2 \cdot 4{,}18 \cdot 14400}{120^2}\ \frac{\text{joules} \cdot \text{cal}}{\text{cal} \cdot \text{Volt} \cdot \text{Volt}}$$

$$C = 8{,}36\ \frac{\text{joules.}}{\text{Volt} \cdot \text{Volt}}$$

$$C = 8{,}36\ \frac{\text{Volt} \cdot \text{Coul}}{\text{Volt} \cdot \text{Volt}}$$

$$C = 8{,}36\ \frac{\text{Coul}}{\text{Volt}}\ (= \text{Farad})$$

$$\boxed{C = 8{,}36 \text{ Farad}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

608. Ἐντὸς ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου ὁμοιομόρφου, σταθερᾶς ἐντάσεως $H=0,3$ Kg*/Coul ἀφίεται μικρὸς σφαιρικὸς μετάλλινος ἀγωγός, μάζης $m=0,0036$ gr, ὅστις ἀπὸ τῆς ἠρεμίας τίθεται εἰς κίνησιν ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν μόνον τῶν ἠλεκτροστατικῶν δυνάμεων (αἰρομένου καταλλήλως τοῦ βάρους του), καθ' ὅσον φέρει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας του ποσότητα ἠλεκτρικὴν $Q=0,2$ Coul.

Ζητεῖται: Ποῖον θὰ εἶναι τὸ ἐντὸς τοῦ χρόνου $t=21$ sec παραγόμενον ἔργον (W).

Λύσις: Ὁ ἀγωγὸς τιθέμενος ἐντὸς τοῦ πεδίου θὰ δεχθῇ δύναμιν F τιμῆς

$$F = H \, . \, Q \tag{1}$$

ἐπιτάχυνσιν δὲ γ συμφώνως πρὸς τὸν τύπον

$$\gamma = \frac{F}{m}$$

ἥτις, ὡς ἐκ τῆς σχέσεως (1) γίνεται

$$\gamma = \frac{H \, . \, Q}{m} \tag{2}$$

Ὑπὸ τὴν ἐπίδρασιν τῆς ἐπιταχύνσεως ταύτης θὰ διανύσῃ, ἐντὸς χρόνου t, διάστημα

$$S = \frac{\gamma t^2}{2}$$

ἤτοι, ὡς ἐκ τῆς (2):

$$S = \frac{H \, . \, Q \, . \, t^2}{2m} \tag{3}$$

θὰ παράγῃ δὲ ἔργον

$$W = F \, . \, S$$

ὅπερ ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ F ἐκ τῆς (1) καὶ τοῦ S ἐκ τῆς (3) γίνεται τελικῶς:

$$W = \frac{(H \, . \, Q \, . \, t)^2}{2m}$$

$$W = \frac{(0,3.0,2.21)^2}{2.0,0036} \; \frac{Kg^{*2}. \, Coul^2. \, sec^2}{Coul^2. \, gr}$$

$$W = \frac{0,0036.21^2.981^2.10^6}{2.0,0036} \; \frac{dynes^2. \, sec^2}{gr}$$

$$W = \frac{21^2.981.10^6}{2} \, erg$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$W = \frac{21^2.981.10^6}{2.10^7} \text{ joules}$$

$$\boxed{W = 21631{,}05 \text{ joules}}$$

609. Ἐντὸς ὁμοιομόρφου ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου σταθερᾶς ἐντάσεως (H) τίθεται μικρὸς σφαιρικὸς ἀγωγὸς μάζης m=0,05 gr ὁπότε λαμβάνει ἐπιτάχυνσιν γ=20 cm/sec².

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης τοῦ ἀγωγοῦ (C), ἂν τὸ δυναμικόν του εἶναι V=0,04 ΗΣΜδ καὶ ἡ σταθερὰ ἔντασις τοῦ πεδίου H=25 cgs.

Λύσις: Ἡ ζητουμένη χωρητικότης (C) θὰ εἶναι προφανῶς

$$C = \frac{Q}{V} \tag{1}$$

ἡ ποσότης ὅμως Q θὰ εἶναι ἀφ᾽ ἑτέρου:

$$Q = \frac{F.}{H} \tag{2}$$

ὅπου εἶναι:

$$F = m \,.\, \gamma\,. \tag{3}$$

Ἐκ τῆς (3) ἡ (2) λαμβάνει τότε μορφὴν

$$Q = \frac{m \,.\, \gamma}{H}$$

ὁπότε ἐκ ταύτης ἡ (1) γίνεται:

$$C = \frac{m \,.\, \gamma}{H \,.\, V}$$

$$C = \frac{0{,}05.20}{25{,}0{,}04} \; \frac{gr \,.\, cm \,.\, \text{ΗΣΜπ}}{sec^2 . \, dynes \,.\, \text{ΗΣΜδ}}$$

$$C = \frac{0{,}05.20}{25.0{,}04} \; \frac{gr \,.\, cm \,.\left(gr^{\frac{1}{2}} . \, cm^{\frac{3}{2}} . \, sec^{-1}\right)}{sec^2 \,.\, dynes \,.\left(gr^{\frac{1}{2}} . \, cm^{\frac{1}{2}} \, sec^{-1}\right)}$$

$$C = \frac{0{,}05.20}{25.0{,}04} \text{ cm}$$

$$\boxed{C = 1 \text{ cm}}$$

Ἤτοι ἡ χωρητικότης τοῦ ἀγφγοῦ θὰ εἶναι C = 1 ΗΣΜ χωρητικότητος (cgs).

610. Τρεῖς πυκνωταὶ συνδέονται ἐν σειρᾷ. Τούτων οἱ δύο

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρῶτοι ἔχουν χωρητικότητα ἀντιστοίχως $C_1 = 20$ cm καὶ $C_2 = 30$ cm.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης (C_3) τοῦ τρίτου πυκνωτοῦ, ἵνα τὸ ὅλον σύστημα παρουσιάζῃ ἐνέργειαν $W = 120$ erg καὶ δυναμικὸν $V = 150$ ΗΣΜδ.

Λύσις: Ἔστω C ἡ χωρητικότης τοῦ ὅλου συστήματος. Αὕτη, ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

θὰ ἔχῃ τιμήν :

$$C = \frac{C_1C_2C_3}{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3} \qquad (1)$$

Τότε ὁ συνδέων τὴν ἐνέργειαν μὲ τὴν χωρητικότητα τοῦ πυκνωτοῦ τύπος

$$W = \frac{CV^2}{2}$$

λαμβάνει, ὡς ἐκ τῆς (1), μορφήν :

$$W = \frac{C_1C_2C_3V^2}{2\,(C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3)}$$

ὁπότε, λύοντες ὡς πρὸς C_3 ἔχομεν :

$$C_3 = \frac{2WC_1C_2}{C_1C_2V^2 - 2W\,(C_1 + C_2)}$$

$$C_3 = \frac{2.120.20.30}{20.30.50^2 - 2.120\,(20 + 30)}\ \text{cm}$$

$$\boxed{C_3 = 0{,}096\ \text{cm}}$$

611. Δίδονται 12 πυκνωταὶ χωρητικότητος ἑκάστου $c = 13{,}2\ \mu F$.

Ζητεῖται: Πῶς πρέπει οὗτοι νὰ συνδεθοῦν, ὥστε ἡ χωρητικότης τοῦ προκύπτοντος συνθέτου πυκνωτοῦ νὰ εἶναι $C = 1{,}1\ \mu F$.

Λύσις: Ἔστω ὅτι πρὸς ἐπίτευξιν συνθέτου πυκνωτοῦ χωρητικότητος C πρέπει νὰ γίνῃ ἡ σύνθεσις εἰς μ σειρὰς ἐκ ν πυκνωτῶν δι᾽ ἑκάστην :

Θὰ ἔχωμεν τότε τοὺς τύπους :

$$C = \frac{\mu . c}{\nu} \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ

$$N = \mu.\nu \qquad (2)$$

ὅπου N=12 (ὁ ἀριθμὸς τοῦ συνόλου τῶν πυκνωτῶν).

Λύοντες τότε τὸ σύστημα ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ὡς πρὸς τοὺς δύο ἀγνώστους (μ καὶ ν) εὑρίσκομεν:

$$\boxed{\begin{array}{c}\mu = 1\\ \nu = 12\end{array}}$$

Ἄρα ἡ σύνδεσις θὰ γίνῃ ἁπλῶς ἐν σειρᾷ.

612. Ἓν ἠλεκτρόνιον φορτίου $e = 4{,}7.10^{-10}$ ΗΣΜπ τιθέμενον ἐντὸς ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου ὁμοιομόρφου σταθερᾶς ἐντάσεως $H = 500$ cgs μετατοπίζεται κατὰ διάστημά τι $S=30$ cm παραλλήλως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς του.

Ζητεῖται: Πόσον ἔργον (W) θὰ παραχθῇ εἰς joules καὶ μὲ ποίαν μέσην ἰσχὺν (J εἰς watt) ἂν ὑποτεθῇ ὅτι τὸ ἠλεκτρόνιον κινεῖται μὲ σταθερὰν ταχύτητα $u = 60000$ Km/sec.

Λύσις: Ἡ ὑπὸ τοῦ πεδίου ἐπὶ τοῦ ἠλεκτρονίου ἀσκουμένη ἠλεκτροστατικὴ δύναμις (F) θὰ εἶναι:

$$F = e\,.\,H$$

τὸ δὲ ἔργον

$$W = e\,.\,H\,.\,S$$

$$W = 4{,}7.10^{-10}.500.30 \text{ erg}$$

$$\boxed{W = 7{,}07.10^{-13} \text{ joules}}$$

ὁπότε ἡ ἰσχὺς θὰ εἶναι

$$J = \frac{e\,.\,H\,.\,S}{t}$$

$$J = \frac{e\,.\,H\,.\,S\,.\,u}{S}$$

$$J = e\,.\,H\,.\,u$$

$$J = 4{,}7.10^{-10}.500.6.10^{9} \text{ erg/sec}$$

$$J = 4{,}7.5.6.10^{-10}.10^{2}.10^{9}.10^{-7} \text{ joules/sec}$$

$$J = 4{,}7.5.6.10^{-6} \text{ watt}$$

$$\boxed{J = 1{,}41.10^{-4} \text{ watt}}$$

613. Μικρὸν ἠλεκτρισμένον μεταλλικὸν σφαιρίδιον, μάζης m=0,3 gr καὶ φορτίου Q=0,56 ΗΣΜπ, ἐξαρτᾶται διὰ λεπτοῦ ἀβαροῦς νήματος μήκους l=100 cm ἀπὸ ἀκλονήτου σημείου καὶ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἀφίεται ἐντὸς ὁμοιομόρφου ἠλεκτροστατικοῦ ὁριζοντίου πεδίου ἐντάσεως σταθερᾶς $H=1500$ ΗΣΜ ἐντ.

Ζητεῖται: Πόση εἶναι ἡ κατὰ τὴν κατακόρυφον θέσιν τοῦ νήματος γωνιώδης ἐπιτάχυνσις (ω') τοῦ σφαιριδίου ἡ ὠφειλομένη εἰς τὴν ἠλεκτροστατικὴν ἕλξιν μόνον.

Λύσις: Ἡ γωνιώδης ἐπιτάχυνσις (ω') θὰ εἶναι προφανῶς:

$$\omega' = \frac{P}{K} \qquad (1)$$

ὅπου P ἡ ῥοπὴ ἣν ὑφίσταται τὸ σφαιρίδιον ὡς πρὸς τὸ ἀκλόνητον σημεῖον καὶ K ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας του.

Ἡ ῥοπὴ (P) εἶναι ὅμως:

$$P = F \cdot l$$

ἤτοι

$$P = H \cdot Q \cdot l \qquad (2)$$

ἡ δὲ ῥοπὴ ἀδρανείας K:

$$K = m \cdot l^2 \qquad (3)$$

ὁπότε ἀντικαθιστῶντες τὰς ἐκ τῶν (2) καὶ (3) τιμὰς τῶν P καὶ K εἰς τὴν (1) ἔχομεν:

$$\omega' = \frac{H \cdot Q \cdot l}{m \cdot l^2}$$

$$\omega' = \frac{H \cdot Q}{m \cdot l}$$

$$\omega' = \frac{1500 \cdot 0{,}56}{0{,}3 \cdot 100}\ \mathrm{sec}^{-2}$$

$$\boxed{\omega' = 28\ \mathrm{sec}^{-2}}$$

Ἤτοι ἡ γωνιώδης ἐπιτάχυνσις θὰ εἶναι 28 ἀκτινίων κατὰ τετραγωνικὸν δευτερόλεπτον.

614. Εἰς σημεῖόν τι ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου τὸ δυναμικὸν εἶναι $V_1=365000$ Volt, εἰς ἕτερον σημεῖον $V_2=266900$ Volt.

Ζητεῖται: Πόση ἠλεκτρικὴ ποσότης (Q) πρέπει νὰ μετατοπισθῇ ἐκ τοῦ ἑνὸς σημείου εἰς τὸ ἕτερον διὰ νὰ παραχθῇ ἔργον $W=1$ Kg*. m.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$W = Q \cdot V$$

ὅπου $V = V_1 - V_2$, ἔχομεν:

$$Q = \frac{W}{V_1 - V_2}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$Q = \frac{1}{365000 - 266900} \frac{Kg^*.m}{Volt}$$

$$Q = \frac{1}{98100} \frac{Kg^*.m}{Volt}$$

$$Q = \frac{981.10^{-2}}{98100} \frac{joules}{Volt}$$

$$Q = \frac{1}{10^4} \text{ Coulomb}$$

$$\boxed{Q = 0{,}0001 \text{ Coulomb}}$$

615. Δίδεται ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς ἴση περίπου μὲ R_1=6000 Km.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ μέση ἀκτὶς (R_0) ἑνὸς σφαιρικοῦ πυκνωτοῦ πάχους d=0,0015 mm μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν του, ὥστε οὗτος νὰ ἔχῃ τὴν αὐτὴν μὲ τὴν τῆς Γῆς ἠλεκτροχωρητικότητα, ἂν μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν του παρεντίθεται ἀὴρ (k=1).

Λύσις: Ἡ χωρητικότης τῆς Γῆς (C) λαμβανομένης ὡς σφαιρικοῦ σώματος εἶναι προφανῶς

$$C = R_1 \qquad (1)$$

ἡ τοῦ πυκνωτοῦ ἀντιστοίχως

$$C = k \frac{S}{4\pi d}$$

$$C = k \frac{4\pi R_0^2}{4\pi d}$$

$$C = k \frac{R_0^2}{d} \qquad (2)$$

ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$k \frac{R_0^2}{d} = R_1$$

καὶ

$$R_0 = \sqrt{\frac{R_1 . d}{k}}$$

$$R_0 = \sqrt{6.10^3.0{,}0015} \sqrt{Km . mm}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$R_0 = \sqrt{6.10^8.10^5.0{,}0015.10^{-1}}\ \sqrt{cm\,.\,cm}$$

$$R_0 = \sqrt{6.1{,}5.10^4}\ \sqrt{cm^2}$$

$$\boxed{R_0 = 3\ m}$$

616. Δύο ἠλεκτρικὰ φορτία, ἀντιστοίχως $Q_1 = 20$ ΗΣΜπ καὶ $Q_2 = -61$ ΗΣΜπ, συγκεντρωμένα εἰς ἓν σημεῖον ἕκαστον, ἀπέχουν ἀλλήλων κατὰ $S = 32$ cm.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου (Η) εἰς σημεῖόν τι Α ἀπέχον κατὰ $h = 15$ cm ἀπὸ τοῦ Q_2 καὶ εὑρισκομένου ἐπὶ εὐθείας Q_2A καθέτου πρὸς τὴν Q_1Q_2.

Λύσις: Ἡ ζητουμένη ἔντασις (Η) θὰ εἶναι συνισταμένη τῶν ἐπὶ μέρους ἐντάσεως H_1 καὶ H_2 τῶν ὀφειλομένων εἰς τὰ φορτία Q_1 καὶ Q_2.

Ἔχομεν ὡς ἐκ τούτου:

$$H_1 = \frac{Q_1 . q}{x^2} \qquad (1)$$

ὅπου q=1 καὶ x ἡ ἀπόστασις Q_1A

καί:
$$H_2 = \frac{Q_2 . q}{h^2} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως

$$x = \sqrt{S^2 + h^2}$$

ἡ (1) γίνεται τότε

$$H_1 = \frac{Q_1 . q}{S^2 + h^2} \qquad (1,\alpha)$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἂν καλέσωμεν φ τὴν γωνίαν ἥτις σχηματίζεται μεταξὺ διευθύνσεως Q_1A καὶ Q_1Q_2 τότε ἡ γωνία μεταξὺ τῶν H_1 καὶ H_2 θὰ εἶναι θ, τιμῆς

$$\theta = 90^0 + \varphi$$

καὶ ἡ συνισταμένη Η θὰ ἔχῃ τιμὴν

$$H = \sqrt{H_1^2 + H_2^2 + 2H_1H_2\,.\,\text{συν}\,(90^0 + \varphi)}$$

$$H = \sqrt{\frac{Q_1^2}{(S^2+h^2)^2} + \frac{Q_2^2}{h^4} + \frac{2\,Q_1Q_2\,.\,\text{συν}\,(90^0 + \varphi)}{h^2\,(S^2 + h^2)}}$$

ὅπου θὰ λαμβάνεται τὸ Q ὡς θετικόν, καθ' ὅσον ἤδη ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν τὸ ἀρνητικὸν σημεῖον εἰς τὸν καθορισμὸν τῆς σχέσεως μεταξὺ θ καὶ φ.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἀντικαθιστῶντες ἀκολούθως τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς εἰς τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\boxed{H = 0{,}264 \text{ cgs}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

617. Δίδονται δύο μικραὶ σφαῖραι, φορτισμέναι ἀντιστοίχως διὰ ποσότητος ἠλεκτρισμοῦ $Q_1 = 12$ ΗΣΜπ καὶ $Q_2 = -8$ ΗΣΜπ, ἀπέχουσαι κατὰ R=2 cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐμφανιζομένη μεταξὺ τούτων δύναμις ἕλξεως (F).

Λύσις: F=24 dynes.

618. Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων δύο σφαιρῶν εἶναι R, ἡ δὲ ἀκτὶς ἑκάστης ἀντιστοίχως r_1=1 cm καὶ r_2=2 cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀπόστασις αὕτη τῶν σφαιρῶν (R) ἂν ἑκάστη φέρῃ τὸ αὐτὸ φορτίον Q=40 ΗΣΜπ καὶ ἂν ἡ ἐμφανιζομένη δύναμις ἀπώσεως ἔχῃ τιμὴν F=4 dynes.

Λύσις: R=28,2 cm.

619. Λουγδουνικῆς λαγήνου ὁ μὲν εἷς ὁπλισμὸς ἔχει δυναμικὸν V=30000 Volt, ὁ δ' ἕτερος συγκοινωνεῖ μὲ τὴν γῆν.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ περιεχόμενον φορτίον (Q) καὶ ποία ἡ ἠλεκτρική της ἐνέργεια (W).

Λύσις: Q=0,003 Coul, W=45 joules.

620. Λουγδουνικὴ λάγηνος συγκοινωνεῖ μὲ τὸν ἕνα ὁπλισμόν της μὲ τὴν γῆν μὲ τὸν δ' ἕτερον μὲ πηγὴν δυναμικοῦ V=60000 Volt.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ χωρητικότης ταύτης (C) ἂν κατὰ τὴν ἕνωσιν τοῦ ἀρχικῶς μὲ τὴν γῆν συγκοινωνοῦντος ὁπλισμοῦ μὲ πυκνωτὴν χωρητικότητος c=0,01 μF παρουσιάζεται δυναμικὸν V'=24000 Volt εἰς τὸν ἕτερον τῶν ὁπλισμῶν τῆς λαγήνου.

Λύσις: C=0,0066 μF.

621. Δίδεται πυκνωτὴς χωρητικότητος C=150 ΗΣΜχ καὶ δυναμικοῦ V=100 ΗΣΜδ.

Ζητεῖται: Ποίαν ταχύτητα (v) πρέπει νὰ ἔχῃ βλῆμα μάζης m=400 gr. ἵνα παράγῃ τὸ αὐτὸ ἔργον μὲ τὸ τῆς ἐκφορτίσεως τοῦ πυκνωτοῦ.

Λύσις: v=61,2 cm/sec.

622. Πυκνωτὴς χωρητικότητος C=8000 ΗΣΜχ ἀφηλεκτρί-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ζεται διὰ μεταλλικοῦ σύρματος θερμοχωρητικότητος $C_0=0{,}0006$ cal/grad, ὁπότε ἡ θερμοκρασία τοῦ σύρματος ἀνέρχεται κατὰ $\theta=500$ grad.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ δυναμικὸν τοῦ πυκνωτοῦ (V) ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ὁλόκληρος ἡ παραγομένη θερμότης παραμένει ἐπὶ τοῦ σύρματος.

Λύσις: $V=59{,}25$ ΗΣΜδ.

623. Μεταλλικὸν σφαιρίδιον, ἠλεκτρισμένον, φέρεται εἰς ἐπαφὴν πρὸς ὅμοιον σφαιρίδιον καὶ ἀκολούθως ἀπομακρύνεται αὐτοῦ, ὁπότε ὅταν ἡ ἀπόστασις τούτων γίνῃ $R=10$ cm ἕκαστον σφαιρίδιον ἀπωθεῖ τὸ ἕτερον μετὰ δυνάμεως $F=9$ dynes.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ ἀρχικὸν ὁλικὸν φορτίον (Q) τοῦ σφαιριδίου.

Λύσις: $Q=60$ Coul. ΗΣΜπ

624. Δύο ἠλεκτρισμέναι σφαῖραι τοποθετημέναι εἰς ἀπόστασιν R μεταξύ των καὶ ταυτοσήμως ἠλεκτρισμέναι προκαλοῦν ἄπωσιν $F=1$ dyne. Ἀκολούθως φέρονται εἰς ἐπαφὴν καὶ ἀπομακρύνονται ἐκ νέου, ὁπότε εἰς ἀπόστασιν R/2 προκαλοῦν ἄπωσιν $F=4{,}5$ dynes.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ λόγος (Q_1/Q_2) τῶν δύο ἀρχικῶν φορτίων τῶν σφαιρῶν.

Λύσις: $Q_1/Q_2=2$.

625. Δίδεται μεταλλικὸς σφαιρικὸς ἀγωγὸς χωρητικότητος $C=1$ μF.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς (R) τοῦ ἀγωγοῦ τούτου.

Λύσις: $R=9$ Km.

626. Δίδεται ἀγωγὸς χωρητικότητος $C=700$ cgs.

Ζητεῖται: Ποῖον πρέπει νὰ εἶναι τὸ δυναμικὸν (V) τοῦ ἀγωγοῦ τούτου, ἵνα κατὰ τὴν ἀφηλέκτρισίν του ἡ παραγομένη ὁλικὴ θερμότης εἶναι $\Theta=1$ cal.

Λύσις: $V=1091$ ΗΣΜδ.

627. Πυκνωτὴς χωρητικότητος $C=0{,}1$ μF φορτίζεται μέχρι δυναμικοῦ $V=220$ Volt.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμενον ἠλεκτρικὸν φορτίον (Q).

Λύσις: $Q=22$ μCoul.

628. Πυκνωτὴς χωρητικότητος $C=0{,}13$ μF φορτίζεται μέχρι δυναμικοῦ $V=25000$ Volt ἐντὸς χρόνου $t=5$ sec.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμενον ποσὸν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἠλεκτρισμοῦ κατὰ sec (q) ἂν ὑποτεθῇ ὅτι εἰς ἴσους χρόνους προστίθενται ἴσα φορτία ἐπὶ τοῦ πυκνωτοῦ.

Λύσις: q=650 μCoul/sec.

629. Δίδεται ἀγωγὸς χωρητικότητος $C_1=10$ μF.

Ζητεῖται: Ποίας χωρητικότητος (C_2) πρέπει νὰ εἶναι ἕτερος ἀγωγός, ὥστε ἡ χωρητικότης τοῦ προκύπτοντος συστήματος πυκνωτῶν ἐν σειρᾷ νὰ εἶναι C=5 μF.

Λύσις: $C_2=10$ μF.

630. Ἠλεκτρικὸν ἐκκρεμὲς ἐξαρτᾶται δι᾽ ἀβαροῦς νήματος μήκους $l=90$ cm, ἔχει δὲ μᾶζαν m=0,5 gr, φέρουσαν φορτίον Q=50 ΗΣΜπ.

Τὸ ἐκκρεμὲς τοῦτο τιθέμενον κατ᾽ ἀρχὴν ἐντὸς ὁμογενοῦς πεδίου μὲ κατακορύφους τὰς δυναμικὰς γραμμά του καὶ φορᾶς ἐκ τῶν κάτω ἔχει περίοδον $T_1=2{,}16$ sec, ἀκολούθως δὲ τιθέμενον ἐντὸς ὁμοίου πεδίου μὲ γραμμὰς ὅμως ἐκ τῶν ἄνω ἔχει περίοδον $T_2=1{,}72$ sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ἠλεκτροστατικοῦ πεδίου (Η), ἀνεξαρτήτως φορᾶς, ὡς καὶ ποία ἡ ἐπιτάχυνσις τῆς βαρύτητος τοῦ τόπου (g).

Λύσις: Η=2,19 cgs, g=980,5 cm/sec^2.

ΔΥΝΑΜΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ

631. Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως I=0,2 Amp διαρρέει ἀγωγὸν ἐπὶ χρόνον t=30 sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ κατὰ τὸν χρόνον τοῦτον διελθοῦσα ἠλεκτρικὴ ποσότης (Q) εἰς μονάδας cgs.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$I = \frac{Q}{t}$$

ἔχομεν:

$$Q = I \, . \, t$$

$$Q = 0{,}2 . 30 \text{ Amp} . \text{sec}$$

$$Q = 6 \, \frac{\text{Coul} . \text{sec}}{\text{sec}}$$

$$Q = 6 . 3 . 10^9 \, \frac{\text{ΗΣΜπ} . \text{sec}}{\text{sec}}$$

$$\boxed{Q = 18 . 10^9 \text{ ΗΣΜπ}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

632. Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐντάσεως σταθερᾶς I=5 Amp διαρρέει ἀγωγόν, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ὁποίου ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι V=380 Volt.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀντίστασις (R) τοῦ ἀγωγοῦ.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$I = \frac{V}{R}$$

ἔχομεν:

$$R = \frac{V}{I}$$

$$R = \frac{380}{5} \frac{\text{Volt}}{\text{Amp}}$$

$$\boxed{R = 76 \text{ Ohm}}$$

633. Δίδεται ἀργυροῦς ἀγωγός, ἀντιστάσεως R=16300 μ.Ohm, μήκους l=30 cm καὶ τομῆς σ=0,003 cm².

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις (ρ) τοῦ Ἀργύρου.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$R' = \frac{\rho . l}{\sigma}$$

ἔχομεν:

$$\rho = \frac{R . \sigma}{l}$$

$$\rho = \frac{16300.0,003}{30} \frac{\text{Ohm} . \text{cm}^2}{\text{cm}}$$

$$\boxed{\rho = 1,63 \text{ Ohm} . \text{cm}}$$

634. Ράβδος ἐκ γραφίτου, μήκους l=79,8 cm καὶ τομῆς σ=0,5 cm² δέχεται εἰς τὰ ἄκρα της διαφορὰν δυναμικοῦ V=380 Volt.

Ζητεῖται: Πόση ποσότης ἠλεκτρισμοῦ (Q) θὰ διέλθῃ διὰ τῆς ράβδου ταύτης ἐντὸς χρόνου t=42 sec, ἂν ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ γραφίτου εἶναι ρ=820 Ohm.cm.

Λύσις: Ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ράβδου ρεύματος (I) θὰ εἶναι προφανῶς:

$$I = \frac{V\sigma}{\rho l} \qquad (1)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε ἐκ τοῦ τύπου

$$I = \frac{Q}{t}$$

ὁ (1) γίνεται

$$\frac{Q}{t} = \frac{V\sigma}{\varrho l}$$

ἐξ οὗ ἔχομεν τότε:

$$Q = \frac{V\sigma t}{\varrho l}$$

$$Q = \frac{380.0,5.42}{820.79,8} \; \frac{\text{Volt} \,.\, \text{cm}^2 \,.\, \text{sec}}{\text{Ohm} \,.\, \text{cm} \,.\, \text{cm}}$$

$$Q = \frac{100}{820} \; \frac{\text{Volt} \,.\, \text{sec}}{\text{Ohm}}$$

$$\boxed{Q = 0{,}128 \text{ Coul}}$$

635. Ἠλεκτρικὸν στοιχεῖον, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U = 2$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 0{,}4$ Ohm συνδέεται μὲ κύκλωμα ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως $R = 10$ Ohm.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (v) εἰς τὰ ἄκρα τῶν πόλων τοῦ στοιχείου κατὰ τὴν διέλευσιν τοῦ ρεύματος διὰ τοῦ κυκλώματος.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τὸ ὅλον κύκλωμα καὶ καλοῦντες I τὴν ἔντασιν τοῦ διερχομένου ρεύματος ἔχομεν:

$$I = \frac{U}{R + r} \qquad (1)$$

Ἀφ᾿ ἑτέρου ὅμως ἐφαρμόζοντες τὸν αὐτὸν νόμον εἰς τὴν ἐξωτερικὴν μόνον ἀντίστασιν ἔχομεν:

$$I = \frac{v}{R} \qquad (2)$$

καθ᾿ ὅσον ἡ ἔντασις (I) θὰ εἶναι ἡ αὐτὴ εἰς οἱονδήποτε μέρος τοῦ κυκλώματος.

Ἔχομεν τότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) τὴν σχέσιν:

$$\frac{U}{R + r} = \frac{v}{R}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐξ ἧς προκύπτει:

$$v = \frac{U \cdot R}{R + r}$$

$$v = \frac{2.10}{10,4} \frac{\text{Volt} \cdot \text{Ohm}}{\text{Ohm}}$$

$$\boxed{v = 1,92 \text{ Volt}}$$

636. Ἠλεκτρικὴ στήλη, ἀντιστάσεως ἐσωτερικῆς $r = 2,4$ Ohm καὶ ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U = 8$ Volt συνδέεται μὲ ἐξωτερικὸν ἀγωγὸν ἀντιστάσεως R.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως ταύτης (R) ἵνα ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῶν πόλων τῆς στήλης γίνῃ $v = 4$ Volt, ἤτοι κατέλθῃ εἰς τὸ $1/2$ τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως.

Λύσις: Ἐκ τῶν δύο τύπων

$$I = \frac{U}{R + r}$$

καὶ

$$I = \frac{v}{R}$$

ἔχομεν

$$\frac{U}{R + r} = \frac{v}{R}$$

ὁπότε, λύοντες ὡς πρὸς R, εὑρίσκομεν:

$$R = \frac{vr}{U - v}$$

$$R = \frac{4.2,4}{8 - 4} \frac{\text{Volt} \cdot \text{Ohm}}{\text{Volt}}$$

$$\boxed{R = 2,4 \text{ Ohm}}$$

637. Ἠλεκτρικὸν στοιχεῖον ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως U καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 0,5$ Ohm τροφοδοτεῖ κύκλωμα ἀποτελούμενον ἀφ᾿ ἑνὸς ἐξ ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως R_0 ἀφ᾿ ἑτέρου ἐκ τοῦ ἀγωγοῦ τούτου καὶ ἑτέρου (ἐν σειρᾷ) ἀντιστάσεως $R_1 = 6$ Ohm, ὁπότε ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος εἶναι ἀντιστοίχως διὰ τὰς δύο περιπτώσεις $I_0 = 1$ Amp καὶ $I_1 = 0,25$ Amp.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τοῦ στοιχείου (U), καὶ ποία ἡ ἀρχικὴ ἀντίστασις (R_0).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τὰ δύο κλειστὰ κυκλώματα ἔχομεν τοὺς δύο τύπους:

$$I_0 = \frac{U}{r + R_0}$$

καὶ

$$I_1 = \frac{U}{r + R_0 + R_1}$$

οἵτινες ἀποτελοῦν σύστημα μὲ δύο ἀγνώστους (U καὶ R_0) τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν ἔχοντας τιμάς:

$$\boxed{\begin{aligned} U &= 2 \text{ Volt} \\ R_0 &= 1{,}5 \text{ Ohm} \end{aligned}}$$

638. Στήλη ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U=20$ Volt τροφοδοτεῖ ἀγωγὸν ἀντιστάσεως R_0 ὁπότε ἡ ἔντασις τοῦ ἐμφανιζομένου ρεύματος εἶναι $I_0=2$ Amp.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀντίστασις αὕτη (R_0) ὡς καὶ ποία ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης (r) ἂν κατὰ τὴν προσθήκην ἑτέρου ἀγωγοῦ (ἐν παραλλήλῳ ὡς πρὸς τὸν R_0) ἀντιστάσεως $R_1=14$ Ohm ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται $I_1=2{,}439$ Amp.

Λύσις: Ὁ διὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ἰσχύων τύπος εἶναι:

$$I_0 = \frac{U}{r + R_0} \qquad (1)$$

ὁ δὲ διὰ τὴν δευτέραν:

$$I_1 = \frac{U}{r + R} \qquad (2)$$

ὅπου R ἡ σύνθετος ἀντίστασις τῶν ἐν παραλλήλῳ R_0 καὶ R_1.

Ἐπειδὴ ὅμως ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1}$$

ἔχομεν:

$$R = \frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1}$$

ὁπότε ὁ τύπος (2) λαμβάνει μορφήν:

$$I_1 = \frac{U}{r + \dfrac{R_0 R_1}{R_0 + R_1}} \qquad (3)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Τότε ἐκ τῶν τύπων (1) καὶ (3), ἀποτελούντων σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους (r καὶ R_0), εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$\boxed{\begin{aligned} r &= 4 \text{ Ohm} \\ R_0 &= 6 \text{ Ohm} \end{aligned}}$$

639. Ἠλεκτρικὴ στήλη ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως U καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r τροφοδοτεῖ κύκλωμα ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως R=12 Ohm, ὁπότε ἡ ἔντασις τοῦ ἐμφανιζομένου ρεύματος εἶναι I=1,3 Amp.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως (U) καὶ τῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως (r) τῆς στήλης ταύτης, ἄν, κατὰ τὴν προσθήκην ἑτέρας στήλης (μὲ U_1=30 Volt καὶ r_1=10 Ohm) ἀντιτιθεμένης εἰς τὴν πρώτην καὶ ἐν σειρᾷ ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ κύκλωμα, ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος γίνεται I_1=0,133 Amp καὶ παρουσιάζει ἀντίθετον φοράν.

Λύσις: Ὁ διὰ τὴν πρώτην σύνθεσιν ἰσχύων τύπος εἶναι προφανῶς:

$$I = \frac{U}{r + R} \tag{1}$$

ὁ δὲ διὰ τὴν δευτέραν ἀντιστοίχως:

$$-I_1 = \frac{U + (-U_1)}{r + r_1 + R}$$

ἤτοι

$$-I_1 = \frac{U - U_1}{r + r_1 + R} \tag{2}$$

ὁπότε ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν τὰς ἀγνώστους τιμὰς τῶν U καὶ r:

$$\boxed{\begin{aligned} U &= 26 \text{ Volt} \\ r &= 8 \text{ Ohm} \end{aligned}}$$

640. Στήλη ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως U = 16 Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r = 12 Ohm τροφοδοτεῖ ἀγωγὸν ἀντιστάσεως R_0, ὁπότε ἡ ἔντασις τοῦ ἐμφανιζομένου ρεύματος εἶναι I_0 = 0,5 Amp.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως R_0 ὡς καὶ πόση θὰ γίνῃ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος (I_1) ἂν ἐν παραλλήλῳ ὡς πρὸς τὴν R_0 συνδεθῇ βολτόμετρον ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως R_1 = 10 Ohm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$I_0 = \frac{U}{r + R_0}$$

ὁπότε λύοντες ὡς πρὸς R_0 εὑρίσκομεν:

$$R_0 = \frac{U - I_0 r}{I_0}$$

$$\boxed{R_0 = 50 \text{ Ohm}}$$

Ἐν συνεχείᾳ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν τὴν σχέσιν

$$I_1 = \frac{U}{r + \dfrac{R_0 R_1}{R_0 + R_1}}$$

ὁπότε προκύπτει τελικῶς:

$$\boxed{I_1 = 0{,}8 \text{ Amp}}$$

641. Τρεῖς ἰσομήκεις καὶ ἰσοπαχεῖς ἀγωγοὶ ἀποτελούμενοι ἐκ τοῦ αὐτοῦ μετάλλου συνδέονται κατὰ τὰ ἄκρα των, ὥστε ν' ἀποτελοῦν ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

Ζητεῖται: Ἂν ἠλεκτρικὸν ρεῦμα εἰσέρχεται διὰ τῆς μιᾶς κορυφῆς (Α) καὶ ἐξέρχεται διὰ τῆς ἄλλης (Β), ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις (Ι) ρεύματος διερχομένου δι' ἀγωγοῦ συνδέοντος τὴν κορυφὴν Γ μὲ τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

Λύσις: Ἔστω Δ τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἔχουν τὸ αὐτὸ δυναμικὸν

$$V_\Gamma = V_\Delta$$

καθ' ὅσον εἶναι τὰ μέσα δύο ἰσοπαχέων ἀγωγῶν τῆς αὐτῆς ἀντιστάσεως, ἤτοι τῶν ΑΓΒ καὶ ΑΔΒ, ὁπότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι:

$$V_{\Gamma\Delta} = V_\Gamma - V_\Delta = 0$$

καὶ τελικῶς:

$$\boxed{I = 0}$$

642. Δίδεται ἠλεκτρικὸν στοιχεῖον τοῦ Daniell, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U_0 = 1{,}06$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r_0 = 0{,}85$ Ohm καὶ συνδέεται μὲ στοιχεῖον τοῦ Bunsen, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U_1 = 1{,}94$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r_1 = 0{,}2$ Ohm οὕτως ὥστε τὰ δύο στοιχεῖα νὰ δίδουν ἀντίθετα ρεύματα διαρρέοντα κοινὸν ἀγωγόν, ἀντιστάσεως R, κλείοντα κύκλωμα.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις (R) τοῦ ἀγω-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γοῦ τούτου, ὥστε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ στοιχείου τούτου νὰ εἶναι V=0,5 Volt.

Λύσις: Ὁ νόμος τοῦ Ohm, ἐφαρμοζόμενος εἰς ὁλόκληρον τὸ κύκλωμα δίδει:

$$I = \frac{U_0 + U_1}{r_0 + r_1 + R}$$

ἐφαρμοζόμενος δὲ εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστάσεως R δίδει ἐν συνεχείᾳ:

$$I = \frac{V}{R}$$

ὁπότε θέτοντες ὅπου $U_0 = -1,06$ Volt καὶ $U_1 = +1,94$ Volt ἕνεκα τῆς κατ' ἀντίθεσιν συνενώσεως τῶν στοιχείων ἔχομεν:

$$\frac{U_1 + U_0}{r_0 + r_1 + R} = \frac{V}{R}$$

$$R = \frac{V\,(r_0 + r_1)}{U_1 + U_0 - V}$$

$$R = \frac{0,5\,(0,85 + 0,2)}{1,94 - 1,06 - 0,5} \quad \frac{\text{Volt . Ohm}}{\text{Volt}}$$

$$\boxed{R = 1,38 \text{ Ohm}}$$

643. Στήλη ἀποτελουμένη ἐκ n=10 στοιχείων τοῦ Grenet, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως ἑκάστου u=2 Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r=0,4 Ohm, τροφοδοτεῖ λαμπτῆρα ἰσχύος J=2 watt διὰ διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα του v=5 Volt.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἔντασις (I) τοῦ διαρρέοντος τὸ κύκλωμα ρεύματος, ἂν ὁ λαμπτὴρ συνδέεται ἀπ' εὐθείας διὰ τῶν ἄκρων του εἰς τοὺς πόλους τῆς στήλης.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς ἰσχύος

$$J = v \, . \, I_0$$

εὑρίσκομεν κατ' ἀρχὴν τὴν ἔντασιν (I_0) ἥτις θὰ παρουσιάζετο ἂν ὁ λαμπτὴρ ἐδέχετο διαφορὰν δυναμικῶν v. Ἐκ τῆς ἐντάσεως ταύτης εὑρίσκομεν κατόπιν τὴν ἀντίστασιν τοῦ λαμπτῆρος (R_0):

$$R_0 = \frac{v}{I_0}$$

$$R_0 = \frac{v}{\frac{J}{v}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$R_0 = \frac{v^2}{J} \qquad (1)$$

᾿Ακολούθως ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τὸ κύκλωμα ἔχομεν

$$I = \frac{nu}{nr + R_0}$$

ἤτοι, ὡς ἐκ τῆς (1):

$$I = \frac{nu}{nr + \frac{v^2}{J}}$$

ὁπότε ἡ ἔντασις (I) τοῦ διαρρέοντος τὸ κύκλωμα ρεύματος εἶναι τελικῶς:

$$I = \frac{n \cdot u \cdot J}{n \cdot r \cdot J + v^2}$$

$$\boxed{I = 1{,}21 \text{ Amp}}$$

644. ᾿Ηλεκτροκινητήρ, ἀποδώσεως N=85% καταναλίσκει ποσότητα ἠλεκτρισμοῦ Q=29430 Coul ἐντὸς χρόνου t=3 h δεχόμενος εἰς τὰ ἄκρα του διαφορὰν δυναμικοῦ V=270 Volt.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ὠφέλιμος ἰσχὺς (J_ω) τοῦ κινητῆρος εἰς HP.

Λύσις: ᾿Εκ τοῦ τύπου

$$J = I \cdot V$$

ἤτοι:

$$J = \frac{Q \cdot V}{t}$$

εὑρίσκομεν τὴν προσφερομένην εἰς τὸν κινητῆρα ἰσχύν, ὁπότε, δεδομένης τῆς σχέσεως

$$J_\omega = \frac{85J}{100}$$

ἔχομεν:

$$J_\omega = \frac{85\,QV}{100\,t}$$

$$J_\omega = \frac{85.29430.270}{100.3} \; \frac{\text{Coul. Volt}}{\text{h}}$$

$$J_\omega = \frac{85.2943.27.10^2}{3.36.10^4} \; \frac{\text{Coul. Volt}}{\text{sec}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$J_\omega = \frac{85.2943.27}{3.36.10^2} \; \frac{\text{joules}}{\text{sec}}$$

$$J_\omega = \frac{85.2943.27.10^2}{3.36.10^2.981.75} \text{ HP}$$

$$\boxed{J_\omega = 0,85 \text{ HP}}$$

645. Ὑπὸ ἠλεκτρικῆς πηγῆς, ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U=400$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r=25$ Ohm παρέχεται ρεῦμα, ὅπερ, δι᾽ ἀγωγοῦ συνολικῆς ἀντιστάσεως $R=80$ Ohm τροφοδοτεῖ ἠλεκτροκινητῆρα, ὁπότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῆς πηγῆς γίνεται $V=350$ Volt.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος (R_0), ποία ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος (I), ποία ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος (J) καὶ ποία ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκροδεκτῶν του (V_0), ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ὁ κινητὴρ ἔχει ἀπόδοσιν 100 %.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τὸ ὅλον κύκλωμα ἔχομεν κατ᾽ ἀρχὴν τὸν τύπον:

$$I = \frac{U}{r+R+R_0} = \frac{V}{R+R_0}$$

ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην ἀντίστασιν R_0:

$$R_0 = \frac{(r+R)\,V - RU}{U-V}$$

$$\boxed{R_0 = 95 \text{ Ohm}}$$

Ἐν συνεχείᾳ πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐντάσεως (I) ἔχομεν:

$$I = \frac{V}{R+R_0}$$

$$\boxed{I = 2 \text{ Amp}}$$

ὁπότε ἡ ἰσχὺς τοῦ κινητῆρος θὰ εἶναι, ὡς ἐκ τῆς ἐντάσεως I καὶ τῆς ἀντιστάσεώς του R_0:

$$J = I^2 R_0$$

$$\boxed{J = 380 \text{ watt}}$$

καὶ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (V_0) εἰς τὰ ἄκρα του τελικῶς:

$$V_0 = \frac{J}{I}$$

$$\boxed{V_0 = 190 \text{ Volt}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

+ *646.* Ἠλεκτρικὴ στήλη, ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 400$ Ohm καὶ ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U = 2000$ Volt, τροφοδοτεῖ, διὰ συρματίνου ἀγωγοῦ συνολικοῦ μήκους $l = 150$ m, ἠλεκτρικὴν λυχνίαν ἀντιστάσεως $R_0 =$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἀγωγῶν (σ), ὥστε ἐντὸς χρόνου $t = 2$ sec νὰ παρουσιασθῇ ἐπὶ τῶν συρμάτων θερμότης $\Theta = 8{,}3$ cal ὡς καὶ ποία θὰ εἶναι τότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (V) εἰς τὰ ἄκρα τῆς στήλης καὶ ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος (I), ἂν ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τῶν συρμάτων εἶναι $\varrho = 15$ Ohm.cm.

Λύσις: Ἔστω R ἡ συνολικὴ ἀντίστασις τῶν συρματίνων ἀγωγῶν. Αὕτη προφανῶς θὰ εἶναι:

$$R = \frac{\varrho . l}{\sigma} \tag{1}$$

Ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου ρεύματος (I) θὰ εἶναι τότε:

$$I = \frac{U}{r + \frac{\varrho l}{\sigma} + R_0} \tag{2}$$

ὅπου ἀφ' ἑτέρου, ὡς τοῦ νόμου τοῦ Joule, ἡ ἔντασις αὕτη θὰ εἶναι:

$$I = \sqrt{\frac{\Theta \eta}{Rt}}$$

$$I = \sqrt{\frac{\Theta \sigma \eta}{\varrho l t}} \tag{3}$$

Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) εὑρίσκομεν τότε τὸ σ:

$$\boxed{\sigma = 1 \text{ cm}^2}$$

ὁπότε ἡ ἔντασις (I) δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως (2) καὶ εὑρίσκεται, δι' ἀντικαταστάσεως τῶν τιμῶν τῶν U,r κλπ. ἔχουσα τιμήν:

$$\boxed{I = 0{,}0088 \text{ Amp}}$$

Τέλος, ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τὰ ἄκρα τῆς στήλης κατὰ τὴν διέλευσιν τοῦ ρεύματος ἔχομεν:

$$I = \frac{V}{R + R_0}$$

ἤτοι

$$V = I\,(R + R_0)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$V = I\left(\frac{\varrho l}{\sigma} + R_0\right)$$

$$\boxed{V = 1996{,}5 \text{ Volt}}$$

647. Ἠλεκτροθερμαντὴρ παρουσιάζει ἰσχὺν $J_0 = 400$ watt διὰ διαφορὰν δυναμικοῦ $V_0 = 220$ Volt ἐφαρμοζομένην εἰς τὰ ἄκρα του.

Ζητεῖται: Ποίαν ἰσχὺν (J_1) θὰ παρουσιάζει ἂν χρησιμοποιηθῇ μὲ διαφορὰν δυναμικοῦ $V_1 = 180$ Volt.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$J_0 = I_0 V_0$$

εὑρίσκομεν κατ᾽ ἀρχὴν τὴν ἔντασιν (I_0) ἥτις θὰ διέρρεε τὸν θερμαντῆρα ὑπὸ διαφορὰν δυναμικοῦ V_0, ὁπότε ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν ἀντίστασίν του (R) ὡς ἐκ τῆς σχέσεως

$$R = \frac{J_0}{I_0^2}$$

ἤτοι

$$R = \frac{V_0^2}{J_0} \qquad (1)$$

Ἐν συνεχείᾳ, ἐκ τῆς ἀντιστάσεως ταύτης, ἥτις θὰ παραμένῃ προφανῶς σταθερὰ δι᾽ οἱανδήποτε διαφορὰν δυναμικοῦ, ἔχομεν

$$R = \frac{V_1^2}{J_1} \qquad (2)$$

ὁπότε, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν :

$$\frac{V_0^2}{J_0} = \frac{V_1^2}{J_1}$$

ἤτοι :

$$J_1 = \frac{V_1^2 J_0}{V_0^2}$$

$$J_1 = \frac{180^2 . 400}{220^2} \text{ watt}$$

$$\boxed{J_1 = 268 \text{ watt}}$$

648. Δίδεται ἀμπερόμετρον ὅπερ δύναται νὰ μετρήσῃ ἐντάσεις ρευμάτων μέχρι τιμῆς τινος $I_\mu = 10$ Amp, ἀποτελεῖται δὲ ἀπὸ μίαν ἐν παραλλήλῳ ἀντίστασιν $R = 5$ Ohm καὶ ἀπὸ πηνίον ἀντιστάσεως $r = 45$ Ohm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις (I_1) τοῦ διὰ τοῦ πηνίου διερχομένου ρεύματος, ὅταν ὁ δείκτης δεικνύει $I_0 = 8{,}6$ Amp, ὡς καὶ ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις (I_M) ὅταν ὁ δείκτης δεικνύει τὴν μεγίστην ἔντασιν (I_μ).

Λύσις: Ἔστω V_μ ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ μεταξὺ τῶν σημείων διακλαδώσεως τῶν δύο ἀγωγῶν κατὰ τὴν διέλευσιν τοῦ ρεύματος μεγίστης ἐντάσεως. Ἔχομεν τότε τὰς σχέσεις:

$$V_\mu = I_M r \qquad (1)$$

$$V_\mu = I_2 R \qquad (2)$$

ὅπου I_2 ἡ ἔντασις τοῦ διερχομένου διὰ τῆς ἐν παραλλήλῳ προστατευτικῆς ἀντιστάσεως ρεύματος. Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει τότε ἡ σχέσις:

$$I_M r = I_2 R \qquad (3)$$

Ἀφ' ἑτέρου ὅμως εἶναι:

$$I_M + I_2 = I_\mu \qquad (4)$$

ὁπότε ἐκ τῶν (3) καὶ (4) εὑρίσκομεν τὴν ζητουμένην τιμὴν τῆς I_M:

$$I_M = \frac{I_\mu R}{(R + r)} \qquad (5)$$

$$I_M = \frac{10.5}{5 + 45} \, \frac{\text{Amp.Ohm}}{\text{Ohm}}$$

$$\boxed{I_M = 1 \text{ Amp}}$$

Ἐν συνεχείᾳ, κατ' ἀντιστοιχίαν πρὸς τὴν σχέσιν (5) ἔχομεν:

$$I_1 = \frac{I_0 . R}{(R + r)}$$

$$I_1 = \frac{8{,}6.5}{5 + 45} \, \frac{\text{Amp.Ohm}}{\text{Ohm}}$$

$$\boxed{I_1 = 0{,}86 \text{ Amp}}$$

649. Δίδεται ἀμπερόμετρον ἄνευ προστατευτικῆς προσθέτου ἀντιστάσεως βαθμολογημένον μέχρις ἐντάσεως $I_\mu = 20$ Amp.

Ζητεῖται: Ποία πρόσθετος ἀντίστασις (R) ἐν παραλλήλῳ πρέπει νὰ προστεθῇ διὰ νὰ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ ρεύματα μέχρις ἐντάσεως $I_1 = 400$ Amp, ἂν ἡ ἐσωτερικὴ συνολικὴ ἀντίστασις τοῦ ὀργάνου εἶναι $r = 380$ Ohm.

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm ὡς εἰς τὴν προη-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

γουμένην ἄσκησιν εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς ζητουμένης ἀντιστάσεως :

$$R = \frac{I_\mu r}{I_1 - I_\mu}$$

$$R = \frac{20.380}{400-20} \, \frac{Amp.Ohm}{Amp}$$

$$\boxed{R = 20 \text{ Ohm}}$$

650. Βολτόμετρον, βαθμολογημένον μὲ ἀκρίβειαν, συνδεόμενον εἰς τὰ ἄκρα τῶν πόλων στήλης ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 20$ Ohm τροφοδοτούσης κύκλωμα ἀντιστάσεως R δεικνύει διαφορὰν δυναμικοῦ $v = 18$ Volt.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (v') εἰς τὰ ἄκρα τῆς στήλης ἄνευ τοῦ βολτομέτρου, ἂν ἡ ἐσωτερική του ἀντίστασις εἶναι $R_0 = 400$ Ohm καὶ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆ- στήλης $U = 20$ Volt ὡς καὶ ποία εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος (R).

Λύσις: Ἐφαρμόζοντες τὸν νόμον τοῦ Ohm εἰς τὸ κύκλωμα μετὰ τοῦ βολτομέτρου ἔχομεν :

$$\frac{U}{r + \dfrac{RR_0}{R + R_0}} = \frac{v\,(R + R_0)}{RR_0} \qquad (1)$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἐφαρμόζοντες τὸν αὐτὸν νόμον εἰς τὸ κύκλωμα ἄνευ βολτομέτρου ἔχομεν :

$$\frac{U}{r + R} = \frac{v'}{R} \qquad (2)$$

ὁπότε ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἀποτελουσῶν σύστημα μὲ δύο ἀγνώστους (v' καὶ R) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τούτων :

$$\boxed{\begin{aligned} v' &= 18{,}84 \text{ Volt} \\ R &= 327{,}3 \text{ Ohm} \end{aligned}}$$

651. Ἠλεκτροθερμαντὴρ ἰσχύος $J_0 = 600$ watt (ὑπὸ διαφορὰν δυναμικοῦ $v_0 = 60$ Volt) συνδέεται μὲ ἀντίστασιν R ἐν παραλλήλῳ καὶ τὰ δύο ἄκρα του συνδέονται ἀφ' ἑτέρου δι' ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως *R* μὲ πηγὴν ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U = 336$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 6$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (v_1) εἰς τὰ ἄκρα τοῦ θερμαντῆρος κατὰ τὴν διέλευσιν τοῦ ρεύματος, ποία ἡ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

πρόσθετος ἀντίστασις (R) καὶ ποία ἡ τοῦ θερμαντῆρος (R_0), ἂν ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ εἶναι $R = 14$ Ohm, καὶ ἂν τότε ἡ ἰσχὺς τοῦ θερμαντῆρος γίνεται $J_1 = 216$ watt.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$R_0 = \frac{v_0^2}{J_0}$$

εὑρίσκομεν κατ' ἀρχὴν τὴν τιμὴν τῆς R_0:

$$R_0 = \frac{60^2}{600} \frac{\text{Volt}^2}{\text{watt}}$$

$$\boxed{R_0 = 6 \text{ Ohm}}$$

Ἐν συνεχείᾳ ἐκ τοῦ τύπου

$$R_0 = \frac{v_1^2}{J_1}$$

λύοντες ὡς πρὸς v_1 ἔχομεν:

$$v_1 = \sqrt{R_0 . J_1}$$

$$v_1 = \sqrt{6.216} \text{ Volt}$$

$$\boxed{v_1 = 36 \text{ Volt}}$$

Ἀκολούθως πρὸς εὕρεσιν τῆς προσθέτου ἀντιστάσεως (R) ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\frac{U}{r + R + \frac{RR_0}{R + R_0}} = \frac{v_1 (R + R_0)}{RR_0}$$

Λύοντες ταύτην ὡς πρὸς R εὑρίσκομεν:

$$R = \frac{v_1 R_0 (r + R)}{UR_0 - v_1 (r + R + R_0)}$$

$$R = \frac{36.6 (6 + 14)}{336.6 - 36 (6 + 14 + 6)} \text{ Ohm}$$

$$\boxed{R = 12 \text{ Ohm}}$$

652. Ἠλεκτρικὴ γεννήτρια ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U = 6000$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 800$ Ohm τροφοδοτεῖ κινητῆτα ἰσχύος $J_0 = 3600$ watt (ὑπὸ διαφορὰν δυναμικοῦ $v_0 = 1000$ Volt) μέσῳ ἀγωγῶν συνολικῆς ἀντιστάσεως $R = 400$ Ohm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ εἰς θερμότητα ἀπώλεια (Θ) κατὰ τὴν μεταφορὰν τοῦ ρεύματος ἀπὸ τῆς γεννητρίας εἰς τὸν κινητῆρα, ἐντὸς χρόνου $t = 41,8$ sec.

Λύσις: Ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος θὰ εἶναι προφανῶς, ὡς ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Ohm ἐφαρμοζομένου εἰς ὁλόκληρον τὸ κύκλωμα:

$$I = \frac{U}{r + R + R_0} \qquad (1)$$

ὅπου R_0 ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ κινητῆρος.

Εἶναι ὅμως

$$R_0 = \frac{v_0^2}{J_0}$$

ὁπότε ἡ σχέσις (1) γίνεται:

$$I = \frac{U}{r + R + \frac{v_0^2}{J_0}} \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς τιμῆς ταύτης τῆς ἐντάσεως I εὑρίσκομεν ἐν συνεχείᾳ τὴν ἐντὸς τῆς ἀντιστάσεως R παραγομένην θερμότητα (Θ), ἥτις ὡς ἐκ τοῦ νόμου τοῦ Joule θὰ εἶναι:

$$\Theta = \frac{I^2Rt}{4,18}$$

ἤτοι (ὡς ἐκ τῆς (2)):

$$\Theta = \frac{U^2J_0^2 . R . t}{4,18\,(rJ_0 + RJ_0 + v_0^2)^2}$$

$$\boxed{\Theta = 100 \text{ Kcal}}$$

653. Ἠλεκτρικὴ πηγὴ ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U = 0,5$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 2,538$ Ohm τροφοδοτεῖ, δι᾽ ἀγωγοῦ ἀμελητέας ἀντιστάσεως, βολτάμετρον περιέχον διάλυμα Νιτρικοῦ Ἀργύρου.

Ζητεῖται: Πόσος Ἄργυρος (m) θὰ ἐναποτεθῇ εἰς τὴν κάθοδον ἐντὸς χρόνου $t = 2h$, ἂν ἡ ἀντίστασις τοῦ βολταμέτρου, ὑποτιθεμένη σταθερά, εἶναι $r_0 = 1,35$ Ohm καὶ τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ Ἀργύρου εἶναι $\alpha = 108$.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$m = \frac{\alpha It}{96510\sigma}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅπου $\sigma = 1$ (σθένος τοῦ Ἀργύρου), δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῆς τιμῆς τῆς ἐντάσεως I ἐκ τῆς σχέσεως

$$I = \frac{U}{r + r_0}$$

ἔχομεν τελικῶς:

$$m = \frac{\alpha U t}{96510 \cdot \sigma (r + r_0)}$$

$$m = \frac{108 . 0{,}5 . 2 . 3600}{96510\ (2{,}538 + 1{,}35)}\ \mathrm{gr}$$

$$\boxed{m = 1{,}036\ \mathrm{gr}}$$

654. Ρεῦμα ἐντάσεως σταθερᾶς $I = 0{,}003$ Amp διαρρέει βολτάμετρον περιέχον διάλυμα Χλωριούχου ἅλατος τοῦ Χαλκοῦ (ἀτομικοῦ βάρους $\alpha = 63$), ὁπότε ἐντὸς χρόνου $t = 26$ h 48 min 30 sec ἐναποτίθεται ἐπὶ τῆς καθόδου ποσότης μεταλλικοῦ χαλκοῦ $m = 0{,}189$ gr.

Ζητεῖται: Πόσον εἶναι τὸ σθένος (σ) ὑπὸ τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ὁ χαλκὸς ἐντὸς τοῦ ἅλατος.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$m = \frac{\alpha . I . t}{96510 . \sigma}$$

λύοντες ὡς πρὸς σ ἔχομεν:

$$\sigma = \frac{\alpha . I . t}{96510\ m}$$

$$\sigma = \frac{63 . 0{,}003\ (26 . 3600 + 48 . 60 + 30)}{96510 . 0{,}189}$$

$$\boxed{\sigma = 1}$$

Ἄρα ὁ χαλκὸς εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν μορφὴν μονοσθενοῦς κατιόντος (κατιόντος Ὑποχαλκοῦ).

655. Κατὰ τὴν ἠλεκτρόλυσιν ὕδατος παράγεται ποσότης $V = 5\ \mathrm{cm}^3$ Ὑδρογόνου ἐντὸς χρόνου $t = 1800$ sec, ἥτις ἐκτοπίζει τὸ ὕδωρ δοκιμαστικοῦ σωλῆνος μέχρις ὅτου ἡ ἐλευθέρα ἐπιφάνειά του ἀπέχει τῆς ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ τοῦ βολταμέτρου κατὰ ὕψος $h = 20$ cm.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ διελθόντος ρεύματος (I), ἂν τὸ Ὑδρογόνον ὑπὸ πίεσιν $P_0 = 76$ cmHg. ἔχῃ πυκνότητα $d = 0{,}09$ gr/lit.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ὁ μετρούμενος ὄγκος V εὑρίσκεται προφανῶς ὑπὸ πίεσιν P τιμῆς:

$$P = P_0 - h \cdot \varepsilon \qquad (1)$$

ὅπου ε τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὕδατος ($\varepsilon = 1$ gr/cm³), ὁπότε ὑπὸ πίεσιν P_0 ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι V_0 ὡς ἐκ τοῦ τύπου

$$PV = P_0 V_0$$

ἤτοι:

$$V_0 = \frac{PV}{P_0}$$

ὁπότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$V_0 = \frac{(P_0 - h\varepsilon)\, V}{P_0}$$

Ἐκ τοῦ ὄγκου τούτου (V_0) εὑρίσκομεν ἐν συνεχείᾳ τὴν ἀντιστοιχοῦσαν μᾶζαν (m) τιμῆς:

$$m = \frac{(P_0 - h\varepsilon)\, Vd}{P_0} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος τῆς ἠλεκτρολύσεως

$$I = \frac{96510 \cdot m \cdot \sigma}{\alpha \cdot t}$$

γίνεται τότε, ὡς ἐκ τῆς τιμῆς τῆς μάζης m ἐκ τῆς (2):

$$I = \frac{96510 \cdot \sigma\, (P_0 - h\varepsilon)\, V \cdot d}{\alpha \cdot t \cdot P_0}$$

$$I = \frac{96510 \cdot 1 \cdot (76 \cdot 13{,}6 - 20)\, 5 \cdot 0{,}09}{1800 \cdot 76 \cdot 13{,}6}\ \text{Amp}$$

$$\boxed{I = 0{,}023\ \text{Amp}}$$

656. Δίδεται ἡ μᾶζα τοῦ ἠλεκτρονίου $m = 9{,}1 \cdot 10^{-28}$ gr καὶ τὸ φορτίον του $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ΗΣΜπ.

Ζητεῖται: Ποίαν ταχύτητα (v) θ' ἀποκτήσῃ ἂν τεθῇ μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ εὑρισκομένων εἰς διαφορὰν δυναμικοῦ $V = 3600$ Volt.

Λύσις: Ἡ ἐνέργεια ἠλεκτρονίου, συναρτήσει τῆς μάζης του ἀφ' ἑνὸς εἶναι:

$$E = \frac{mv^2}{2} \qquad (1)$$

ἀφ' ἑτέρου ὅμως, συναρτήσει τῆς διαφορᾶς δυναμικοῦ καὶ τοῦ φορτίου του εἶναι:

$$E = eV \qquad (2)$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν:

$$\frac{mv^2}{2} = eV$$

ἐξ οὗ:

$$v = \sqrt{\frac{2\,eV}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2.4{,}8.10^{-10}.36.10^2}{9{,}1.10^{-28}}}\ \sqrt{\frac{cgs\pi\,.\,Volt}{gr}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2.4{,}8.10^{-10}.36.10^2}{9{,}1.10^{-28}.3.10^2}}\ \frac{cm}{sec}$$

$$\boxed{v = 35{,}58.10^8\ \frac{cm}{sec}}$$

657. Ἠλεκτρόνιον εἰδικοῦ φορτίου

$$e/m = 5{,}27.10^{17}\ \text{ΗΣΜπ. } gr^{-1}$$

κινεῖται, μεταξὺ τῶν ὁπλισμῶν πυκνωτοῦ ὑπὸ διαφορὰν δυναμικοῦ V, μὲ ταχύτητα $v = 60000$ Km/sec.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τάσις αὕτη (V) τοῦ πυκνωτοῦ.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$\frac{mv^2}{2} = eV$$

λύοντες ὡς πρὸς V ἔχομεν:

$$V = \frac{mv^2}{2\,e}$$

$$V = \frac{v^2}{2\,\frac{e}{m}}$$

$$V = \frac{36.10^8}{2.5{,}27.10^{17}}\ \frac{Km^2\,.\,sec^{-2}}{\text{ΗΣΜπ. } gr^{-1}}$$

$$V = \frac{36.10^{18}}{2.5{,}27.10^{17}}\ \frac{cm^2\,.\,sec^{-2}}{\text{ΗΣΜπ. } gr^{-1}}$$

$$V = \frac{360}{10{,}54}\ \text{ΗΣΜ δυναμικοῦ}$$

$$\boxed{V = 10246{,}6\ \text{Volt}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

658. Δίδεται ἠλεκτρόνιον φορτίου $e = 4{,}8.10^{-10}$ ΗΣΜπ κινούμενον μεταξὺ δύο ἠλεκτροδίων σωλῆνος τοῦ Coolidge ὑπὸ τάσιν V.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τάσις αὕτη (V) ἵνα ἡ προκύπτουσα δευτερογενὴς ἀκτινοβολία (Roentgen) ἔχῃ μῆκος κύματος $\lambda = 1800$ Å.

Λύσις: Ἔστω N ἡ συχνότης τῆς ἀκτινοβολίας. Αὕτη θὰ εἶναι:

$$N = \frac{eV}{h} \qquad (1)$$

ὅπου h ἡ σταθερὰ τοῦ Planck ($h = 6{,}6.10^{-27}$ erg . sec).

Ἀφ' ἑτέρου ὅμως ἡ συχνότης αὕτη συνδέεται μὲ τὸ μῆκος κύματος (λ) διὰ τοῦ τύπου

$$N = \frac{c}{\lambda} \qquad (2)$$

ὅπου c ἡ ταχύτης διαδόσεως τῆς ἀκτινοβολίας ($c = 3.10^{10}$ cgs).

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν τότε:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{eV}{h}$$

καί:

$$V = \frac{c.h}{\lambda.e}$$

$$V = \frac{3.10^{10}.6{,}6.10^{-27}}{1800.4{,}8.10^{-10}}\ \frac{cgs.cgs}{\text{Å}.cgs}$$

$$V = \frac{3.6{,}6}{18.4{,}8.10}\ \frac{cgs.cgs}{cm.cgs}$$

$$\boxed{V = 60{,}8 \text{ Volt}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

659. Τρία ἠλεκτρικὰ στοιχεῖα ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως ἑκάστου $u = 2$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 0{,}3$ Ohm συνδέονται ἐν παραλλήλῳ καὶ μὲ ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν $R = 9{,}9$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (V) εἰς τὰ ἄκρα τῆς προκυπτούσης στήλης κατὰ τὴν διάρκειαν διελεύσεως τοῦ ρεύματος.

Λύσις: $V = 1{,}98$ Volt.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

660. Δίδονται τρεῖς ἀγωγοὶ ἀντιστάσεως ἀντιστοίχως $R_1 = 3$ Ohm, $R_2 = 4$ Ohm καὶ $R_3 = 5$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀντίστασις (R_0) ἥτις δύναται νὰ ἐπιτευχθῇ κατὰ τὴν συνένωσιν τῶν τριῶν ἀντιστάσεων.

Λύσις: $R_0 = 0{,}783$ Ohm.

661. Μετρητὴς ἠλεκτρικῆς ποσότητος καταγράφει τὴν διέλευσιν $Q = 10$ Amp. h (ἀμπερωρίων).

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ εἰς τὴν ποσότητα ταύτην (Q) ἀντιστοιχοῦσα ποσότης (q) εἰς Coulomb.

Λύσις: $q = 36000$ Coul.

662. Στήλη ἀποτελεῖται ἐκ $N = 120$ ὁμοίων στοιχείων συνδεδεμένων εἰς δύο ὁμάδας ἐκ $n = 60$ στοιχείων κατὰ σειράν.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις (R) τῆς ὅλης στήλης, ἂν αἱ δύο ἐκ n στοιχείων ὁμάδες συνδεθοῦν κατὰ ποσότητα καὶ ἂν ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις ἑκάστου στοιχείου εἶναι $r = 1{,}5$ Ohm.

Λύσις: $R = 45$ Ohm.

663. Χάλκινος ἀγωγὸς μήκους $l = 10$ m, μάζης $m = 20$ gr καὶ πυκνότητος $d = 8{,}8$ gr/cm^3 παρουσιάζει ἀντίστασιν $R = 0{,}715$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις (ρ) τοῦ Χαλκοῦ.

Λύσις: $\rho = 1{,}62.10^{-6}$ Ohm . cm.

664. Δίδεται συνολικὸς ἀριθμὸς $N = 54$ στοιχείων ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως ἑκάστου $u = 1{,}1$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 20$ Ohm.

Ζητεῖται: Πῶς πρέπει νὰ συνδεθοῦν τὰ στοιχεῖα ταῦτα ἵνα τροφοδοτήσουν διὰ τῆς μεγίστης δυνατῆς ἐντάσεως τηλεγραφικὸν κύκλωμα ἀντιστάσεως $R = 12$ Ohm.

Λύσις: Ἡ σύνδεσις θὰ γίνῃ εἰς $n = 18$ ὁμάδας ἐν παραλλήλῳ ἐκ $m = 3$ στοιχείων ἐν σειρᾷ δι' ἑκάστην.

665. Δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ παράγουσα συνεχὲς ρεῦμα παρουσιάζει διαφορὰν δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα της $V = 220$ Volt ὑπὸ ἔντασιν $I = 125$ Amp.

Ζητεῖται: Πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἰσχὺς (J_0) ἀτμομηχανῆς ἀποδόσεως $N = 74{,}5\,\%$ χρησιμοποιουμένης διὰ τὴν κίνησιν τῆς ὡς ἄνω γεννητρίας.

Λύσις: $J_0 = 99{,}3$ Kw.

666. Μεταλλικὸς ἀγωγὸς ἀντιστάσεως $R = 40$ Ohm τροφοδοτεῖται ὑπὸ ρεύματος παρεχομένου ὑπὸ πηγῆς ἠλεκτρεγερτι-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

κῆς δυνάμεως $U = 120$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 20$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἔντασις (I) τοῦ παρεχομένου ρεύματος καὶ ποία ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (V) εἰς τοὺς πόλους τῆς πηγῆς ὅταν τὸ κύκλωμα εἶναι κλειστόν.

Λύσις: $I = 2$ Amp, $V = 80$ Volt.

667. Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἰσχύος $J = 1$ HP διέρχεται διὰ βολταμέτρου ἐπὶ χρόνον $t = 1$ h.

Ζητεῖται: Πόσην ποσότητα Ὕδατος (m) δύναται νὰ ἠλεκτρολύσῃ ἐντὸς τοῦ ὡς ἄνω χρόνου.

Λύσις: $m = 164$ gr.

668. Στήλη ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως σταθερᾶς συνδέεται μὲ ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν $R_0 = 20$ Ohm, ὁπότε ἡ παρουσιαζομένη ἔντασις ρεύματος εἶναι $I_0 = 10$ Amp. Ἀκολούθως ἡ ἀντίστασις R_0 ἀντικαθίσταται ὑπὸ ἄλλης $R_1 = 40$ Ohm, ὁπότε ἡ ἔντασις γίνεται $I_1 = 8$ Amp καὶ τέλος ὑπὸ ἀντιστάσεως R_2 ἡ ἔντασις γίνεται $I_2 = 9$ Amp.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς στήλης (r) καὶ ποία ἡ ἄγνωστος ἀντίστασις (R_2).

Λύσις: $r = 60$ Ohm, $R_2 = 28{,}9$ Ohm.

669. Δίδεται ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐντάσεως $I = 5$ Amp διερχόμενον δι᾿ ἀγωγοῦ ἀντιστάσεως $R = 7$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα τοῦ ἀγωγοῦ (V).

Λύσις: $V = 35$ Volt.

670. Ὁ συνδέων τοὺς πόλους στήλης ἀγωγὸς διακλαδίζεται εἰς δύο τμήματα ἔχοντα ἀντιστάσεις (R_1 καὶ R_2) μὲ λόγον $R_1/R_2 = 2$.

Ζητεῖται: Ποῖος θὰ εἶναι ὁ λόγος (I_1/I_2) τῶν ἐντάσεων τῶν διερχομένων διὰ τῶν δύο τμημάτων ρευμάτων ὡς καὶ τῶν ἀναπτυσσομένων εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον θερμοτήτων (Θ_1/Θ_2).

Λύσις: $I_1/I_2 = 0{,}5$, $\Theta_1/\Theta_2 = 0{,}5$.

671. Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα στήλης, ἀποτελουμένης ἐκ $N = 3$ στοιχείων ἐν σειρᾷ, ἀντιστάσεως $r = 0{,}5$ Ohm ἑκάστου, διέρχεται δι᾿ ἀγωγῶν ἀμελητέας ἀντιστάσεως καὶ τροφοδοτεῖ ἀμπερόμετρον ὅπερ δεικνύει ἔντασιν $I = 1{,}5$ Amp.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστου στοιχείου (u) ἂν ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀμπερομέτρου εἶναι $R_0 = 0{,}5$ Ohm.

Λύσις: $u = 1$ Volt.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

672. Δίδεται ὑάλινος σωλὴν πλήρης Ὑδραργύρου, δι᾽ οὗ διαβιβάζεται ρεῦμα ἐντάσεως $I=0,75$ Amp ἐπὶ χρόνον $t=5$ min.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσους βαθμοὺς (ϑ) ϑ᾽ ἀνυψωθῇ ἡ θερμοκρασία τοῦ Ὑδραργύρου ἐντὸς τοῦ ὡς ἄνω χρονικοῦ διαστήματος, ἂν ἡ ὁλική της ἀντίστασίς του εἶναι $R=0,47$ Ohm, ἡ μᾶζά του $m = 20,25$ gr καὶ ἡ εἰδικὴ θερμότης του $\varepsilon = 0,0322$ cal/gr. grad, ὑποτιθεμένου τοῦ περιβάλλοντος τὸν Ὑδράργυρον χώρου κακοῦ ἀγωγοῦ τῆς θερμότητος.

Λύσις: $\vartheta = 29,2$ grad.

673. Χάλκινος ἀγωγὸς διαρρεόμενος ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως σταθερᾶς $I = 2$ Amp ἐμβαπτίζεται ἐντὸς ποσότητος $m = 300$ gr ὕδατος, ὁπότε ἐντὸς χρόνου $t = 15$ min ἡ θερμοκρασία τοῦ ὕδατος ἀνέρχεται κατὰ $\vartheta = 2$ grad.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (V) εἰς τὰ ἄκρον τοῦ ἐντὸς τοῦ ὕδατος ἀγωγοῦ, παραλειπομένης τῆς θερμοχωρητικότητος τοῦ ἀγωγοῦ καὶ τοῦ δοχείου.

Λύσις: $V = 0,93$ Volt.

674. Δι᾽ ἠλεκτροθερμαντῆρος ἀντιστάσεως $R = 8$ Ohm διέρχεται ρεῦμα ἐντάσεως σταθερᾶς $I = 15$ Amp.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἰσχὺς (J) τοῦ ρεύματος τούτου.

Λύσις: $J = 1800$ watt.

675. Ἠλεκτρικὴ λυχνία προοριζομένη διὰ διαφορὰν δυναμικοῦ $V_0 = 110$ Volt ἔχει ἰσχὺν $J_0 = 60$ watt.

Ζητεῖται: Ποίαν ἰσχὺν (J) θὰ παρουσιάζει ἂν συνδεθῇ μὲ τοὺς πόλους συστοιχίας διαφορᾶς δυναμικοῦ $V = 12$ Volt.

Λύσις: $J = 0,71$ watt.

676. Ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ εἰς τὰ ἄκρα ἠλεκτρικῆς ἐγκαταστάσεως εἶναι $V = 220$, δι᾽ αὐτῆς δὲ τροφοδοτοῦνται δύο λυχνίαι, ἀντιστάσεως ἑκάστης $R = 100$ Ohm, συνδεδεμέναι ἐν παραλλήλῳ.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ συνολικοῦ παρεχομένου ρεύματος (I) καὶ ποία ἡ τοῦ διερχομένου δι᾽ ἑκάστης λυχνίας (I_0), μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀντιστάσεως τῶν βοηθητικῶν ἀγωγῶν καὶ τῆς πτώσεως τάσεως.

Λύσις: $I = 4,4$ Amp, $I_0 = 2,2$ Amp.

677. Δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἶναι $U = 142,5$ Volt ἡ δ᾽ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις $r = 2$ Ohm.

Ζητεῖται: Πόσους λαμπτῆρας (N) ἀντιστάσεως ἑκάστου $R = 40$ Ohm δύναται αὕτη νὰ τροφοδοτήσῃ ἐν παραλλήλῳ διατεταγμένους, ὥστε τὸ διερχόμενον δι᾽ ἑκάστου ρεῦμα νὰ ἔχῃ ἔν-

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τασιν $I = 0,75$ Amp, μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀντιστάσεως τῶν βοηθητικῶν ἀγωγῶν καὶ ποία θὰ εἶναι τότε ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (V) εἰς τοὺς πόλους τῆς μηχανῆς.

Λύσις: $N = 75$, $V = 30$ Volt.

678. Δύο ὅμοια κατὰ τὰς διαστάσεις σύρματα, τὸν μὲν ἓν ἐξ Ἀργύρου τὸ δ᾿ ἕτερον ἐκ Λευκοχρύσου συνενοῦνται ἐν σειρᾷ τροφοδοτούμενα ὑπὸ ρεύματος σταθερᾶς ἐντάσεως.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ σχέσις τῶν παραγομένων εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ποσοτήτων θερμότητος (Θ_1/Θ_2) ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ χρόνου, ἂν ἡ εἰδικὴ ἀντίστασις τοῦ Ἀργύρου εἶναι $\varrho_1 = 1,6.10^{-6}$ Ohm . cm τοῦ δὲ Λευκοχρύσου $\varrho_2 = 16.10^{-6}$ Ohm . cm.

Λύσις: $\Theta_1/\Theta_2 = 0,1$.

679. Κύκλωμα ἐξωτερικῆς ἀντιστάσεως $R = 1$ Ohm διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος παρεχομένου ὑπὸ στήλης ἐκ $N = 5$ στοιχείων ἴσων συνδεδεμένων κατὰ τάσιν.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἔντασις (I) τοῦ διερχομένου ρεύματος, ἂν ἡ ἀντίστασις καὶ ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστου στοιχείου εἶναι ἀντιστοίχως $r = 0,4$ Ohm καὶ $u = 1,8$ Volt.

Λύσις: $I = 3$ Amp.

680. Ἠλεκτρικὴ λιχνία δεχομένη εἰς τὰ ἄκρα της διαφορὰν δυναμικοῦ $V = 90$ Volt διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως $I = 0,8$ Amp.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἀντίστασις (R) τῆς λιχνίας.

Λύσις: $R = 112,5$ Ohm.

681. Ἠλεκτρικὸς λαμπτήρ, ἰσχύος $J = 55$ watt διὰ τάσιν $V = 110$ Volt, χρησιμοποιούμενος εἰς τάσιν $V' = 220$ Volt ἐργάζεται 6 ὥρας ἡμερησίως ἐπὶ ἕνα μῆνα.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐντὸς τοῦ μηνὸς διερχομένη διὰ τοῦ λαμπτῆρος ποσότης (Q) ἠλεκτρισμοῦ.

Λύσις: $Q = 648000$ Coul.

682. Λαμπτὴρ πυρακτώσεως δεχόμενος εἰς τὰ ἄκρα του τάσιν $V = 60$ Volt καὶ διαρρεόμενος ὑπὸ ρεύματος $I = 0,75$ Amp ἐργάζεται συνεχῶς ἐπὶ χρόνον $t = 1$ h 30 min.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ ἐντὸς τοῦ χρόνου τούτου ἀναπτυσσομένη θερμότης (Θ).

Λύσις: $\Theta = 58630$ cal.

683. Ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως $I = 10$ Amp διακλαδίζεται εἰς τρεῖς ἐν παραλλήλῳ ἀγωγούς, ἀντιστάσεων ἀντιστοίχως $R_1 = 5$ Ohm, $R_2 = 2$ Ohm καὶ $R_3 = 10$ Ohm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποῖαι εἶναι αἱ ἐντάσεις (I_1, I_2 καὶ I_3) τῶν διερχομένων δι᾽ ἑκάστου ἀγωγοῦ ρευμάτων καὶ ποία εἶναι ἡ διαφορὰ δυναμικοῦ (V) εἰς τὰ ἄκρα τούτων.

Λύσις: $I_1 = 2{,}5$ Amp, $I_2 = 6{,}25$ Amp, $I_3 = 1{,}25$ Amp, $V = 12{,}5$ Volt.

684. Δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ τροφοδοτεῖ ἀντίστασιν $R = 40$ Ohm διὰ ρεύματος ἐντάσεως $I = 12$ Amp.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ὠφέλιμος ἰσχύς της (J).

Λύσις: $J = 6{,}97$ HP.

685. Δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 0{,}6$ Ohm τροφοδοτεῖ τρεῖς ἐν σειρᾷ λυχνίας, ἀντιστάσεως ἑκάστης $R = 1{,}8$ Ohm, συνδεδεμένας δι᾽ ἀγωγοῦ συνολικῆς ἀντιστάσεως $R_0 = 1{,}2$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ λόγος (N) τῆς παρεχομένης ὑπὸ τῆς μηχανῆς ἰσχύος πρὸς τὴν καταναλισκομένην ὑπὸ τῶν λυχνιῶν.

Λύσις: $N = 1{,}33$.

686. Μεταξὺ τῶν πόλων ἠλεκτρικῆς πηγῆς σταθερᾶς διαφορᾶς δυναμικοῦ $V = 105$ Volt συνδέονται ἑπτὰ λυχνίαι ἐν παραλλήλῳ, ἀντιστάσεως ἑκάστης $R_0 = 130$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἔντασις (I_0) τοῦ δι᾽ ἑκάστης λυχνίας διερχομένου ρεύματος ὡς καὶ ποία ἡ ἔντασις (I) τοῦ ὁλικοῦ ρεύματος.

Λύσις: $I_0 = 0{,}807$ Amp, $I = 5{,}649$ Amp.

687. Αὐτοκίνητον μάζης $m = 3$ tonn ἀναχωροῦν ἐκ τῆς ἠρεμίας καὶ κινούμενον ἐπὶ ὁριζοντίου ἐδάφους διανύει διάστημα $S = 360$ m ἐντὸς χρόνου $t = 60$ sec ὁπότε ἡ ταχύτης του γίνεται $v = 20$ Km/h.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ κίνησις τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι ὁμαλῶς ἐπιταχυνομένη καὶ προκαλεῖται ὑπὸ ἠλεκτροκινητῆρος ἀποδόσεως $n = 90\,\%$ δεχομένου τάσιν $V = 100$ Volt, ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις (I) τοῦ τροφοδοτοῦντος τὸν κινητῆρα ρεύματος.

Λύσις: $I = 18{,}5$ Amp.

688. Κύκλωμα διαρρεόμενον ὑπὸ ρεύματος σταθερᾶς ἐντάσεως (I) περιλαμβάνει ἐν σειρᾷ ἀγωγὸν ἀντιστάσεως R (ἀγνώστου) καὶ βολτάμετρον περιέχον ἠλεκτρολυόμενον ἅλας Χαλκοῦ (δισθενοῦς).

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἀντιστάσεως ταύτης (R) ἂν ἡ εἰς τὰ ἄκρα της διαφορὰ δυναμικοῦ εἶναι $V = 20$ Volt ἐνῷ ἐντὸς χρόνου $t = 40$ min ἠλεκτρολήθη ποσότης Χαλκοῦ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$m = 0,791$ gr, δεδομένου τοῦ ἀτομικοῦ βάρους τοῦ χαλκοῦ $\alpha = 63,6$.

Λύσις: $R = 20$ Ohm.

689. Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως διαρρέει δύο βολτάμετρα ἐν σειρᾷ, ἐξ ὧν τὸ ἓν περιέχῃ Νιτρικὸν Ἄργυρον τὸ δ' ἕτερον Νιτρικὸν Χαλκὸν (δισθενῆ).

Ζητεῖται: Πόση ποσότης Χαλκοῦ (m) θὰ ἐναποτεθῇ εἰς τὴν κάθοδον τοῦ δευτέρου βολταμέτρου καθ' ὃν χρόνον εἰς τὴν τοῦ πρώτου ἐναποτίθεται ποσότης Ἀργύρου $m_0 = 2,78$ gr, δεδομένων τῶν ἀτομικῶν βαρῶν ἀντιστοίχως τοῦ μὲν Χαλκοῦ $\mu = 63,6$ τοῦ δ' Ἀργύρου $\mu_0 = 108$.

Λύσις: $m = 0,81$ gr.

690. Ρεῦμα ἐντάσεως $I = 10$ Amp διέρχεται διὰ βολταμέτρου περιέχοντος Θειϊκὸν Χαλκὸν ἐπὶ χρόνον $t = 1$ h.

Ζητεῖται: Πόσος Χαλκὸς (m) θὰ ἐναποτεθῇ ἐπὶ τῆς καθόδου.

Λύσις: $m = 11,85$ gr.

691. Ἀγωγὸς διαρρεόμενος ὑπὸ ρεύματος ἐντάσεως σταθερᾶς $I = 20$ Amp διακλαδίζεται εἰς δύο τμήματα, ἐξ ὧν τὸ μὲν ἓν διέρχεται διὰ βολταμέτρου περιέχοντος Νιτρικὸν Ἄργυρον τὸ δ' ἕτερον δι' ὀξυνισμένου ὕδατος.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἐντάσεως εἰς ἓν ἕκαστον τῶν τμημάτων (I_1 καὶ I_2) ὥστε νὰ ἠλεκτρολυθοῦν ἴσαι κατὰ βάρος ποσότητες Ἀργύρου καὶ Ὀξυγόνου ὡς καὶ πόσον Ὀξυγόνον (m) καὶ Ὑδρογόνον (m') θὰ ἠλεκτρολυθοῦν εἰς χρόνον $t = 1$ h.

Λύσις: $I_1 = 18,6$ Amp, $I_2 = 1,4$ Amp, $m = 5,55$ gr, $m' = 0,696$ gr.

592. Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα ἐντάσεως σταθερᾶς $I = 300$ Amp διέρχεται ἐπὶ χρόνον $t = 8$ h διὰ $N = 30$ βολταμέτρων περιεχόντων ὀξυνισμένον ὕδωρ.

Ζητεῖται: Πόσον Ὀξυγόνον (m) θὰ ἐλευθερωθῇ ἐν συνόλῳ.

Λύσις: $m = 21,5$ gr.

693. Διὰ χαλκίνων ἀγωγῶν μεταφέρεται ἠλεκτρικὴ ἐνέργεια συνεχοῦς ρεύματος εἰς ἀπόστασιν $l = 6$ Km ἀπὸ τῆς δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐτησία ἀπώλεια ἔργου (W) ἕνεκα θερμάνσεως τῶν ἀγωγῶν ἂν ἡ μεταφερομένη ἰσχὺς εἶναι $J = 10$ Kw ὑπὸ τάσιν $V = 6000$ Volt (δεδομένης τῆς εἰδικῆς ἀντιστάσεως τοῦ Χαλκοῦ $\varrho = 1,7.10^{-6}$ Ohm . cm.

Λύσις: $W = 14200$ Kwh.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

694. Εἰς κύκλωμα ἀποτελούμενον ἐκ τριῶν ἐν παραλλήλῳ ἀντιστάσεων, τιμῆς ἀντιστοίχως $R_1 = 10$ Ohm, $R_2 = 50$ Ohm καὶ $R_3 = 30$ Ohm προστίθεται τετάρτη ἐν παραλλήλῳ ἀντίστασις, ὁπότε ἡ ὅλη ἀντίστασις γίνεται $R = 2$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς τετάρτης ἀντιστάσεως (R_4).

Λύσις: $R_4 = 2{,}88$ Ohm.

695. Λιχνία ἰσχύος $J_1 = 60$ watt διὰ $V = 120$ Volt συνδέεται ἐν παραλλήλῳ μὲ ἑτέραν λιχνίαν ἰσχύος $J_2 = 40$ watt διὰ τὴν αὐτὴν τάσιν.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς συνθέτου ἀντιστάσεως (R).

Λύσις: $R = 144$ Ohm.

696. Ἠλεκτροθερμαντήρ, ἀντιστάσεως $R = 38$ Ohm διαρρέεται ἐπὶ χρόνον $t = 4{,}6$ min ὑπὸ ρεύματος $I = 3{,}3$ Amp, θερμαίνει δὲ ποσότητα ὕδατος $M = 590$ gr περιεχομένην ἐντὸς θερμιδομέτρου μάζης $m = 87$ gr.

Ζητεῖται: Κατὰ πόσους βαθμοὺς (Θ) θὰ θερμανθῇ τὸ ὕδωρ, ἂν ἡ εἰδικὴ θερμότης τοῦ μετάλλου τοῦ θερμιδομέτρου εἶναι $\varepsilon = 0{,}09$ cal/gr.grad (μὴ ὑπολογιζομένης τῆς ἀπωλείας ἐξ ἀκτινοβολίας).

Λύσις: $\Theta = 45{,}7$ grad.

697. Τρία ἠλεκτρικὰ στοιχεῖα ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $u = 1{,}4$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 0{,}8$ Ohm συνδέονται μὲ ἐξωτερικὴν ἀντίστασιν $R = 9$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποῖαι εἶναι αἱ τιμαὶ (R_0 καὶ I_0) τῆς ὁλικῆς ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως καὶ τῆς ἐντάσεως τοῦ ρεύματος διὰ σύνδεσιν ἐν σειρᾷ καὶ ποῖαι (R_1 καὶ I_1) διὰ σύνδεσιν ἐν παραλλήλῳ.

Λύσις: $R_0 = 2{,}4$ Ohm, $I_0 = 0{,}368$ Amp, $R_1 = 0{,}27$ Ohm, $I_1 = 0{,}15$ Amp.

698. Δι' ἀμπερομέτρου πρακτικῶς βαθμολογημένου ἔντασις ρεύματος $I_0 = 0{,}00013$ Amp προκαλεῖ ἀπόκλισιν ἀντίστοιχον πρὸς $n = 1$ ὑποδιαίρεσιν τῆς κλίμακος.

Ζητεῖται: Πόση ἀντίστασις ἐν παραλλήλῳ πρέπει νὰ προστεθῇ (R) ὡς πρὸς τὸ ἀμπερόμετρον, ὥστε ρεῦμα συνολικῆς ἐντάσεως $I_1 = 0{,}01$ Amp νὰ προκαλέσῃ ἀπόκλισιν $n = 1$, ἂν ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τοῦ ὀργάνου εἶναι $r = 5{,}6$ Ohm.

Λύσις: $R = 0{,}0738$ Ohm.

699. Ὁ κύριος κινητὴρ τροχιοδρομικοῦ ὀχήματος ἀπορροφᾷ ρεῦμα ἐντάσεως $I_1 = 80$ Amp ὑπὸ τάσιν $V = 550$ Volt, οἱ δὲ βοηθητικοὶ κινητῆρες τούτου (ἀεραντλιῶν κλπ.) ρεῦμα ἐντάσεως $I_2 = 50$ Amp ὑπὸ τὴν αὐτήν τάσιν.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ συνολικῶς ἀπορροφουμένη ἰσχὺς (J) ἂν τὰ δύο κυκλώματα (I_1 καὶ I_2) εἶναι ἐν παραλλήλῳ συνδεδεμένα ὑπὸ τὴν ὡς ἄνω τάσιν (V).

Λύσις: $J = 71{,}5$ Kw.

700. Δίδεται ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς καὶ φωτιζομένου οἰκήματος $l = 650$ m, ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις τῆς μηχανῆς $V = 465$ Volt καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν τροφοδοτουμένων λιχνιῶν $N = 250$ ἰσχύος ἑκάστης $J = 55$ watt (ὑπὸ τάσιν V).

Ζητεῖται: 1) Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος (R) ὥστε ἡ πτῶσις δυναμικοῦ νὰ εἶναι $v = 5\,\%$.

2) Ποία ἡ τομὴ τῶν ἀγωγῶν (σ) ἂν ἡ εἰδικὴ ἀντίστασίς των εἶναι $\rho = 1{,}5 . 10^{-6}$ Ohm . cm.

3) Ποία ἡ προσφερομένη ὑπὸ τῆς μηχανῆς ἰσχὺς (J) καὶ ποία ἡ ἀπορροφουμένη ὑπὸ ταύτης (J_0) κατὰ τὴν κίνησίν της μέσῳ βενζινοκινητῆρος.

Λύσις: $R = 0{,}932$ Ohm, $\sigma = 0{,}209$ cm², $J = 11{,}597$ watt, $J_0 = 15{,}4$ HP.

701. Μιλλιαμπερόμετρον περιέχει $N = 50$ ὑποδιαιρέσεις, ἔχει δὲ ἐσωτερικὴν ἀντίστασιν $r = 40$ Ohm καὶ δεικνύει ἔντασιν $I_0 = 5$ mA δι᾿ ἑκάστην ὑποδιαίρεσιν.

Ζητεῖται: Πόση ἀντίστασις (R) ἐν σειρᾷ ὡς πρὸς τὸ ὄργανον πρέπει νὰ τεθῇ, ὥστε τοῦτο νὰ δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ διὰ μεγίστας τάσεις μέχρι $V = 300$ Volt.

Λύσις: $R = 1160$ Ohm.

702. Δι᾿ ἀγωγοῦ δεχομένου εἰς τὰ ἄκρα του τάσιν $V = 110$ Volt παράγεται θερμότης $\Theta = 1000$ cal/min.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀντίστασις (R) τοῦ ἀγωγοῦ.

Λύσις: $R = 173{,}4$ Ohm.

703. Ρεῦμα σταθερᾶς ἐντάσεως $I = 30$ Amp διέρχεται ἐπὶ χρόνον $t = 1$ h διὰ βολταμέτρου περιέχοντος ὀξυνισμένον ὕδωρ.

Ζητεῖται: Πόσον ὄγκον Ὑδρογόνου (v) θὰ ἐκλύσῃ ὑπὸ κανονικὰς συνθήκας, ὑφ᾿ ἃς τὸ Ὑδρογόνον ἔχει πυκνότητα $d = 0{,}000089$ gr/cm³.

Λύσις: $v = 12700$ cm³.

704. Δίδονται δύο ἠλεκτρικὰ στοιχεῖα διαφορετικῆς ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως (u_1 καὶ u_2) καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως (r_1 καὶ r_2). Συνδέονται κατ᾿ ἀρχὴν ἐν σειρᾷ μέσῳ ἑνὸς γαλβανομέτρου ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως R_0 ὁπότε ἡ ἔνδειξις τοῦ ρεύματος

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εἶναι $n_1 = 56$ ὑποδιαιρέσεως τοῦ ὀργάνου, ἀκολούθως συνδέονται ἐν σειρᾷ κατ' ἀντίθετον φορὰν ὥστε νὰ προκύψουν ρεύματα ἀντίρροπα, ὁπότε ἡ ἔνδειξις τοῦ ὀργάνου εἶναι $n_2 = 8$.

Ζητεῖται: Ποῖος εἶναι ὁ λόγος (u_1/u_2) τῶν ἠλεκτρεγερτικῶν δυνάμεων, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι αἱ ἐνδείξεις τοῦ γαλβανομέτρου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὴν ἑκάστοτε ἔντασιν τοῦ ρεύματος.

Λύσις: $u_1/u_2 = 4/3$.

705. Δίδεται δυναμοηλεκτρικὴ μηχανὴ ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως U=310 Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως R=20 Ohm.

Ζητεῖται: Πόσα στοιχεῖα ἀπαιτοῦνται καὶ πῶς θὰ συνδεθοῦν ταῦτα, ὥστε νὰ προκύψῃ στήλη ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ὡς ἄνω μηχανήν, ἂν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστου στοιχείου εἶναι u = 1,06 Volt καὶ ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις r = 4 Ohm.

Λύσις: N = 17289 στοιχεῖα μικτῶς συνδεδεμένα εἰς n = 59 σειρὰς ἐκ m = 293 στοιχείων δι' ἑκάστην.

706. Πρὸς τροφοδότησιν ἠλεκτρικῆς φωτιστικῆς ἐγκαταστάσεως ἀπαιτεῖται τάσις V = 54 Volt, εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστης λιχνίας, μὲ ρεῦμα συνολικῆς ἐντάσεως I = 2 Amp, παρεχομένη ὑπὸ στήλης ἐκ στοιχείων ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως u=1,8 Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r = 0,6 Ohm.

Ζητεῖται: Πόσα στοιχεῖα ἀπαιτοῦνται (N) καὶ πῶς πρέπει νὰ εἶναι ταῦτα συνδεδεμένα ὥστε ἕκαστον στοιχεῖον νὰ παρέχει ἔντασιν i = 0,5 Amp.

Λύσις: N = 144 στοιχεῖα εἰς n = 4 σειρὰς ἐκ m = 36 στοιχείων δι' ἑκάστην.

707. Διὰ βολταμέτρου ἅλατος χαλκοῦ δισθενοῦς ὑφισταμένου πόλωσιν διέρχεται ρεῦμα παρεχόμενον ὑπὸ στήλης ἐκ N = 4 στοιχείων ἐν σειρᾷ ἐπὶ χρόνον t = 5 min.

Ζητεῖται: Πόσος χαλκὸς (m) θὰ ἐναποτεθῇ ἐπὶ τῆς καθόδου ἂν ἡ ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις ἑκάστου στοιχείου εἶναι u = 1,08 Volt, ἡ ἐσωτερικὴ ἀντίστασίς του r = 1,5 Ohm, ἡ ὁλικὴ λοιπὴ ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος R = 0,25 Ohm ἡ ἀντηλεκτρεγερτικὴ δύναμις u′ = 1,32 Volt, καὶ τὸ ἀτομικὸν βάρος τοῦ χαλκοῦ α = 64.

Λύσις: m = 0,047 gr.

708. Τηλεγραφικὸν κύκλωμα ἀποτελεῖται ἐκ μιᾶς στήλης (ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως u = 50 Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως r = 80 Ohm) ἑνὸς σύρματος ἰσοπαχοῦς ἀντιστάσεως R = 80 Ohm καὶ ἑνὸς δέκτου ἀντιστάσεως R′ = 5 Ohm, τοῦ κυκλώματος κλειομένου διὰ τῆς γῆς (ἀμελητέας ἀντιστάσεως).

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Εἰς σημεῖόν τι τοῦ ἐναερίου ἀγωγοῦ φέρεται εἰς ἐπαφὴν μεταλλικὸν σύρμα, ἀντιστάσεως R_x, συνδεδεμένον μὲ τὴν γῆν, ὁπότε ἡ ἔντασις παρὰ τὴν στήλην γίνεται $I_1 = 0{,}84$ Amp παρὰ δὲ τὸν δέκτην $I_2 = 0{,}084$ Amp.

Ζητεῖται: Ποῖον εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ σύρματος καὶ ποία ἡ ἀντίστασίς του (R_x).

Λύσις: $R_x = 5$ Ohm (εἰς τὸ μέσον ἀκριβῶς τοῦ ἐναερίου ἀγωγοῦ).

709. Δύο σημεῖα (Α καὶ Β) συνδέονται διὰ τριῶν ἐν παραλλήλῳ ἀγωγῶν. Εἰς ἕκαστον τῶν δύο πρώτων ἀγωγῶν παρεντίθενται ἀνὰ μία στήλη ὁμοία ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $u = 1{,}751$ Volt ἡ δὲ ἀντίστασις τούτων (περιλαμβανομένων τῶν στηλῶν παρεχουσῶν ρεύματα φορᾶς ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β) εἶναι ἀντιστοίχως $R_1 = 3$ Ohm, $R_2 = 5$ Ohm καὶ $R_3 = 11$ Ohm.

Ζητεῖται: Ποῖαι θὰ εἶναι αἱ ἐπὶ μέρους ἐντάσεις τῶν τριῶν ρευμάτων (I_1, I_2 καὶ I_3).

Λύσις: $I_1 = 85$ mA, $I_2 = 51$ mA καὶ $I_3 = 136$ mA.

710. Δίδονται $N = 12$ στοιχεῖα ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως ἑκάστου $u = 2$ Volt καὶ ἐσωτερικῆς ἀντιστάσεως $r = 0{,}3$ Ohm, συνδεδεμένα εἰς $n = 3$ σειρὰς ἐκ $m = 4$ στοιχείων καὶ κλείοντα κύκλωμα ἀντιστάσεως $R = 0{,}4$ Ohm.

Ζητεῖται: Πόση θερμότης (Θ) θὰ παραχθῇ ἐντὸς χρόνου $t = 1$ h εἰς τὸ ἐξωτερικὸν κύκλωμα.

Λύσις: $\Theta = 34449$ cal.

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

711. Δύο ὅμοιοι μαγνητικοὶ πόλοι τιθέμενοι εἰς ἀπόστασιν $R = 20$ cm ἀπωθοῦνται διὰ δυνάμεως $F = 1$ gr*.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μαγνητικὴ μᾶζα (Μ) ἑκάστου.

Λύσις: Λαμβάνοντες τὸν τύπον τοῦ Coulomb

$$F = K\frac{M.M'}{R^2}$$

διὰ $K = 1$ καὶ $M = M'$ ἔχομεν:

$$M = R\sqrt{F}$$

$$M = 20\sqrt{981}\ \text{cm}\,.\,\text{dynes}^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{M = 626{,}418\ \text{cgs}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

712. Μαγνητικὴ μᾶζα $M = 981$ cgs μαγν. τιθεμένη ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἔνθα ἡ ἔντασίς του εἶναι $H = 250$ cgs ἐντ. ὠθεῖται μὲ δύναμιν τινὰ F.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς δυνάμεως ταύτης (F).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$H = \frac{F}{M}$$

ἔχομεν

$$F = H \cdot M$$

$$F = 250.981 \text{ dynes}$$

$$\boxed{F = 250 \text{ gr}^*}$$

713. Ἐντὸς ὁμοιομόρφου μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως σταθερᾶς $H = 3000$ Gauss τίθεται μικρὸς μαγνήτης μήκους $l = 20$ cm φέρων ποσότητας εἰς ἕκαστον πόλον $M = 35000$ cgs ποσότητος.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ προσδιδομένη εἰς τὸν μαγνήτην ροπὴ (P) ἂν οὗτος τεθῇ καθέτως πρὸς τὰς μαγνητικὰς γραμμάς.

Λύσις: Ἡ ἐπὶ ἑκάστου πόλου ἐμφανιζομένη δύναμις θὰ ἔχῃ προφανῶς τιμὴν

$$F = M \cdot H \tag{1}$$

ὁπότε αἱ δύο ἴσαι καὶ ἀντίθετοι δυνάμεις F ἐνεργοῦσαι εἰς ἀπόστασιν l ἀπ᾽ ἀλλήλων καὶ ἀποτελοῦσαι ζεῦγος προσδίδουν ροπὴν

$$P = F \cdot l$$

ἤτοι, ὡς ἐκ τῆς (1):

$$P = M \cdot H \cdot l$$

$$P = 35000.3000.20 \text{ erg}$$

$$\boxed{P = 210 \text{ joules}}$$

714. Μαγνητικὴ ροὴ $\Phi = 933$ Maxwell διαπερᾷ ἐπιφάνειαν $S = 311$ cm² ἔχουσαν κλίσιν $\varphi = 30^0$ ὡς πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς.

Ζητεῖται: Ἂν τὸ μαγνητικὸν πεδίον εἶναι ὁμοιογενὲς μὲ παραλλήλως τὰς δυναμικὰς γραμμάς του ποία εἶναι ἡ ἔντασίς του (H).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς μαγνητικῆς ροῆς

$$\Phi = H \cdot S \cdot \eta\mu\varphi$$

ἔχομεν:

$$H = \frac{\Phi}{S \cdot \eta\mu\varphi}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$H = \frac{933}{311.0,5} \text{ Gauss}$$

$$\boxed{H = 6 \text{ Gauss}}$$

715. Δίδεται μαγνήτης φέρων μαγνητικὴν μᾶζαν εἰς ἕκαστον πόλον $M = 340$ cgs καὶ μαγνήτισιν $J = 8,5$ cgs μονάδων μαγνητίσεως.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τομή του (σ).

Λύσις: Ἡ μαγνητικὴ ροπὴ (P) καὶ ἡ μαγνήτισις (J) μαγνήτου συνδέονται διὰ τῶν δύο τύπων

$$P = M \, . \, l \tag{1}$$

$$J = \frac{P}{v} \tag{2}$$

ὅπου M ἡ μαγνητικὴ μᾶζα ἑκάστου πόλου, l τὸ μῆκος καὶ v ὁ ὄγκος τοῦ ὅλου μαγνήτου.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν ἀντιστοίχως:

$$l = \frac{P}{M} \tag{1,α}$$

$$v = \frac{P}{J} \tag{2,α}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι ὁ ὄγκος v εἶναι:

$$v = l \, . \, σ$$

ἡ τομὴ τοῦ μαγνήτου θὰ εἶναι:

$$σ = \frac{v}{λ}$$

ἤ, ὡς ἐκ τῶν (1,α) καὶ (2,α):

$$σ = \frac{\frac{P}{J}}{\frac{P}{M}}$$

$$σ = \frac{M}{J}$$

$$\boxed{σ = 40 \text{ cm}^2}$$

716. Ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ὁμοιογενοῦς σταθερᾶς ἐντάσεως $H = 300$ Gauss τίθεται τεμάχιον σιδήρου ὁπότε ἡ ἐντὸς

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τούτου ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου γίνεται B=630000 Gauss.

Ζητεῖται: Ποίος εἶναι ὁ συντελεστὴς μαγνητικῆς ἐπιδεκτικότητος (κ) τοῦ σιδήρου.

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς

$$\mu = \frac{B}{H}$$

ὅπου μ ὁ συντελεστὴς μαγνητικῆς διαπερατότητος, καὶ ἐκ τοῦ τύπου

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa$$

ἔχομεν:

$$\frac{B}{H} = 1 + 4\pi\varkappa$$

ὁπότε εἶναι:

$$\varkappa = \frac{B - H}{4\pi H}$$

$$\varkappa = \frac{629700}{4.3{,}14.300}$$

$$\boxed{\varkappa = 171{,}6}$$

717. Τεμάχιον σιδήρου κυλινδρικόν, μήκους $l = 20$ cm καὶ τομῆς $\sigma = 2$ cm² τίθεται παραλλήλως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμὰς ὁμοιογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου, ἐντάσεως σταθερᾶς H = 500 Gauss.

Ζητεῖται: Ποίαν μαγνητικὴν ῥοπὴν (P) θ' ἀποκτήση καὶ πόση θὰ εἶναι ἡ μαγνητικὴ μᾶζα ἑκάστου πόλου, ἂν ὁ συντελεστὴς μαγνητικῆς ἐπιδεκτικότητος τοῦ σιδήρου εἶναι $\varkappa = 150$.

Λύσις: Ἔστω J ἡ προσδιδομένη ὑπὸ τοῦ πεδίου μαγνήτισις. Αὕτη θὰ εἶναι:

$$J = \varkappa H \tag{1}$$

εἶναι ὅμως ἀφ' ἑτέρου καὶ ἐξ ὁρισμοῦ

$$J = \frac{P}{v} \tag{2}$$

ὅπου P ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ καὶ v ὁ ὄγκος τοῦ μαγνήτου.

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν τότε:

$$\varkappa H = \frac{P}{v}$$

ἤτοι:

$$P = \varkappa H v \tag{3}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καὶ ἐπειδὴ

$$v = l \, . \, \sigma$$

ἡ σχέσις (3) γίνεται :

$$P = \varkappa H l \sigma \tag{4}$$

$$P = 150.500.20.2 \text{ cgs}$$

$$\boxed{P = 3.10^6 \text{ cgs}}$$

Ἀφ' ἑτέρου διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς μαγνητικῆς μάζης ἔχομεν τὸν τύπον :

$$P = M \, . \, l$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν :

$$M = \frac{P}{l}$$

καί, ὡς ἐκ τῆς (4) :

$$M = \varkappa H \sigma$$

$$M = 150.500.2 \text{ cgs}$$

$$\boxed{M = 15.10^4 \text{ cgs}}$$

718. Ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H=6000 Gauss τίθεται διαμαγνητικὸν σῶμα, ὁπότε ἡ ἐντὸς τούτου ἔντασις τοῦ πεδίου γίνεται B = 5900 Gauss.

Ζητεῖται : Ποῖος εἶναι ὁ συντελεστὴς μαγνητικῆς ἐπιδεκτικότητος τοῦ διαμαγνητικοῦ ($\varkappa$).

Λύσις : Ἐκ τοῦ τύπου

$$\mu = \frac{B}{H}$$

καὶ τοῦ

$$\mu = 1 + 4\pi\varkappa$$

ἔχομεν :

$$\frac{B}{H} = 1 + 4\pi\varkappa$$

$$\varkappa = \frac{B - H}{4\pi H}$$

$$\varkappa = \frac{5900 - 6000}{4.3,14.6000}$$

$$\boxed{\varkappa = -\,0,0132}$$

719. Μαγνητισμένη ῥάβδος ἔχουσα μαγνητικὴν ῥοπὴν $P_0 = 300$ cgs τίθεται ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$H = 6250$ Gauss καθέτως πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν μαγνητικῶν γραμμῶν του.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ στατικὴ ῥοπὴ (P) ἣν θὰ ὑποστῇ ὁ μαγνήτης καὶ πόση ἡ γωνιώδης ἐπιτάχυνσίς του (ω′), ἂν ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας του εἶναι $K = 1875$ gr . cm².

Λύσις: Ἔστω λ τὸ μῆκος τοῦ μαγνήτου καὶ M ἡ μαγνητικὴ μᾶζα ἑκάστου πόλου. Θὰ ἰσχύῃ τότε ἡ σχέσις

$$M = \frac{P_0}{\lambda} \tag{1}$$

ὁπότε ἡ ἐπὶ ἑκάστου πόλου ἀσκουμένη δύναμις (F) τοῦ προκύπτοντος ζεῦγος θὰ ἔχῃ τιμὴν

$$F = MH$$

ἤτοι, ὡς ἐκ τῆς (1):

$$F = \frac{HP_0}{\lambda} \tag{2}$$

Τότε ἡ στατικὴ ῥοπὴ τοῦ ζεύγους τῶν δύο ἐπὶ τῶν πόλων ἀσκουμένων ἴσων καὶ ἀντιθέτων δυνάμεων θὰ εἶναι

$$P = F\lambda$$

ἤτοι, δυνάμει τῆς (2):

$$P = \frac{HP_0}{\lambda} . \lambda$$

$$P = HP_0 \tag{3}$$

$$P = 6250.300 \text{ erg}$$

$$\boxed{P = 1875.10^3 \text{ erg}}$$

Πρὸς εὕρεσιν ἀκολούθως τῆς γωνιώδους ἐπιταχύνσεως

$$\omega' = \frac{P}{K}$$

$$\omega' = \frac{HP_0}{K}$$

ἔχομεν:

$$\omega' = \frac{6250.300}{1875} \text{ sec}^{-2}$$

$$\boxed{\omega' = 1000 \text{ sec}^{-2}}$$

720. Μικρὸς μαγνήτης, ῥοπῆς ἀδρανείας $K = 81$ gr . cm² ἐξαρτώμενος διὰ λεπτοῦ νήματος ἀπὸ τοῦ μέσου του τίθεται

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ἐντὸς ἰσχυροῦ ὁριζοντίου μαγνητικοῦ πεδίου σταθερᾶς ἐντάσεως $H = 270$ Gauss, οὕτως ὥστε ἡ διεύθυνσίς του νὰ μὴ συμπίπτῃ μὲ τὴν τῶν μαγνητικῶν γραμμῶν.

Ζητεῖται: Ἂν ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ τοῦ μαγνήτου εἶναι $P_0 = 30$ cgs ποία θὰ εἶναι ἡ περίοδος (T) αἰωρήσεώς του ἐντὸς τοῦ πεδίου.

Λύσις: Ἔστω F ἡ ἐπὶ ἑκάστου πόλου ἀσκουμένη δύναμις καὶ l τὸ μῆκος τοῦ μαγνήτου.

Ἡ περίοδος αἰωρήσεώς του (T) θὰ εἶναι τότε:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{Fl}} \qquad (1)$$

καὶ ἐπειδὴ εἶναι

$$F = \frac{P_0 H}{l} \qquad (2)$$

ἡ (1) γίνεται:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{P_0 H}} \qquad (3)$$

$$T = 6{,}28 \sqrt{\frac{81}{30.270}} \text{ sec}$$

$$\boxed{T = 0{,}628 \text{ sec}}$$

721. Εὐθὺς κυλινδρικὸς μαγνήτης μήκους $\lambda = 25$ cm καὶ τομῆς $\sigma = 4$ cm², ἐξαρτώμενος διὰ λεπτοῦ νήματος ἐκ τοῦ μέσου του καὶ τιθέμενος ἐντὸς ὁριζοντίου μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως σταθερᾶς $H = 100$ Gauss παρουσιάζει τὴν αὐτὴν περίοδον αἰωρήσεως μὲ τὴν ἑνὸς μαθηματικοῦ ἐκκρεμοῦς μήκους $l = 30$ cm εἰς τόπον ἔνθα εἶναι $g = 1000$ cm/sec².

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μαγνήτισις (J) τοῦ μαγνήτου ἂν ἡ ῥοπὴ ἀδρανείας του εἶναι $K = 300$ gr.cm².

Λύσις: Ἔστω T ἡ περίοδος τοῦ ἐκκρεμοῦς καὶ ἡ τοῦ μαγνήτου καὶ P_0 ἡ μαγνητικὴ ῥοπή του. Ἔχομεν τότε τὰς δύο σχέσεις:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (1)$$

καὶ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{P_0 H}} \qquad (2)$$

ὡς ἐκ τοῦ τύπου (3) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει τότε:

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{K}{P_0 H}}$$

ἤτοι:

$$\frac{l}{g} = \frac{K}{P_0 H} \qquad (3)$$

ἐπειδὴ ὅμως εἶναι:

$$P_0 = Jv$$

ὅπου v ὁ ὄγκος τοῦ μαγνήτου, καὶ

$$v = \lambda\sigma$$

ἡ (3) γίνεται:

$$\frac{l}{g} = \frac{K}{J\lambda\sigma H}$$

καὶ ἡ μαγνήτισις (J) ἔχει τότε τιμὴν

$$J = \frac{Kg}{l\lambda\sigma H}$$

$$J = \frac{300.10^3}{30.25.4.100}\ \mathrm{cgs}$$

$$\boxed{J = 1\ \mathrm{cgs}}$$

722. Δίδεται ὁ λόγος (η) τῆς μαγνητικῆς ῥοπῆς πρὸς τὴν ῥοπὴν ἀδρανείας μικροῦ μαγνήτου

$$\left(\eta = P_0/K = 1000\ \mathrm{gr}^{-\frac{1}{2}}.\mathrm{cm}^{\frac{1}{2}}.\mathrm{sec}^{-1}\right)$$

ἐξηρτημένου διὰ λεπτοῦ νήματος ἀπὸ τοῦ μέσου του καὶ εὑρισκομένου ἐντὸς ὁριζοντίου μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἔντασις (H) τοῦ μαγνητικοῦ τούτου πεδίου ἵνα ὁ μαγνήτης παλλόμενος ἐντὸς τούτου παράγῃ ἦχον συχνότητος $N = 550\ \mathrm{sec}^{-1}$.

Λύσις: Συμφώνως πρὸς τὴν σχέσιν (2) τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἡ περίοδος αἰωρήσεως τοῦ μαγνήτου θὰ εἶναι:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{P_0 H}}$$

ἡ δὲ συχνότης του

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{P_0 H}{K}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

καί, ἐπειδὴ $\eta = P_0/K$:

$$N = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\eta H}$$

ὁπότε, λύοντες ὡς πρὸς H εὑρίσκομεν:

$$H = \frac{4\pi^2 N^2}{\eta}$$

$$H = \frac{39{,}48.550^2}{1000}\ \text{Gauss}$$

$$H = \frac{39{,}48.302500}{1000}\ \text{Gauss}$$

$$\boxed{H = 11942{,}7\ \text{Gauss}}$$

723. Κύλινδρος ἐκ μαλακοῦ σιδήρου συντελεστοῦ μαγνητικῆς διαπερατότητος $\mu = 1500$ τίθεται ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $H = 261$ Gauss παραλλήλως πρὸς τὰς δυναμικὰς γραμμάς του.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ διὰ τοῦ κυλίνδρου τούτου διερχομένη μαγνητικὴ ροὴ (Φ), ἂν τὸ μῆκος του εἶναι $l = 87$ cm ὁ δὲ ὄγκος $V = 29$ cm³.

Λύσις: Ἡ ἐντὸς τοῦ κυλίνδρου ἔντασις τοῦ πεδίου (B) ὡς ἐκ τῆς μαγνητικῆς ἐπαγωγῆς θὰ εἶναι:

$$B = \mu H \tag{1}$$

Ἀφ' ἑτέρου ἡ κυκλικὴ τομή του (σ) ἔχει τιμὴν

$$\sigma = \frac{V}{l} \tag{2}$$

ὁπότε ἡ ὅλη μαγνητικὴ ροὴ (Φ) διδομένη ἐκ τοῦ τύπου

$$\Phi = B\sigma$$

εἶναι, ὡς ἐκ τῶν τιμῶν τῶν B καὶ σ ἐκ τῶν (1) καὶ (2):

$$\Phi = \frac{\mu H V}{l}$$

$$\Phi = \frac{1500.261.29}{87}\ \text{Maxwell}$$

$$\boxed{\Phi = 130500\ \text{Maxwell}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

724. Βόρειος μαγνητικὸς πόλος μαγνητικῆς μάζης $M = 396$ cgs ἀπέχει τοῦ Νοτίου πόλου, μάζης $M' = -552$ cgs, ἄλλου μαγνήτου κατ᾽ ἀπόστασιν $D = 467{,}5$ cm.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μεταξὺ τῶν πόλων τούτων ἀσκουμένη δύναμις ἕλξεως (F).

Λύσις: $F = -1$ dyne.

725. Δύο ἴσαι μαγνητικαὶ μᾶζαι τιθέμεναι εἰς ἀπόστασιν $d = 121$ cm ἀποθοῦνται διὰ δυνάμεως $F = 184041$ dynes.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ ἑκάστης μαγνητικῆς μάζης (M).

Λύσις: $M = 51909$ cgs.

726. Δίδεται μαγνήτης μήκους $l = 6$ cm φέρων μαγνητικὰς μάζας ἐπὶ τῶν πόλων του τιμῆς ἑκάστης $M = \pm 160$ cgs.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ ἔντασις (H) τοῦ προκαλουμένου μαγνητικοῦ πεδίου εἰς ἀπόστασιν $S = 40$ cm ἀπὸ τοῦ μαγνήτου ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον του.

Λύσις: $H = 0{,}015$ Gauss.

727. Διὰ νὰ διατηρηθῇ εἰς τὴν θέσιν της μία ὁριζοντία μαγνητικὴ βελόνη σχηματίζουσα γωνίαν $\varphi = 60^\circ$ μὲ τὰς μαγνητικὰς γραμμὰς τοῦ γηΐου μαγνητικοῦ πεδίου ἀπαιτεῖται σταθερὰ στατικὴ ῥοπὴ $P = 1{,}2$ erg.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μαγνητικὴ ῥοπὴ (P_0) τῆς βελόνης ἂν τὸ μαγνητικὸν πεδίον ἔχῃ ἔντασιν κατὰ τὴν ὁριζόντιον συνιστῶσαν $H = 0{,}2$ Gauss.

Λύσις: $P_0 = 6{,}1$ cgs.

728. Εἰς σημεῖόν τι τῆς Γῆς ἡ ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου εἶναι $H_1 = 0{,}2$ Gauss, εἰς ἕτερον σημεῖον αὕτη εἶναι $H_2 = 0{,}18$ Gauss.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ συχνότης (N_2) βελόνης παλλομένης καὶ εὑρισκομένης εἰς τὸ δεύτερον σημεῖον ἂν ἡ συχνότης της εἰς τὸ πρῶτον εἶναι $N_1 = 1/3\ \text{sec}^{-1}$.

Λύσις: $N_2 = 25/79\ \text{sec}^{-1}$.

729. Μαγνητικὴ βελόνη ἔχουσα εἰς ἕκαστον πόλον μαγνητικὴν μᾶζαν $M_1 = 1936$ cgs τιθεμένη ἐντὸς ὁμογενοῦς μαγνητικοῦ πεδίου παρουσιάζει περίοδον αἰωρήσεως $T_1 = 44$ sec.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ μαγνητικὴ μᾶζα ἑκάστου πόλου (M_2) ἑτέρας μαγνητικῆς βελόνης τῶν αὐτῶν διαστάσεων, ἂν

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

αὔτη τιθεμένη ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ πεδίου παρουσιάζῃ περίοδον $T_2 = 35$ sec.

Λύσις: $M_2 = 1225$ cgs.

730. Μαγνητικὴ βελόνη φέρουσα εἰς ἕκαστον πόλον μαγνητικὴν μᾶζαν $M_1 = 361$ cgs τιθεμένη ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου παρουσιάζει περίοδον αἰωρήσεως $T_1 = 13$ sec.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ μαγνητικὴ ροπὴ (P_2) ἑτέρας βελόνης μήκους $\lambda_2 = 20$ cm παλλομένης μὲ περίοδον $T_2 = 19$ sec ἐντὸς τοῦ αὐτοῦ μαγνητικοῦ πεδίου.

Λύσις: $P_2 = 3380$ cgs.

731. Χάλυψ συντελεστοῦ μαγνητικῆς ἐπιδεκτικότητος $\varkappa = 180$ τιθέμενος ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως H λαμβάνει μαγνήτισιν $J = 54000$ cgs.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἔντασις (H) τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου καὶ ποίαν μαγνητικὴν ροπὴν (P_0) θ' ἀποκτήσῃ ὁ χάλυψ καθιστάμενος μαγνήτης, ἂν ὁ ὄγκος του εἶναι $v = 6$ cm³.

Λύσις: $H = 3000$ cgs, $P_0 = 324000$ cgs.

732. Μηγνητικὴ βελόνη τιθεμένη ἐντὸς μαγνητικοῦ πεδίου ἐντάσεως $H_1 = 2401$ Gauss πάλλεται παράγουσα ἦχον συχνότητος $N_1 = 49$ sec^{-1}.

Ζητεῖται: Πόση πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου (H_2) ἵνα ἡ αὐτὴ βελόνη παλλομένη παράγῃ ὑπόηχον συχνότητος $N_2 = 13$ sec^{-1}.

Λύσις: $H_2 = 169$ Gauss.

733. Ἓν ἄτομον ὑδρογόνου, θεωρούμενον ὡς ἁπλοῦς στοιχειώδης μαγνήτης παρουσιάζει μαγνητικὴν ροπὴν

$$P = 0{,}9.10^{-20} \text{ cgs.}$$

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ μαγνητικὴ μᾶζα (M) ἑκάστου πόλου τοῦ ἀτόμου, ἂν ἡ ἀκτὶς τούτου ἔχῃ τιμὴν $R = 2{,}08$ Å.

Λύσις: $M = 2{,}16.10^{-13}$ cgs.

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ

734. Σωληνοειδὲς μήκους $l = 20$ cm ἀποτελούμενον ἐκ συνολικοῦ ἀριθμοῦ σπειρῶν $N = 3000$ διαρρέεται ὑπὸ ρεύματος σταθερᾶς ἐντάσεως $I = 0{,}1$ Amp.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ἔντασις (B) τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου ἐντὸς τοῦ σωληνοειδοῦς ὅταν ἐντὸς αὐτοῦ τεθῇ σιδηροῦς πυρὴν μαγνητικῆς διαπερατότητος $\mu = 1600$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου (H) εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ πεδίου ἄνευ πυρῆνος εἶναι:

$$H = \frac{1,25\,NI}{l} \qquad (1)$$

ὁπότε, ὡς ἐκ τῆς προκαλουμένης ἐπαγωγῆς αὕτη κατὰ τὴν προσθήκην τοῦ πυρῆνος γίνεται

$$B = \mu H$$

ἤτοι, ὡς ἐκ τῆς (1):

$$B = \frac{1,25\mu NI}{l}$$

$$B = \frac{1,25.1600.3000.0,1}{20}\ \text{Gauss}$$

$$\boxed{B = 30000\ \text{Gauss}}$$

735. Ἐντὸς ὁριζοντίου σωληνοειδοῦς τίθεται μαγνητικὴ βελόνη μαγνητικῆς ῥοπῆς $P = 4410$ cgs καὶ ῥοπῆς ἀδρανείας $K = 49$ gr.cm² στηριζομένη ἐπὶ ἄξονος κατακορύφου.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ περίοδος αἰωρήσεως τῆς βελόνης (T) ἂν τὸ σωληνοειδὲς ἀποτελεῖται ἀπὸ σπείρας $n = 490\ cm^{-1}$ καὶ διαρρέεται ὑπὸ ῥεύματος ἐντάσεως $I = 1,25$ Amp.

Λύσις: Ἡ περίοδος αἰωρήσεως τῆς βελόνης (T) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{PH}} \qquad (1)$$

ὅπου H ἡ ἔντασις τοῦ πεδίου, ἥτις εἶναι

$$H = 1,25\,nI$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{1,25\,nIP}}$$

$$T = 6,28 \sqrt{\frac{49}{1,25.490.1,25.4410}}\ \text{sec}$$

$$\boxed{T = 0,023\ \text{sec}}$$

736. Δίδεται ῥεῦμα ἐναλλασσόμενον συχνότητος $N = 50$ sec^{-1} ὅπερ διαρρέει ἀγωγὸν ὠμείου ἀντιστάσεως $R = 400$ Ohm, ὁπότε ἡ συνολικὴ ἀντίστασις τοῦ ἀγωγοῦ διὰ τὸ ἐναλλασσόμενον ῥεῦμα παρουσιάζει συνολικὴν τιμὴν $R_0 = 500$ Ohm.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς αὐτεπαγωγῆς (L) τοῦ ἀγωγοῦ.

Λύσις: Ἡ κυκλικὴ συχνότης (ω) τοῦ ρεύματος ἔχει προφανῶς τιμὴν

$$\omega = 2\pi N$$

ὁπότε ὁ τύπος

$$R_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

γίνεται:

$$R_0 = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 N^2 L^2}$$

Λύοντες ἀκολούθως τὸν τελευταῖον τοῦτον τύπον ὡς πρὸς L ἔχομεν:

$$L = \frac{1}{2\pi N}\sqrt{R_0^2 - R^2}$$

$$L = \frac{1}{6{,}28.50}\sqrt{500^2 - 400^2} \text{ Henry}$$

$$\boxed{L = 0{,}955 \text{ Henry}}$$

737. Δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς ἐναλλασσομένου ρεύματος ἡ ὠφέλιμος ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις εἰς τὰ ἄκρα τῶν πόλων της εἶναι $U = 95{,}5$ Volt, ἡ ἐσωτερική της ὤμειος ἀντίστασις $R = 0{,}4$ Ohm καὶ ὁ συντελεστὴς αὐτεπαγωγῆς τῶν πηνίων της $L = 0{,}001$ Henry.

Ζητεῖται: Ποία θὰ εἶναι ἡ ὠφέλιμος ἔντασις (I) τοῦ ὑπὸ τῆς μηχανῆς παραγομένου ρεύματος, ἂν αὕτη συνδεθῇ μὲ ἐξωτερικὸν κύκλωμα ἀντιστάσεως $R_0 = 9{,}042$ Ohm (ἀμελητέας αὐτεπαγωγῆς), δεδομένου ὅτι τὸ ρεῦμα ἔχει συχνότητα περιόδων $N = 50 \text{ sec}^{-1}$.

Λύσις: Ἡ ὁλικὴ ἐσωτερικὴ ἀντίστασις τῆς μηχανῆς (R_1) θὰ ἔχῃ τιμὴν

$$R_1 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

ἤτοι:

$$R_1 = \sqrt{R^2 + 4\pi^2 N^2 L^2} \tag{1}$$

ὁπότε ἡ ἐφαρμογὴ τοῦ νόμου τοῦ Ohm εἰς τὸ κλειστὸν κύκλωμο δίδει:

$$I = \frac{U}{R_1 + R_0}$$

ἤτοι, ὡς ἐκ τῆς (1):

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 N^2 L^2} + R_0}$$

$$\boxed{I = 10 \text{ Amp}}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

738. Ἠλεκτρικὸν ρεῦμα διαρρέει ἀγωγὸν ἐν σειρᾷ ὡς πρὸς τὸν ὁποῖον παρεντίθεται πυκνωτὴς χωρητικότητος C.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ συχνότης (N) τοῦ ρεύματος ὥστε ὁ πυκνωτὴς νὰ δράσῃ ὡς τέλειος διακόπτης.

Λύσις: Ἵνα ὁ πυκνωτὴς δράσῃ ὡς τέλειος διακόπτης πρέπει ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος νὰ λάβῃ τιμὴν

$$I = 0$$

ὁπότε ἡ σύνθετος ἀντίστασις δέον ὅπως ἔχῃ τιμὴν

$$R_0 = \infty$$

Εἶναι ὅμως

$$R_0 = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(C\omega)^2}}$$

ὁπότε διὰ νὰ εἶναι $R_0 = \infty$ πρέπει κατ᾽ ἀκολουθίαν νὰ εἶναι

$$\frac{1}{C^2\omega^2} = \infty$$

ἤτοι

$$C^2\omega^2 = 0$$

ἐπειδὴ ὅμως τὸ C εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς συμπεραίνομεν ὅτι θὰ εἶναι :

$$\omega = 0$$

ἐξ οὗ

$$\boxed{N = 0}$$

Ἄρα τὸ ρεῦμα πρέπει νὰ εἶναι συνεχές.

739. Ἠλεκτρικὸν ἐναλλασσόμενον ρεῦμα διαρρέει ἀγωγὸν φέροντα ἐν σειρᾷ πυκνωτὴν χωρητικότητος $C = 600\ \mu F$.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ αὐτεπαγωγὴ (L) τοῦ ἀγωγοῦ, ὥστε τὸ ρεῦμα ὑπὸ σταθερὰν διαφορὰν δυναμικοῦ νὰ παρουσιάζῃ τὴν μεγίστην δυνατὴν ἔντασίν του, ἂν ἡ συχνότης του εἶναι περιόδων $N = 60\ sec^{-1}$.

Λύσις: Διὰ νὰ παρουσιάζεται ἡ μεγίστη δυνατὴ ἔντασις πρέπει ἡ σύνθετος ἀντίστασις νὰ εἶναι ἐλαχίστη, ὁπότε θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος τοῦ Thomson :

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ὃν λύοντες ὡς πρὸς L ἔχομεν :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 N^2 C}$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

$$L = \frac{1}{39{,}48.60^2.600.10^{-6}} \text{ Henry}$$

$$\boxed{L = 0{,}07 \text{ Henry}}$$

740. Δίδεται στατικὸς μεταμορφωτὴς τροφοδοτούμενος ὑπὸ ρεύματος ἰσχύος $J = 6000$ Kwatt.

Ζητεῖται : Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν σπειρῶν (N_1/N_2) τοῦ μεταμορφωτοῦ τούτου ὥστε ἡ νέα ἔντασις εἰς τὸ δευτερεῦον κύκλωμα νὰ λάβῃ τιμὴν $I_2 = 0{,}03$ Amp, δεδομένης τῆς τάσεως εἰς τὸ πρωτεῦον κύκλωμα $V_1 = 360$ Volt.

Λύσις : Εἰς τὸν τύπον

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

Θέτοντες τὴν τιμὴν τῆς ἐντάσεως I_1 ἐκ τῆς σχέσεως

$$I_1 = \frac{J}{V_1}$$

ἔχομεν :

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2 V_1}{J}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{0{,}03.360}{6000} \frac{\text{Amp. Volt}}{\text{Kwatt}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{0{,}03.360}{6000.10^3} \frac{\text{Amp. Volt}}{\text{Amp. Volt}}$$

$$\boxed{\frac{N_1}{N_2} = \frac{18}{10000000}}$$

741. Στατικὸς μεταμορφωτὴς παρέχει εἰς τὸ δευτερεῦον κύκλωμα ρεῦμα ἐντάσεως I_2 ὑπὸ τάσιν $V_2 = 30000$ Volt.

Ζητεῖται : Ποῖος εἶναι ὁ λόγος τῶν σπειρῶν (N_1/N_2) ἂν ἡ ἀπώλεια ἐντὸς τοῦ μεταμορφωτοῦ εἶναι $\eta = 2\,\%$ καὶ ἡ τάσις εἰς τὸ πρωτεῦον $V_1 = 9000$ Volt.

Λύσις : Ὁ λόγος τῶν σπειρῶν εἶναι

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{I_2}{I_1} \qquad (1)$$

ἀφ' ἑτέρου ὅμως ἐκ τῆς σχέσεως

$$98\, I_1 V_1 = 100\, I_2 V_2$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τῆς I_1:

$$I_1 = \frac{100\ I_2 V_2}{98\ V_1}$$

Θέτοντες ἀκολούθως ταύτην εἰς τὴν (1) ἔχομεν:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{98.I_2V_1}{100.I_2V_2}$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{98.9000}{100.30000}$$

$$\boxed{\frac{N_1}{N_2} = \frac{147}{500}}$$

742. Ὁ ραδιοφωνικὸς πομπὸς Ἀθηνῶν ἐκπέμπει ἑρτζιανὰ κύματα μήκους λ=499 m.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ συχνότης τῶν κυμάτων τούτων (N).

Λύσις: Ἐκ τοῦ τύπου

$$N = \frac{c}{\lambda}$$

ἔχομεν:

$$N = \frac{3.10^{10}}{499}\ \frac{cm\,.\,sec^{-1}}{m}$$

$$N = \frac{3.10^{10}}{499.10^2}\ \frac{cm\,.\,sec^{-1}}{cm}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} N = 601202\ sec^{-1} \\ N = 601{,}202\ KHz \end{array}}$$

Ἤτοι ἡ συχνότης εἶναι 601202 παλμῶν κατὰ sec ἢ Κύκλων ἢ Ἕρτζ (cl ἢ Hz), ἢ 601,202 χιλιοκύκλων ἢ χιλιοέρτζ (Kcl ἢ KHz).

743. Ραδιοφωνικὸς πομπὸς μεσαίων κυμάτων ἐκμπέμπει ἐνέργειαν μὲ μῆκος κύματος λ = 660 m.

Ζητεῖται: Πόση εἶναι ἡ ἐνέργεια ἑκάστου ἐκπεμπομένου quantum (E) καὶ πόσοι παλμοὶ (n) θὰ παραχθοῦν συνολικῶς ἵνα μιὰ τοιαύτη ἀκτινοβολία διαγράψῃ μίαν ὁλόκληρον γηΐνην περιφέρειαν, ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς Γῆς εἶναι R = 6030 Km.

Λύσις: Ἔστω N ἡ συχνότης τῆς ἐμπεμπομένης ἀκτινοβολίας. Αὕτη θὰ εἶναι

$$N = \frac{c}{\lambda} \qquad (1)$$

ὅπου εἶναι $c = 3.10^{10}\ cm\,.\,sec^{-1}$.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ἡ ἐνέργεια ἑκάστου quantum (E) θὰ εἶναι τότε

$$E = hN$$

ἤτοι, ὡς ἐκ τῆς (1):

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

$$E = \frac{6,6.10^{-27}.3.10^{10}}{660}\ \frac{erg\,.\,sec\,.\,cm\,.\,sec^{-1}}{m}$$

$$E = \frac{6,6.3.10^{-17}}{660.10^{2}}\ \frac{erg\,.\,cm}{cm}$$

$$\boxed{E = 3.10^{-21}\ erg}$$

Ἐν συνεχείᾳ, πρὸς εὕρεσιν τοῦ συνολικοῦ ἀριθμοῦ παλμῶν (n) ἔχομεν κατ᾽ ἀρχὴν τὸ μῆκος τῆς γηΐνης περιφερείας (Π):

$$\Pi = 2\pi R \qquad (2)$$

ὁπότε ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος διὰ μίαν τοιαύτην διαδρομὴν θὰ εἶναι:

$$t = \frac{\Pi}{c}$$

ἤτοι, ἐκ τῆς (2):

$$t = \frac{2\pi R}{c} \qquad (3)$$

καὶ ἐξ αὐτῶν:

$$n = t\,.\,N$$

ἤτοι, ἐκ τῶν (1) καὶ (3):

$$n = \frac{2\pi Rc}{c\lambda}$$

$$n = \frac{2\pi R}{\lambda}$$

$$n = \frac{6,28.6030}{660}\ \frac{Km}{m}$$

$$\boxed{n = 57376}$$

744. Ἠλεκτρικὸν κύκλωμα ταλαντώσεων ἀποτελεῖται ἀπὸ αὐτεπαγωγὴν L = 0,0256 Henry καὶ πυκνωτὴν (C) ἐν σειρᾷ.

Ζητεῖται: Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ χωρητικότης (C) τοῦ πυκνωτοῦ, ὥστε τὸ κύκλωμα νὰ εὑρίσκεται συντονισμένον μὲ πομπὸν βραχέων κυμάτων μήκους λ=16 m.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Λύσις: Διὰ νὰ εὑρίσκεται τὸ κύκλωμα ἐν συντονισμῷ πρέπει ἡ συχνότης τοῦ πομποῦ (N) νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἰδιοσυχνότητα τοῦ κυκλώματος, ὁπότε θὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος τοῦ Thomson:

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ἐξ οὗ ἔχομεν:

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

καὶ τελικῶς:

$$C = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 L c^2}$$

$$C = \frac{16^2}{39{,}47.0{,}0256.9.10^{20}} \, \frac{m^2 . sec^2}{Henry . cm^2}$$

$$\boxed{C = 2{,}8.10^{-9}\ \mu F}$$

745. Ραδιοφωνικὸς πομπὸς βραχέων κυμάτων ἐκπέμπων ἐπὶ μήκους κύματος $\lambda = 31$ m ἔχει ἰσχὺν $J = 27$ Kw.

Ζητεῖται: Πόσην ἐνέργειαν (W) θὰ ἐκπέμπει καθ' ἕκαστον παλμόν.

Λύσις: Ὁ χρόνος ἑκάστου παλμοῦ (περίοδος τῆς κυμάνσεως T) θὰ εἶναι προφανῶς:

$$T = \frac{\lambda}{c} \qquad (1)$$

ὁπότε ἡ εἰς τὸν χρόνον τοῦτον ἀντιστοιχοῦσα ἐνέργεια (W) θὰ εἶναι:

$$W = J . T$$

ἤτοι, ὡς ἐκ τῆς (1):

$$W = \frac{J\lambda}{c}$$

$$W = \frac{27.31}{3.10^{10}} \, \frac{Kw . m. sec}{cm}$$

$$W = \frac{27.31.10^5}{3.10^{10}} \, \frac{joules . cm . sec}{sec . cm}$$

$$\boxed{W = 27900\ erg}$$

746. Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα συχνότητος $N = 150$ Hz διαρρέει ἀγωγὸν αὐτεπαγωγῆς $L = 0{,}1$ Henry.

Ζητεῖται: Ποίας χωρητικότητος (C) πυκνωτὴς πρέπει νὰ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

τεθῇ ἐν σειρᾷ, ὥστε τὸ ρεῦμα νὰ διέλθῃ μὲ τὴν μικροτέραν δυνατὴν ἀντίστασιν.

Λύσις: Διὰ νὰ παρουσιάζῃ κύκλωμά τι τὴν μικροτέραν δυνατὴν ἀντίστασιν πρέπει νὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος τοῦ Thomson.

$$N = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ὁπότε θὰ εἶναι :

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L N^2}$$

$$C = \frac{1}{39{,}47 . 0{,}1 . 150^2}\ \text{Farad}$$

$$\boxed{C = 11{,}2\ \mu F}$$

747. Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα, μεγίστης ἐντάσεως $I_\mu = 1{,}5$ Amp καὶ κυκλικῆς συχνότητος $\omega = 400\ \text{sec}^{-1}$ διέρχεται δι' ἀγωγοῦ ὠμείου ἀντιστάσεως $R = 3$ Ohm καὶ αὐτεπαγωγῆς $L = 0{,}01$ Henry.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἰσχύς του (J_ε).

Λύσις: Ἡ ἐνεργὸς ἰσχὺς δίδεται συναρτήσει τῆς ὁλικῆς ἀντιστάσεως (R_0) καὶ τῆς ἐνεργοῦ ἐντάσεως (I_ε) ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$J_\varepsilon = I_\varepsilon{}^2 . R_0 \tag{1}$$

ὅπου εἶναι

$$I_\varepsilon = \frac{I_\mu}{\sqrt{2}}$$

καὶ

$$R_0 = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

ὁπότε ὁ τύπος (1) γίνεται :

$$J_\varepsilon = \frac{I_\mu{}^2 . \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}{2}$$

$$\boxed{J_\varepsilon = 562{,}5\ \text{watt}}$$

748. Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα συχνότητος $N = 36\ \text{sec}^{-1}$ διαρρέει ἀγωγὸν μὲ μεγίστην δυνατὴν ἔντασιν $I_\mu = 6{,}1$ Amp.

Ζητεῖται: Πόση θὰ εἶναι ἡ στιγμιαία ἔντασις (I) εἰς χρόνον $t = 4$ sec ἀπὸ τῆς στιγμῆς καθ' ἣν αὐτὴ ἦτο $I' = 0$.

Λύσις: Ἡ στιγμιαία ἔντασις (I) δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$I = I_\mu . \eta\mu\varphi$$

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ὅπου ἡ γωνία φ (εἰς ἀκτίνια) εἶναι :

$$\varphi = 2\pi Nt$$

$$\varphi = 288\,\pi$$

ἤτοι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 2π, ὁπότε θὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$\eta\mu\,288\,\pi = \eta\mu\,2\pi = 0$$

δυνάμει τῆς ὁποίας ἐκ τῆς (1) ἔχομεν :

$$\boxed{I = 0}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

749. Ἐντὸς σωληνοειδοῦς ἀποτελουμένου ἐκ $N = 500$ σπειρῶν τίθεται πυρὴν ἐκ σιδήρου συντελεστοῦ μαγνητικῆς διαπερατότητος $\mu = 1300$.

Ζητεῖται : Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐντὸς τοῦ πυρῆνος ἔντασις τοῦ μαγνητικοῦ πεδίου (H) ἂν τὸ σωληνοειδὲς ἔχῃ μῆκος $l = 28{,}6$ cm καὶ τὸ διαρρέον τοῦτο ρεῦμα ἔντασιν $I = 2{,}2$ Amp.

Λύσις : $H = 62500$ Gauss.

750. Ἡ διερχομένη διὰ σωληνοειδοῦς, τομῆς $\sigma = 5$ cm², μαγνητικὴ ροὴ εἶναι $\Phi = 6500$ Maxwell.

Ζητεῖται : Ποία εἶναι ἡ ἔντασις τοῦ ρεύματος (I) τοῦ διαρρέοντος τὸ σωληνοειδές, ἂν τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ $N = 325$ σπειρῶν, ἔχῃ μῆκος $l = 62{,}5$ cm καὶ περιέχῃ πυρῆνα συντελεστοῦ μαγνητικῆς διαπερατότητος $\mu = 1000$.

Λύσις : $I = 0{,}1$ Amp.

751. Δύο ὅμοιοι παράλληλοι ἰσοπαχεῖς, ἀγωγοὶ τομῆς $\sigma = 2$ cm² καὶ μήκους $l = 120$ cm διαρρέονται ὑπὸ ὁμορρόπων συνεχῶν ρευμάτων ἐντάσεων $I_1 = 981$ Amp καὶ $I_2 = 380$ Amp, ἀπέχουν δὲ ἀλλήλων κατὰ $d = 3$ cm.

Ζητεῖται : Μὲ πόσην δύναμιν (F) θ᾽ ἀπωθοῦνται οἱ δύο οὗτοι ἀγωγοί.

Λύσις : $F = 0{,}304$ Kg*.

752. Ἐναλλασσόμενον ρεῦμα παρεχόμενον ὑπὸ γεννητρίας ἐνεργοῦ ἠλεκτρεγερτικῆς δυνάμεως $U = 4000$ Volt διαρρέει κύκλωμα φέρον ἐν σειρᾷ πυκνωτὴν χωρητικότητος $C = 2$ μF.

Ζητεῖται : Ποία θὰ εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις (I) τοῦ ρεύματος, ἂν ἡ συνολικὴ ὤμειος ἀντίστασις τοῦ κυκλώματος εἶναι $R = 6$ Ohm, ἡ αὐτεπαγωγή του $L = 0{,}5$ Henry καὶ ἡ συχνότης τῆς ἐναλλαγῆς $N = 50$ Hz.

Λύσις : $I = 2{,}8$ Amp.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

753. Ἡ ἰσχὺς ἠλεκτρικῆς καμίνου, τροφοδοτουμένης ὑπὸ τριφασικοῦ ρεύματος, εἶναι $J = 5000$ Kw, τὸ ἡμίτονον τῆς διαφορᾶς φάσεως εἶναι ημφ $= 0{,}85$, ἡ δὲ ἐνεργὸς τάσις μεταξὺ δύο φάσεων εἶναι $V = 100$ Volt.

Ζητεῖται: Ποία εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἔντασις (I) τοῦ διαρρέοντος ἕκαστον ἠλεκτρόδιον ρεύματος.

Λύσις: $I = 34000$ Amp.

754. Μεταμορφωτὴς ἰσχύος $J = 100$ Kw χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν ἀνύψωσιν τάσεως ἀπὸ $V_1 = 2200$ Volt εἰς $V_2 = 16500$ Volt, ἔχει δὲ εἰς τὸ πρωτεῦον $N_1 = 880$.

Ζητεῖται: Πόσαι πρέπει νὰ εἶναι αἱ σπεῖραι τοῦ δευτερεύοντος (N_2) καὶ ποῖαι αἱ ἐντάσεις (I_1 καὶ I_2) ὑπὸ τὰς ὡς ἄνω τάσεις (V_1, V_2).

Λύσις: $N_2 = 6600$, $I_1 = 45{,}5$ Amp, $I_2 = 6{,}06$ Amp.

755. Ἡ μεγίστη ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις γεννητρίας ἐναλλασσομένου ρεύματος εἶναι $U_\mu = 141{,}4$ Volt.

Ζητεῖται: Πόση εἶναι ἡ ἐνεργὸς ἠλεκτρεγερτικὴ δύναμις (U_ε) τῆς γεννητρίας ταύτης.

Λύσις: $U_\varepsilon = 100$ Volt.

ΤΕΛΟΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελὶς	I
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	»	1-16
ΠΙΝΑΚΕΣ	»	17
I. ΜΗΧΑΝΙΚΗ	»	17
Κινητικὴ	»	40
Στατικὴ	»	62
Δυναμικὴ	»	136
Γενικαὶ Ἀσκήσεις Μηχανικῆς	»	164
II. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΓΡΩΝ	»	164
Ὑδροστατικὴ	»	205
Ὑδροδυναμικὴ	»	211
III. ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΑΕΡΙΩΝ	»	211
Ἀεροστατικὴ	»	235
Ἀεροδυναμικὴ - συνοχὴ - συνάφεια	»	242
IV. ΘΕΡΜΟΤΗΣ	»	242
Θερμοστατικὴ	»	264
Θερμοδυναμικὴ	»	282
V. ΑΚΟΥΣΤΙΚΗ	»	297
VI. ΟΠΤΙΚΗ	»	328
VII. ΗΛΕΚΤΡΙΣΜΟΣ	»	328
Στατικὸς Ἠλεκτρισμὸς	»	342
Δυναμικὸς Ἠλεκτρισμὸς	»	371
Μαγνητισμὸς	»	381
Ἠλεκτρομαγνητισμὸς		

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟΥΛΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ. 7, τύπος 51, ἀντὶ V=ὄγκος κυλίνδρου» γράφε «v=ὄγκος κυλίνδρου».
» 78, στῖχος 7 (ἐκ τῶν κάτω), ἀντὶ $\varphi_1=60^0$ γράφε $\varphi_1=30^0$.
» 79, Σχ. 14 ἀντὶ 60^0 γράφε 30^0.
» 89, στῖχος 3, ἀντὶ 1/5, γράφε 4/5.
» 112, » 7 (καὶ περαιτέρω), ν' ἀντικατασταθῇ τὸ ημφ διὰ $\sqrt{2}/2$ ἀντὶ $\sqrt{2}$.
» 117, στῖχος 11 (καὶ περαιτέρω), ἀντὶ $T=4\pi$, γράφε $T=2\pi$.
» 205, » 3 καὶ 4, ἀντὶ d, d^3 γράφε d^{-1}, d^{-3} καὶ ἀντὶ d^4 γράφε d^{-2}.
» 282, » 2 καὶ 7, ἀντὶ 7,2 γράφε 7,8.
» 331, » 7, ἀντὶ Volt . μF, γράφε Volt . F.
» 331, » 8, ἀντὶ 0,13, γράφε 13.10^3.
» 331, » 9, νὰ γραφῇ τὸ ἀποτέλεσμα 260,2 Volt.
» 341, ἄσκ. 623, ἀντὶ Q=60 Coul, γράφε Q=60 **ΗΣΜπ.**
» 343, ἄσκ. 633, ἀντὶ Ohm, γράφε μ . Ohm.

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟΥΛΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟΥΛΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟΥΛΗΣ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ

129-145 (21/3/61) [illegible]

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

"ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΕΝΩΣΕΩΣ ΚΑΘΗΓΗΤΩΝ„

1) Μ. ΤΣΕΛΙΟΥ: **Παγκόσμιος Γεωγραφία.** Διὰ τοὺς ὑποψηφίους Ἀνωτ. Ἐμπορικῆς, Ἰκάρων, Ἐμποροπλοιάρχων. Δρχ. 25.000

2) » » **Βαλκανικὴ Γεωγραφία.** Διὰ τοὺς ὑποψηφίους Εὐελπίδων καὶ Δοκίμων. Δρχ. 12.000.

3) Ρ. ΤΡΙΑΝΤΑΦΥΛΛΙΔΗ: **Ἱστορία.** Διὰ τὴν Σχολὴν Εὐελπίδων. Δρχ. 10.000.

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

0020638109
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

387

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής