ΝΙΚ. Ε. ΝΥΣΤΕΡΑΚΗ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

Δρ. 3.

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΙΩΑΝΝΗΣ Α. ΚΟΛΛΑΡΟΣ

'Αριθ. { Πρωτ. 12825 / Διεκπ. 10923 }

'Εν 'Αθήναις τῇ Αὐγούστου 1909.

ΒΑΣΙΛΕΙΟΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

ΤΟ ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΤΩΝ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΗΜΟΣ. ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

Πρὸς τὸν κ. **Ι. Δ. Κολλάρον**

Γνωρίζομεν ὑμῖν, ὅτι κατ' ἀπόφασιν τῆς ἐπὶ τῆς ἐκδόσεως τῶν διδακτικῶν βιβλίων ἐποπτικῆς ἐπιτροπῆς, ἡ τιμὴ τῆς **Θεωρητικῆς 'Αριθμητικῆς** *ὑπὸ Ν. Νυστεράκη, ἐκ φύλλων τυπογραφικῶν 15, ὡρίσθη εἰς* **δραχμὰς (3),** *τὸ δὲ ἐπιθετέον βιβλιόσημον χρώματος ῥοδίνου, ἔσται ἀξίας* **μιᾶς δραχμῆς καὶ εἴκοσι ἓξ λεπτῶν (1,26).**

'Εντελλόμεθα, ὅπως συμμορφωθῆτε πρὸς τὰς ἀποφάσεις ταύτης, ἐκτυπώσητε δὲ τὴν παροῦσαν ἐπὶ τῆς ἐσωτερικῆς ὄψεως τοῦ περικαλύμματος τοῦ βιβλίου, κάτωθι τῆς θέσεως εἰς ἣν κατὰ νόμον ἐπικολλᾶται τὸ βιβλιόσημον.

Ὁ Ὑπουργὸς

Κ. ΓΕΡΟΚΩΣΤΟΠΟΥΛΟΣ

Γ. ΒΕΝΘΥΛΟΣ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΚΑΙ ΤΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ

ΣΥΝΤΑΧΘΕΙΣΑ

ΚΑΤΑ ΤΟ ΙΣΧΥΟΝ ΝΥΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ

ΥΠΟ

ΝΙΚΟΛ. Ε. ΝΥΣΤΕΡΑΚΗ

Καθηγητοῦ τοῦ ἐν Ἡρακλείῳ Γυμνασίου

Ἐγκριθεῖσα ἐν τῷ κατὰ τὸν νόμον ͵ΓΣΑ΄ διαγωνισμῷ διὰ τὴν τετραετίαν 1909—1913 ὡς μόνον διδακτικὸν βιβλίον

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΕΚΔΟΤΗΣ ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ,,

44 — Ἐν ὁδῷ Σταδίου — 44

1909

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

1. **Ποσόν.**—Τὸ μῆκος ὑφάσματος ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν· ὁμοίως τὸ πλάτος αὐτοῦ· ἐν γένει:

Πᾶν ὅ,τι ἐπιδέχεται αὔξησιν καὶ ἐλάττωσιν λέγεται ποσόν.

2. **Μέτρησις. Μονάς.**—Τοῦτο τὸ ὕφασμα ἔχει μῆκος δύο πήχεων, ἄλλο τριῶν τετάρτων καὶ ἄλλο δύο καὶ ἡμίσεος πήχεων. Δηλ. τὰ διάφορα μήκη συγκρίνομεν πρὸς ἓν γνωστὸν μῆκος, τὸν πῆχυν, καὶ εὑρίσκομεν ἕκαστον πόσους πήχεις περιέχει ἢ ποῖα καὶ πόσα μέρη τοῦ πήχεως ἢ καὶ ἀπὸ τὰ δύο, ἤτοι πήχεις ὁλοκλήρους καὶ μέρη αὐτοῦ. Ἡ τοιαύτη σύγκρισις λέγεται *μέτρησις* ποσοῦ, *μονὰς* δὲ τὸ ποσόν, πρὸς ὃ γίνεται ἡ σύγκρισις, καὶ ἥτις εἶναι ὁμοειδὴς τῷ συγκεκριμένῳ πρὸς αὐτὴν ποσῷ.

3. Ὅταν τὸ ποσὸν εἶναι τὸ πλῆθος πραγμάτων κεχωρισμένων, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὄνομα, τότε ἓν τῶν πραγμάτων λαμβάνεται ὡς μονάς· π. χ. τρία μῆλα, δύο πρόβατα.

4. **Ἀριθμός. Ἀριθμητική.**—Τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως, δύο, τρία τέταρτα κ.τ.λ. λέγεται *ἀριθμός*, ἡ δὲ περὶ τοὺς ἀριθμοὺς ἀσχολουμένη ἐπιστήμη *ἀριθμητική*.

5. **Εἴδη ἀριθμῶν.**—Ὁ ἀριθμὸς δύο πήχεις φανερώνων ὅτι τὸ μῆκος περιέχει ὁλοκλήρους ἢ ἀκεραίας μονάδας λέγεται *ἀκέραιος*, ὁ ἀριθμὸς τρία τέταρτα τοῦ πήχεως *κλασματικὸς* καὶ ὁ ἀριθμὸς δύο καὶ ἥμισυς πήχεις *μικτός*.

Ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς δύο, τρία τέταρτα κ.τ.λ., ἔχομεν ἀριθμὸν *ἀφῃρημένον*· ὅταν δὲ λέγωμεν δύο πήχεις, τρία τέταρτα τῆς ὥρας κ.τ.λ., ἔχομεν ἀριθμὸν *συγκεκριμένον*.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΡΙΘΜΗΣΙΣ

6. *Ἀρίθμησις* λέγεται κυρίως ἡ μέτρησις πλήθους. Λέγεται δὲ οὕτω καὶ τὸ μέρος τῆς ἀριθμητικῆς, ἐν ᾧ διδάσκεται α΄) ὁ σχηματισμὸς τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ὀνομάτων αὐτῶν, ἤτοι ἡ *προφορικὴ* ἀρίθμησις, β΄) ἡ διὰ συμβόλων γραφὴ αὐτῶν, ἡ *γραπτὴ ἀρίθμησις*.

Ἀρίθμησις προφορική.

7. Ἐὰν μὲ τὴν μονάδα ἢ μὲ τὸ *ἓν* ἑνώσωμεν ἄλλην μίαν μονάδα, σχηματίζομεν τὸν ἀριθμὸν *δύο*· ἐὰν ἑνώσωμεν καὶ ἄλλην, σχηματίζομεν τὸν *τρία* καὶ οὕτω καθεξῆς δυνάμεθα ἐπ' ἄπειρον νὰ σχηματίζωμεν νέους ἀριθμούς. Κατορθοῦμεν δὲ μὲ ὀλίγας λέξεις νὰ ὀνομάζωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν.

8. Ἐν πρώτοις σχηματίζομεν ὀλίγους ἀριθμοὺς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς μονάδος, τοὺς ὁποίους ὀνομάζομεν κατὰ σειράν: ***ἕν***, ***δύο***, ***τρία***, ***τέσσαρα***, ***πέντε***, ***ἕξ***, ***ἑπτά***, ***ὀκτώ***, ***ἐννέα***· ἔπειτα προσθέτομεν εἰς τὸν ἐννέα ἓν καὶ σχηματίζομεν νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον θεωροῦμεν μονάδα δευτέρας τάξεως ὀνομάζοντες αὐτὴν ***δεκάδα*** ἢ ***δέκα***· πρὸς διάκρισιν δὲ τὸ ἓν ὀνομάζομεν μονάδα ***ἁπλῆν*** ἢ ***πρώτης τάξεως***. Ἔπειτα σχηματίζομεν ἄλλους ἐννέα ἀριθμοὺς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς δεκάδος, τοὺς ὁποίους ὀνομάζομεν κατὰ σειράν:

Μία	δεκὰς	ἢ	*δέκα*
Δύο	δεκάδες	»	*εἴκοσι*
Τρεῖς	»	»	*τριάκοντα*
Τέσσαρες	»	»	*τεσσαράκοντα*
Πέντε	»	»	*πεντήκοντα*
Ἕξ	»	»	*ἑξήκοντα*
Ἑπτὰ	»	»	*ἑβδομήκοντα*
Ὀκτὼ	»	»	*ὀγδοήκοντα*
Ἐννέα	»	»	*ἐνενήκοντα.*

Τοὺς ἐνδιαμέσους ἀριθμοὺς σχηματίζομεν καὶ ὀνομάζομεν ἑνώνοντες μὲ ἕκαστον τῶν προηγουμένων κατὰ σειρὰν τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς, ἕν, δύο κ.τ.λ. Οὕτως ἔχομεν π. χ. τεσσαράκοντα δύο. Μόνον ἀντὶ δέκα ἓν λέγομεν ἕνδεκα καὶ ἀντὶ δέκα δύο δώδεκα. Οὕτω δὲ μὲ εἴκοσι λέξεις ὀνομάζομεν τοὺς ἐνενήκοντα ἐννέα πρώτους ἀριθμούς.

9. Εἰς τὸ ἐνενήκοντα ἐννέα προσθέτομεν ἓν καὶ σχηματίζομεν μονάδα τρίτης τάξεως, τὴν ἑκατοντάδα ἢ *ἑκατόν*, ἐξ ἧς διὰ τῆς ἐπαναλήψεως σχηματίζομεν ἄλλους ἐννέα ἀριθμούς, εἰς οὓς δίδομεν τὰ ὀνόματα:

Μία	ἑκατοντὰς	ἢ	*ἑκατὸν*
Δύο	ἑκατοντάδες	»	*διακόσια*
Τρεῖς	»	»	*τριακόσια*
Τέσσαρες	»	»	*τετρακόσια*
Πέντε	»	»	*πεντακόσια*
Ἕξ	»	»	*ἑξακόσια*
Ἑπτὰ	»	»	*ἑπτακόσια*
Ὀκτὼ	»	»	*ὀκτακόσια*
Ἐννέα	»	»	*ἐννεακόσια.*

Τοὺς ἐνδιαμέσους ἀριθμοὺς σχηματίζομεν καὶ ὀνομάζομεν ὡς καὶ προηγουμένως εἴπομεν· π. χ. ὀκτακόσια τρία. Οὕτω δὲ μὲ εἰκοσιεννέα λέξεις ὀνομάζομεν ἐννεακοσίους ἐνενήκοντα ἀριθμούς.

10. Ὁμοίως ἑνώνοντες ἓν μὲ τὸ ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα σχηματίζομεν μονάδα τετάρτης τάξεως, τὴν *χιλιάδα* ἢ *χίλια*, καὶ ἐξ αὐτῆς τοὺς ἀριθμοὺς δύο χιλιάδες κ.τ.λ. μέχρι τῶν ἐννέα χιλιάδων καὶ τοὺς ἐνδιαμέσους ἀριθμούς, ὡς προηγουμένως· π.χ. δύο χιλιάδες ὀκτακόσια τρία. Οὕτω δὲ μὲ τριάκοντα μόνον λέξεις ὀνομάζομεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέχρι τοῦ ἐννέα χιλιάδες ἐννεακόσια ἐνενήκοντα ἐννέα συμπεριλαμβανομένου.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐξακολουθοῦμεν σχηματίζοντες μονάδας ἀνωτέρων τάξεων καὶ τοὺς ἐνδιαμέσους ἀριθμοὺς κατορθοῦντες μὲ ὀλίγας λέξεις νὰ ὀνομάζωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν.

Μονάδες	**Τάξις**
Ἁπλῆ μονὰς	*πρώτη*
Δεκὰς	*δευτέρα*
Ἑκατοντὰς	*τρίτη*
Χιλιὰς	*τετάρτη*
Μυριὰς	*πέμπτη*
Ἑκατοντὰς χιλιάδος	*ἕκτη*
Ἑκατομμύριον	*ἑβδόμη*
Δεκὰς ἑκατομμυρίου	*ὀγδόη*
Ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου	*ἐνάτη*
Δισεκατομμύριον	*δεκάτη*
κ.τ.λ.	*κ.τ.λ.*

11. Δέκα μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας.

12. Ἡ ἁπλῆ μονάς, ἡ χιλιάς, τὸ ἑκατομμύριον, τὸ δισεκατομμύριον κ.τ.λ. λέγονται **πρωτεύουσαι** μονάδες. Ἑκάστη δὲ τούτων εἶναι χιλιάκις μεγαλυτέρα τῆς ἀμέσως μικροτέρας.

13. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς περιέχῃ πρωτευούσας μονάδας ἀνωτέρας τῆς ἁπλῆς μονάδος, ἀπαγγέλλομεν αὐτὸν λέγοντες πόσας τοιαύτας μονάδας ἑκάστου εἴδους περιέχει ἀρχόμενοι ἀπὸ τῆς ἀνωτάτης· π.χ. τὸν ἀριθμὸν πέντε δεκάδες ἑκατομμυρίου τρία ἑκατομμύρια δύο

ἑκατοντάδες χιλιάδος καὶ πεντήκοντα δύο ἀπαγγέλλομεν ὡς ἑξῆς: «***πεντήκοντα τρία*** *ἑκατομμύρια διακόσιαι χιλιάδες* ***πεντήκοντα δύο μονάδες*** ἢ ἁπλῶς *πεντήκοντα δύο*».

14. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι:

«***Πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ*** *ἀποτελῆται* ***ἀπὸ*** *μονάδας* ***τῶν διαφόρων τάξεων, νὰ*** *μὴ* ***περιέχῃ*** *δὲ ἐξ ἑκάστης τάξεως* ***περισσοτέρας*** *τῶν* ***ἐννέα***».

Ἀσκήσεις.

1) Πόσας χιλιάδας ἢ πόσας ἑκατοντάδας ἢ δεκάδας περιέχει τὸ ἑκατομμύριον;

2) Πόσα χιλιόδραχμα ἀποτελοῦσιν ἓν δισεκατομμύριον δραχμῶν;

3) Ἓν ἑκατομμύριον δραχμῶν πόσα δεκάδραχμα ἢ πόσα ἑκατοντάδραχμα περιέχει;

Ἀρίθμησις γραπτή.

15. Τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμοὺς παριστάνομεν διὰ σημείων ὡς ἑξῆς:

ἕν	*δύο*	*τρία*	*τέσσαρα*	*πέντε*	*ἕξ*	*ἑπτά*	*ὀκτώ*	*ἐννέα*
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Τὰ σημεῖα ταῦτα λέγονται *ψηφία*. Πρὸς παράστασιν δὲ τῶν ἀριθμῶν διὰ τῶν σημείων τούτων θέτομεν τὴν ἑξῆς συνθήκην:

«***Γράφομεν*** *εἰς* ***μίαν σειρὰν*** *τὰ ψηφία* ***τῶν διαφόρων μονάδων οὕτως, ὥστε τὸ ψηφίον τῶν*** *ἁπλῶν μονάδων* ***νὰ κατέχῃ τὴν πρώτην θέσιν, τὸ τῶν δεκάδων*** *τὴν δευτέραν*, ***τὸ τῶν*** *ἑκατοντάδων* ***τὴν τρίτην καὶ*** *οὕτω* ***καθεξῆς***· *ἐὰν* ***δὲ*** *ἐλλείπωσι μονάδες τάξεως* ***κατωτέρας τῆς*** *μεγαλυτέρας* ***τοῦ*** *ἀριθμοῦ, εἰς* ***τὴν θέσιν αὐτῶν θέτομεν τὸ σημεῖον*** *0* ***καλούμενον*** *μηδὲν ἢ μηδενικόν*».

Τὰ ἐννέα πρῶτα ψηφία λέγονται *σημαντικά*.

Κατὰ τὴν προηγουμένην συνθήκην ἕκαστον ψηφίον ἐν γένει γεγραμμένον πρὸς τὰ ἀριστερὰ σημαίνει μονάδας δεκάκις μείζονας τῶν τοῦ ἄλλου.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 2 χιλ. 3 ἑκατ. 2 δεκ. 4 μον. γράφεται:

2324

ἢ ἀντιστρόφως ὁ ἀριθμὸς

5022005

σημαίνει 5 ἑκατ. 22 χιλιάδες καὶ 5 μονάδες.

16. Τὰ ὀνόματα τῶν πρωτευουσῶν μονάδων εὑρίσκομεν χωρίζοντες τὸν ἀριθμὸν εἰς τμήματα τριψήφια ἐκ δεξιῶν, ὁπότε τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ ἔχῃ ἓν ἢ δύο ἢ τρία ψηφία· οὕτω χωρίζομεν πρῶτον τὰς ἁπλᾶς μονάδας, ἔπειτα τὰς χιλιάδας κ.τ.λ.

17. Ὅταν θέλωμεν νὰ γράψωμεν διὰ ψηφίων ἀριθμὸν ἀπαγγελλόμενον καὶ ἔχοντα πρωτευούσας μονάδας ἀνωτέρας τῆς ἁπλῆς, γράφομεν πρῶτον τὸν ἀριθμὸν τῶν μεγαλυτέρων ἐξ αὐτῶν, ὅπως ἀπηγγέλθη, ἔπειτα δὲ κατὰ σειρὰν τοὺς ἀριθμοὺς τῶν μικροτέρων, ἀλλὰ τούτους μὲ 3 ψηφία ἕκαστον ἀναπληροῦντες τὰ ἐλλείποντα διὰ μηδενικῶν· π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3 ἑκατομ. 2 χιλ. 25 μον. γράφεται:

3002025

18. Αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων γράφονται ἀπὸ τῆς ἁπλῆς μονάδος κατὰ σειρὰν οὕτω:

1, 10, 100, 1000, 10000 κ.τ.λ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ γραφῇ διὰ ψηφίων ὁ ἀριθμός:
δύο ἑκατομμύρια ὀκτὼ χιλιάδες καὶ τριακόσιαι μονάδες.

2) Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς πέντε ἑκατομ. καὶ πέντε μονάδες.

3) Νὰ ἀπαγγελθῶσιν οἱ ἀριθμοί:

125006, 30009, 314159265, 1000000000

4) Ὁ ἀριθμὸς 56783 πόσας δεκάδας ἔχει ἐν ὅλῳ ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τέλους, πόσας ἐν ὅλῳ ἑκατοντάδας, πόσας χιλιάδας καὶ πόσας μυριάδας;

Συστήματα ἀριθμήσεως.

19. Εἴδομεν ὅτι ἑκάστη μονὰς εἶναι 10άκις μείζων τῆς ἀμέσως κατωτέρας. Ἠδυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς μὲ μονάδας κατ' ἄλλον τρόπον ἀποτελουμένας ἐκ τῆς ἀμέσως μικροτέρας π. χ.

1, 5, 25, 125........

ὧν ἑκάστη εἶναι 5άκις μείζων τῆς ἀμέσως κατωτέρας, ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ θὰ ἀποτελῶνται ἀπὸ τοιαύτας μονάδας, ἐξ ἑκάστης τῶν ὁποίων δὲν θὰ ἔχωσι πλείονας τῶν τεσσάρων, θὰ ἠδυνάμεθα δὲ νὰ γράφωμεν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς διὰ τῶν ἑξῆς μόνον ψηφίων.

1, 2, 3, 4, 0.

Θὰ εἴχομεν οὕτως ἕτερον σύστημα ἀριθμήσεως Ὁ ἀριθμὸς πέντε λέγεται *βάσις* τοῦ συστήματος, τὸ δὲ σύστημα *πενταδικόν*. Τὸ ἐν χρήσει σύστημα ἔχον βάσιν τὸν 10 καλεῖται *δεκαδικόν*.

Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς 27 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἰς τὸ πενταδικὸν γράφεται 102· ὁ δὲ ἀριθμὸς 213 τοῦ πενταδικοῦ παριστᾷ τὸν ἀριθμὸν 58 τοῦ δεκαδικοῦ. Ὁμοίως ἠδυνάμεθα νὰ ἔχωμεν ἕτερα συστήματα ἀριθμήσεως *δυαδικόν*, *τριαδικὸν* κ.τ.λ.

Ἀσκήσεις.

1) Τίνες ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος παριστῶσι τὰς μονάδας τῶν πέντε πρώτων τάξεων τοῦ δυαδικοῦ καὶ τοῦ τριαδικοῦ συστήματος ;

2) Αἱ μονάδες τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος 1, 10, 100, 1000 νὰ παρασταθῶσιν εἰς τὸ τετραδικὸν καὶ πενταδικὸν σύστημα.

3) Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος 3, 8, 12, 20 νὰ γραφῶσι κατὰ τὸ τριαδικὸν καὶ ὀκταδικὸν σύστημα.

4) Οἱ ἀριθμοὶ τοῦ δυαδικοῦ συστήματος 10, 101, 1001 νὰ γραφῶσι κατὰ τὸ δεκαδικόν.

Ἰσότης καὶ ἀνισότης.

Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός, ὡς γνωρίζομεν, εἶναι πλῆθος μονάδων. Ἔστωσαν ἤδη τὰ ἑξῆς δύο πλήθη μονάδων :

$$\left.\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) \quad \left.\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) \quad \left.\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right) \quad \left.\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right)$$

Σχηματίζομεν ζεύγη μονάδων λαμβάνοντες ἀνὰ μίαν ἐκ τοῦ πρώτου καὶ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ βλέπομεν ὅτι δὲν περισσεύει οὐδεμία οὔτε ἐκ τοῦ πρώτου οὔτε ἐκ τοῦ δευτέρου πλήθους. Οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ λέγονται *ἴσοι*. Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ σημειώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $=$, τὸ ὁποῖον ἀπαγγέλλεται ***ἴσον***· π. χ.

$$(1) \qquad 5=5$$

Ἰσότης δὲ ὀνομάζεται ἡ σχέσις δύο ἀριθμῶν ἴσων, οἵτινες λέγονται *μέλη* τῆς ἰσότητος, καὶ τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ σημείου $=$ λέγεται ***πρῶτον*** μέλος, τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ ***δεύτερον***.

Ὅταν δύο ἀκέραιοι εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε, ἐὰν σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν ζεύγη μονάδων, ὡς προηγουμένως, περισσεύωσι μονάδες ἐκ τοῦ ἑνὸς πλήθους, λέγονται ***ἄνισοι***. Διὰ νὰ σημειώσωμεν δέ, ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ***ἄνισοι***, γράφομεν μεταξὺ αὐτῶν τὸ σημεῖον $<$, οὕτως, ὥστε ἡ κοιλότης τοῦ σημείου τούτου νὰ ἀντικρύζῃ τὸν μεγαλύτερον ἀριθμόν· π. χ.

$$8 > 3$$

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τούτων ἕπονται προφανῶς αἱ ἑξῆς ἰδιότητες:

Τῆς μὲν ἰσότητος

α′) Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι εἶναι καὶ πρὸς ἀλλήλους ἴσοι.

β′) Ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσθέσωμεν ἀνὰ μίαν μονάδα, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι· καὶ γενικῶς· ἐὰν εἰς ἴσους προσθέσωμεν ἴσους, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

Ἑπομένως

γ′) Τὰ διπλάσια καὶ ἐν γένει τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσοι ἀριθμοί.

Τῆς δὲ ἀνισότητος.

α′) Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ ἀριθμοὶ μένουσιν ὁμοίως ἄνισοι.

β′) Τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια ἀνίσων εἶναι ὁμοίως ἄνισοι ἀριθμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

20. Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ἐκτελοῦμεν ἐργασίας καλουμένας *πράξεις*, ὧν αἱ θεμελιωδέστεραι εἶναι ἡ *πρόσθεσις*, ἡ *ἀφαίρεσις*, ὁ *πολλαπλασιασμὸς* καὶ ἡ *διαίρεσις*.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

21. *Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἑνώνομεν τὰς μονάδας δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν καὶ σχηματίζομεν ἕνα μόνον ἀριθμόν.*

Τὸ ἐξαγόμενον ὀνομάζεται *ἄθροισμα*, οἱ δὲ προστιθέμενοι *προσθετέοι*.

Σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι + ἀπαγγελλόμενον *σύν*· π. χ. 2+3 δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 2+3.

Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς· π. χ. 5 μῆλα καὶ 3 μῆλα.

Ἰδιότητες.

22. *Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἑνώσωμεν πλῆθος μονάδων, πάντοτε προκύπτει ὁ αὐτὸς ἀριθμός.*

Ἡ πρότασις αὕτη εἶναι ἀφ' ἑαυτῆς φανερά. Πᾶσα δὲ τοιαύτη πρότασις καλεῖται *ἀξίωμα*.

Ἐκ τοῦ προηγουμένου ἀξιώματος ἕπεται ἡ ἑπομένη θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως:

Καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν δεδομένους ἀριθμούς, εὑρίσκομεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα.

Ἡ ἰδιότης αὕτη καλεῖται *ἀδιαφορία* ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῆς προσθέσεως.

23. Ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος προκύπτουσιν αἱ ἑπόμεναι :

α΄) Ἔστω τὸ ἄθροισμα

$$2+3+4.$$

Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους δύναμαι νὰ προσθέσω καθ' οἱονδήποτε τάξιν· π. χ. προσθέτω 2+4 καὶ εὑρίσκω 6, εἰς τὸν ὁποῖον ἔπειτα θὰ ἔχω νὰ προσθέσω 3· ἤτοι

(1) $2+3+4=6+3$ ἄρα :

Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν προσθετέους τινὰς διὰ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

Ἡ σχέσις (1) γράφεται καὶ οὕτω :

$$2+3+4=(2+4)+3.$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ προσθετέοι δύνανται νὰ εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί, παριστῶμεν αὐτοὺς διὰ γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου πρὸς συντομίαν καὶ πρὸς γενίκευσιν τῆς σχέσεως (1) καὶ ἔχομεν τὴν σχέσιν

(2) $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\gamma)+\beta$

β΄) Ἡ σχέσις (2) δηλοῖ συγχρόνως ὅτι :

Δυνάμεθα εἰς πᾶν ἄθροισμα νὰ ἀντικαταστήσωμεν προσθετέον δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.

Ὁμοίως ἐκ τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος ἐξαρτῶνται καὶ αἱ ἑπόμεναι, καταφανεῖς ἄλλως:

γ΄) ***Ἀριθμὸς προστίθεται εἰς ἄθροισμα, ἐὰν προστεθῇ εἰς ἕνα τῶν προσθετέων*** ἢ

$$(\alpha+\beta)+\gamma=(\alpha+\gamma)+\beta.$$

δ΄) ***Ἄθροισμα ἀθροισμάτων εὑρίσκεται, ἐὰν προσθέσωμεν πάντας τοὺς προσθετέους αὐτῶν***· ἢ

$$(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=\alpha+\beta+\gamma+\delta.$$

24. Πᾶσαι αἱ προηγούμεναι σχέσεις παριστῶσιν ὅτι δύο ἀριθμοί, καίπερ διαφόρου μορφῆς, ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μονάδων.

Ἐκτέλεσις τῆς προσθέσεως.

25. Τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, ἰδίως λαμβανομένων ἀνὰ δύο, ὁμοίως τῶν ἐχόντων ἓν μόνον σημαντικὸν ψηφίον ἀπομνημονεύομεν τὰ ἀθροίσματα· ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν ἐν γένει ἐκτελοῦμεν ἰδίας τινὰς πράξεις προφορικῶς ἢ γραπτῶς, δι' ὧν ταχέως εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα.

Περὶ τῆς προφορικῆς προσθέσεως ἰδὲ μικράν μου Ἀριθμητικήν· ἐνθάδε θὰ εἴπωμεν περὶ τῆς γραπτῆς.

26. Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα :

$$8329+628+1897$$

Κατὰ τὰς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα προσθέτοντες χωριστὰ τὰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τῶν προσθετέων.

Διὰ τοῦτο γράφομεν τοὺς προσθετέους ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} 8329 \\ 628 \\ 1897 \\ \hline 10854 \end{array}$$

Προσθέτομεν ἔπειτα τὰς ἁπλᾶς μονάδας καὶ εὑρίσκομεν 24· γράφομεν 4 ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων· ἔπειτα προσθέτομεν τὰς δεκάδας τῶν προσθετέων καὶ τὰς 2 δεκάδας τοῦ 24 καὶ εὑρίσκομεν 15 δεκάδας· γράφομεν 5 ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἠρχίζομεν τὴν πρόσθεσιν ἐξ ἀριστερῶν, θὰ ἤμεθα πολλάκις ἠναγκασμένοι νὰ μεταβάλλωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων μιᾶς στήλης, ὅταν τοιαύτας μονάδας περιέχῃ τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἑπομένως νὰ μεταβάλλωμεν ψηφίον τοῦ ἀθροίσματος ἅπαξ εὑρεθέν.

27. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ κανών:

Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἀκεραίους, γράφομεν αὐτοὺς οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ· ἄγομεν εἶτα γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν προσθέτομεν τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης γράφοντες ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ καὶ ὑπὸ τὴν γραμμὴν μόνον τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ ἀθροίσματος, τὰς δὲ δεκάδας προσθέτομεν εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα γράφομεν ὁλόκληρον.

Βάσανος.

28. *Βάσανος πράξεώς τινος λέγεται ἡ δοκιμὴ ἡ γινομένη πρὸς βεβαίωσιν ὅτι δὲν ἐγένετο λάθος.*

Κατὰ τὴν θεμελιώδη δὲ ἰδιότητα τῆς προσθέσεως ἡ βάσανος τῆς πράξεως ταύτης δύναται νὰ γίνῃ, ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς προσθετέους κατ' ἄλλην τάξιν· ἐὰν τότε εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις τοῦ ὀρθοῦ τῆς πράξεως.

Ἀσκήσεις.

1) Εἴδομεν τὸν λόγον, δι' ὃν μετὰ τὴν διάταξιν τῶν προσθετέων κατὰ τὸν κανόνα 27 ἡ πρόσθεσις ἄρχεται ἐκ δεξιῶν. Πότε μᾶς εἶναι ἀδιάφορον ἀπὸ οἱασδήποτε στήλης καὶ ἂν ἀρχίσωμεν τὴν πρόσθεσιν;

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

$$5863+887+156897$$

ἄνευ τῆς διατάξεως τῶν προσθετέων κατὰ τὸν κανόνα 27.

3) Τί ποσὸν ἐν ὅλῳ ἀποτελοῦσιν 26 δραχ., 36 δεκάδραχμα, 37 ἑκατοντάδραχμα καὶ 19 χιλιόδραχμα;

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

29. ***Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦμεν ἀριθμὸν κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἄλλος δοθεὶς ἀριθμός.***

Ὁ ἐλαττούμενος ἀριθμὸς λέγεται *μειωτέος*, ὁ ἄλλος *ἀφαιρετέος* καὶ τὸ ἐξαγόμενον *διαφορά*. Σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ — ἀπαγγελλόμενον *πλὴν* καὶ τιθέμενον μεταξὺ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου ὡς ἑξῆς· $8-5=3$

Ὁ μειωτέος εἶναι ἄθροισμα τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς· ἄρα:

Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, ἐν ᾗ δεδομένων δύο ἀριθμῶν ζητεῖται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον παράγει τὸν πρῶτον.

Σημ. Καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι συγκεκριμένοι, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοειδεῖς.

Ἰδιότητες.

30. Τούτων αἱ σπουδαιότεραι εἶναι αἱ ἑπόμεναι, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ὡς φανεράς:

α') ***Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρους τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.***

Π. χ. ἐὰν ἐκ δύο ἀδελφῶν ὁ α'. εἶναι πρεσβύτερος τοῦ β'. κατὰ 5 ἔτη, εἶναι φανερὸν ὅτι, καὶ μετὰ ὁσονδήποτε χρόνον καὶ ἂν ζῶσι, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνῃ.

Οὕτω θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)=\alpha-\beta$$

β') ***Ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀθροίσματος, ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἐξ ἑνὸς τῶν προσθετέων·*** ἢ

$$(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta$$

γ') ***Ἄθροισμα ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀριθμοῦ, ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν ὁ εἷς μετὰ τὸν ἄλλον πάντες οἱ προσθετέοι·*** ἢ

$$\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$$

Σημ. α΄) Ἐν γένει, ὁσάκις θέλομεν νὰ παραστήσωμεν ὡς ἕνα ἀριθμὸν σημείωσιν πράξεων ἐπὶ ἀριθμῶν, κλείομεν ταύτην ἐν παρενθέσει πρὸς ἀποφυγὴν συγχύσεως.

Σημ. β΄) Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι αἱ προηγούμεναι ἰδιότητες πηγάζουσιν ἐκ τῶν τῆς προσθέσεως.

Ἐκτέλεσις τῆς ἀφαιρέσεως.

31. Ὅταν ἀδυνατῶμεν νὰ εὕρωμεν τὴν διαφορὰν ἀπὸ μνήμης ἢ διὰ προφορικῆς πράξεως (ἰδὲ μικράν μου Ἀριθμητικὴν) καταφεύγομεν εἰς τὴν γραπτὴν πρᾶξιν, τῆς ὁποίας ὁ κανὼν στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀφαιρέσεως. Ζητεῖται π. χ. ἡ διαφορὰ 8954—3868.

Γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 8954 \\ 3868 \\ \hline 5086 \end{array}$$

Ἔπειτα ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας ἑκάστης τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὰς ἀντιστοίχους τοῦ μειωτέου, ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, δι' ὃν λόγον καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν· ἐπειδὴ ὅμως 8 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ 4, αὐξάνομεν τὸν μειωτέον κατὰ μίαν δεκάδα, τὴν ὁποίαν προσθέτομεν εἰς τὸ 4 καὶ λέγομεν 8 ἀπὸ 14 ἴσον 6, ὅπερ γράφομεν κάτωθεν ὁριζοντίας γραμμῆς ἐν τῇ στήλῃ τῶν ἁπλῶν μονάδων.

Ἐπειδὴ δὲ προσεθέσαμεν μίαν δεκάδα εἰς τὸν μειωτέον, διὰ νὰ μὴ μεταβληθῇ ἡ διαφορά, προσθέτομεν ταύτην καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ λέγομεν 6 καὶ 1 ἴσον 7. Ὁ 7 πάλιν δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸν 5 καὶ λέγομεν ὡς προηγουμένως 7 ἀπὸ 15 ἴσον 8, ὅπερ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἐν τῇ στήλῃ τῶν δεκάδων. Ἔπειτα 1 (ἡ κρατουμένη ἑκατοντὰς) καὶ 8 ἴσον 9, ἀπὸ 9 ἴσον 0 καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις οὗ ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου, ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν διαφορὰν 5086.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ κανών :

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀριθμὸν ἀπὸ ἄλλου, γράφομεν τὸν ἀφαιρετέον ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Ἄγομεν εἶτα γραμμὴν ὁριζοντίαν καὶ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν ἀφαιροῦμεν ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου, ἐὰν δὲ ψηφίον τι τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου τοῦ μειωτέου, αὐξάνομεν τὸ τοῦ μειωτέου κατὰ 10, τὸ δὲ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τοῦ ἀφαιρετέου κατὰ 1 καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρις οὗ εὕρωμεν πάντα τὰ ψηφία τῆς διαφορᾶς.

Βάσανος.

32. Προσθέτομεν τὴν διαφορὰν εἰς τὸν ἀφαιρετέον· ἐὰν εὕρωμεν τὸν μειωτέον, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις τοῦ ὀρθοῦ τῆς πράξεως.

Ἀσκήσεις.

1) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 228, ὁ δὲ μικρότερος 1325. Ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ;

2) Ἵππος ἀγορασθεὶς ἀντὶ 776 δραχ. ἐπωλήθη ἀντὶ 856 δρ. Πόσον εἶναι τὸ κέρδος, καὶ πόσον ἔπρεπε νὰ πωληθῇ, διὰ νὰ ἀποφέρῃ κέρδος 325 δρ. ;

3) Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμός, τὸν ὁποῖον δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 57, διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις τοῦ ἀθροίσματος ἀπὸ τὸ 258 ;

4) Τί γίνεται ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν, ὅταν ὁ μὲν μειωτέος ἐλαττωθῇ κατὰ 25, ὁ δὲ ἀφαιρετέος αὐξηθῇ κατὰ 37, τῆς ἀφαιρέσεως οὔσης δυνατῆς ;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Ὁρισμοί.

33. *Πολλαπλασιασμὸς λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ἕνα ἀριθμὸν ἐπαναλαμβάνομεν πολλάκις.*

Ὁ ἐπαναλαμβανόμενος ἀριθμὸς λέγεται **πολλαπλασιαστέος**, ὁ δὲ δεικνύων ποσάκις πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ **πολλαπλασιαστὴς** καὶ τὸ ἐξαγόμενον *γινόμενον*.

Π. χ. Διὰ νὰ εὕρωμεν πόσον τιμῶνται 7 πήχεις ὑφάσματος πρὸς 3 δρ. τὸν πῆχυν, πρέπει νὰ ἐπαναλάβωμεν τὰς 3 δρ. 7κις καὶ εὑρίσκομεν 21 δραχ. Ἐνταῦθα 3 εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος, 7 ὁ πολλαπλασιαστὴς καὶ 21 τὸ γινόμενον.

Ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς ὁμοῦ λέγονται *παράγοντες* τοῦ γινομένου.

Σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι $\times$ ἀπαγγελλόμενον **ἐπὶ** καὶ τιθέμενον μεταξὺ τῶν παραγόντων· π. χ. $3 \times 7 = 21$.

Σημ. α') Ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀποτελεῖ ἰδίαν πρᾶξιν διάφορον τῆς προσθέσεως, καθόσον ἡ ἐπανάληψις ἑνὸς ἀριθμοῦ γίνεται συντόμως.

Σημ. β') Ἐπὶ συγκεκριμένων ἀριθμῶν τὸ γινόμενον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ πολλαπλασιαστέῳ, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς ἐν τῇ πράξει λαμβάνεται ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός.

Πολλαπλασιασμὸς μονοψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

34. Τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀποστηθίζομεν καὶ τὰ εὑρίσκομεν ἔπειτα ἀπὸ μνήμης.

Τὰ γινόμενα ταῦτα περιέχονται εἰς τὸν ἑπόμενον πίνακα, *Πυθαγόρειον* καλούμενον, διότι, ὡς λέγεται, ἐπενόησε τοῦτον ὁ Πυθαγόρας τὸν 6 π. Χ. αἰῶνα.

A

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

B

Ἡ α΄ σειρὰ περιέχει τοὺς ἐννέα πρώτους ἀριθμούς, ἡ β΄ τὰ διπλάσια, ἡ γ΄ τὰ τριπλάσια αὐτῶν κτλ.

Διὰ τοῦ πίνακος τούτου εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον δύο μονοψηφίων ζητοῦντες τὸν ἀριθμόν, ὅστις εὑρίσκεται εἰς τὴν σειράν, ἥτις ἄρχεται διὰ τοῦ ἑνὸς παράγοντος, καὶ εἰς τὴν στήλην, ἥτις ἄρχεται διὰ τοῦ ἑτέρου· π. χ. τὸ γινόμενον $7 \times 8 = 56$ εὑρίσκεται εἰς τὴν 7ην σειρὰν καὶ 8ην στήλην ἢ εἰς τὴν 8ην σειρὰν καὶ 7ην στήλην.

Σημ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ $5 \times 1 = 5$ καὶ γενικῶς $\alpha \times 1 = \alpha$.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ περιεχόμενοι εἰς τὸν πυθαγόρειον πίνακα;

2) Ἐὰν εἰς τὸν πυθαγόρειον πίνακα φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, χωρίζεται οὗτος εἰς δύο τμήματα. Ποῖον ἐκ τῶν δύο τμημάτων περιλαμβάνει πάντα τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων καὶ πῶς τὰ εὑρίσκομεν ἐξ αὐτοῦ τοῦ τμήματος;

Πολλαπλασιασμὸς πολυψηφίου ἐπὶ μονοψήφιον.

35. Ζητεῖται τὸ γινόμενον 967×3. Τοῦτο εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἑπομένης προσθέσεως:

$$\begin{array}{r} 967 \\ 967 \\ 967 \\ \hline 2901 \end{array}$$

Ἀλλ' ἀντὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ 967 νὰ προσθέσωμεν τρὶς δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 3 διατάσσοντες τὴν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς.

$$\begin{array}{r} 967 \\ 3 \\ \hline 2901 \end{array}$$

Τὸν πολλαπλασιασμὸν ἀρχίζομεν ἐκ δεξιῶν δι' ὃν λόγον καὶ τὴν πρόσθεσιν.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὁ κανών:

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἐπὶ μονοψήφιον, πολλαπλασιάζομεν ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ τὸν πολλαπλασιαστὴν γράφοντες μόνον τὰς μονάδας τῶν μερικῶν γινομένων καὶ κρατοῦντες τὰς δεκάδας διὰ τὰ ἑπόμενα γινόμενα, ὡς καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν πράττομεν.

Σημ. Περὶ τοῦ προφορικοῦ (ἀπὸ στόματος) πολλαπλασιασμοῦ ἰδὲ μικρὰν μου Ἀριθμητικήν.

Ἀσκήσεις.

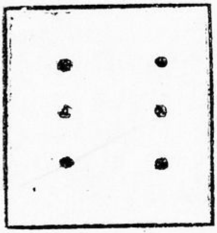
1) Πόσαι ἡμέραι παρῆλθον ἀπὸ 1ης Φεβρουαρίου 1898 μέχρι 1ης Φεβρουαρίου 1906;

2) Ὁ ἦχος ἐν τῷ ἀέρι διατρέχει 340 μέτρα εἰς 1 δευτερόλεπτον· πόσον ἀπέχει ἀφ' ἡμῶν πυροβόλον, ἐὰν παρῆλθον 9 δευτερόλ. ἀπὸ τῆς ἐμφανίσεως τῆς λάμψεως μέχρι τοῦ ἀκούσματος τοῦ κρότου;

3) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 9 νὰ δίδῃ γινόμενον, οὗτινος πάντα τὰ ψηφία νὰ εἶναι 1.

Τάξις τῶν παραγόντων.

36. Ἔστω τὸ γινόμενον 2×3, σημαῖνον ὅτι ὁ 2 ἐπαναλαμβάνεται τρίς. Ἐὰν τὰς μονάδας παραστήσωμεν διὰ στιγμῶν, ὁ 2 θὰ παρασταθῇ διὰ τῆς σειρᾶς • • ἣν ἐπαναλαμβάνοντες τρὶς ὡς ἑξῆς:



ἔχομεν 3 σειρὰς ἐκ 2 στιγμῶν ἑκάστην ἢ δύο στήλας ἐκ 3 στιγμῶν $2 \times 3 = 3 \times 2$.

Καὶ γενικῶς: $\alpha \times \beta = \beta \times \alpha$· ἤτοι

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος γίνῃ πολλαπλασιαστὴς καὶ τἀνάπαλιν.

Κατὰ ταῦτα 5 γραμματόσημα 20λεπτα ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 20 γραμματόσημα 5λεπτα.

Πολλαπλασιασμὸς ἀθροισμάτων.

37. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχομεν :

$$(2+3)\times 2=2+3+2+3=2\times 2+3\times 2$$

καὶ γενικῶς :

$$(\alpha+\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma\text{· ἤτοι}$$

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος προσθετέος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἡ ἰδιότης αὕτη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καλεῖται *ἐπιμεριστική.*

38. Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων 36 καὶ 37 ἕπεται :

$$\alpha\times(\beta+\gamma)=(\beta+\gamma)\times\alpha=\alpha\times\beta+\alpha\times\gamma\text{ ἤτοι :}$$

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐφ᾽ ἕκαστον προσθετέον καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα.

39. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται :

$$(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)=(\alpha+\beta)\times\gamma+(\alpha+\beta)\times\delta=$$
$$\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma+\alpha\times\delta+\beta\times\delta\text{· ἤτοι :}$$

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕτερον ἄθροισμα, ἐὰν ἕκαστος προσθετέος τοῦ α΄ πολλαπλασιασθῇ ἐφ᾽ ἕκαστον προσθετέον τοῦ β΄ καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ γινόμενα πάντα.

Παράγοντες ἔχοντες εἰς τὸ τέλος μηδενικά.

40. Τὸ γινόμενον 560×3 δύναται νὰ εὑρεθῇ διὰ τῆς ἑπομένης πράξεως τῆς προσθέσεως :

$$\begin{array}{r} 560 \\ 560 \\ 560 \\ \hline 1680 \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ $168=56\times 3$, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν 56×3 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου τούτου θέσωμεν ἓν μηδενικόν.

Τὸ αὐτὸ δυνάμεθα νὰ πράξωμεν καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἴσου γινομένου 3×560.

Ζητήσωμεν ἤδη τὸ γινόμενον 70×500. Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν 70×5 θέτοντες δεξιὰ τοῦ γινομένου 2 μηδενικά· ἀλλὰ πρὸς εὕρεσιν τοῦ 70×5 πολλαπλασιάζομεν 7×5 θέτοντες δεξιὰ τοῦ γινομένου ἓν μηδενικόν· ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὅλου γινομένου δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν 7×5 καὶ δεξιὰ τοῦ γινομένου 35 νὰ θέσωμεν τρία μηδενικά, ὁπότε εὑρίσκομεν 35000.

Σημ. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ 10, 100, 1000,......, ἀρκεῖ νὰ γράψωμεν δεξιὰ αὐτοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ πολυψήφιον.

41. Ζητεῖται 5863×268· τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ τὸ

$$5863 \times (8 + 60 + 200)$$

ἢ μὲ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἑπομένης προσθέσεως :

$$\begin{array}{r} 46904 \\ 351780 \\ 1172600 \\ \hline 1571284 \end{array}$$

ἐν ᾗ προσθετέοι εἶναι τὰ μερικὰ γινόμενα. Ἐπειδὴ δὲ τὰ μηδενικά, εἰς ἃ λήγουσι τὸ β΄ καὶ γ΄ μερικὸν γινόμενον, δύνανται νὰ παραλειφθῶσι διὰ τὴν πρόσθεσιν, ἡ ὅλη πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r} 5863 \\ 268 \\ \hline 46904 \\ 35178 \\ 11726 \\ \hline 1571284 \end{array}$$

Ὅθεν ἕπεται ὁ κανών :

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε ἐπὶ πολυψήφιον, γράφομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον *καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον ἐφ' ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν· τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα γράφομεν οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ἑκάστου ψηφίον νὰ κεῖται ὑπὸ τὸ ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, ἐφ' ὃ πολλαπλασιάζομεν, καὶ τέλος προσθέτομεν ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Βάσανος.

42. Ἐκτελοῦμεν ἐκ νέου τὸν πολλαπλασιασμόν, ἀλλὰ κατ' ἄλλην τάξιν, δηλ. θέτοντες τὸν πολλαπλασιαστέον πολλαπλασιαστὴν καὶ τἀνάπαλιν· ἐὰν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ γινόμενον, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις τοῦ ὀρθοῦ τῆς πράξεως.

Χρῆσις.

43. Χρῆσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται, ὁσάκις πρόκειται νὰ γίνῃ ἐπανάληψις ἀριθμοῦ· π. χ. ὅταν γνωρίζοντες τὴν ἀξίαν τῆς μονάδος ποσοῦ ζητῶμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ, ὅπως συμβαίνει εἰς τὸ πρόβλημα:

Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 δραχ.· πόσον τιμῶνται οἱ 12 πήχεις;

Ἀσκήσεις.

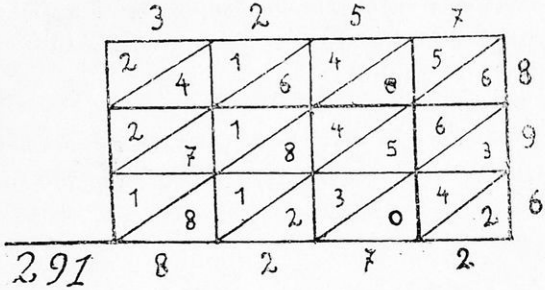
1) Δύο πόλεις α καὶ β ἀπέχουσιν ἀλλήλων 222 χιλιόμετρα· ἀναχωροῦσι δὲ ἐξ αὐτῶν συγχρόνως δύο ἁμαξοστοιχίαι διευθυνόμεναι ἡ μὲν ἐκ τῆς α πρὸς τὴν β μὲ ταχύτητα 25 χιλμ. τὴν ὥραν, ἡ δὲ ἐκ τῆς β πρὸς τὴν α μὲ ταχύτητα 36 χιλμ. Πόσον θὰ ἀπέχωσιν ἀλλήλων αἱ ἁμαξοστοιχίαι μετὰ 4 ὥρας;

2) Ἔμπορος ἠγόρασε 45875 ὀκάδας σίτου πρὸς 42 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, ἐξ ὧν ἐπώλησε κατ' ἀποκοπὴν 6000 ὀκάδας ἀντὶ 3550 δρ. Ἐὰν ἑκάστην τῶν λοιπῶν ὀκάδων πωλήσῃ πρὸς 40 λεπτά, θὰ κερδήσῃ ἢ θὰ ζημιωθῇ καὶ πόσον;

3) Νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ὀρθὸν τῆς ἑπομένης διατάξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καθ' ἣν εἰς τὰ μερικὰ γινόμενα τῶν ψηφίων δὲν φυλάττομεν κρατούμενα.

Ζητεῖται π. χ. τὸ γινόμενον 3257×896.

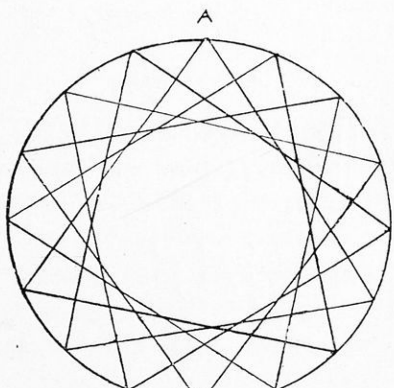
Διάταξις τῆς πράξεως.



Τὸ ὁλικὸν γινόμενον εὑρίσκομεν προσθέτοντες τοὺς ἐν ἑκάστῃ διαγωνίῳ ζώνῃ ἀριθμούς.

Τὴν διάταξιν ταύτην μετεχειρίζοντο οἱ Ἰνδοὶ καὶ οἱ Ἄραβες.

4) Ἐὰν περιφέρειαν κύκλου διαιρέσωμεν εἰς 16 μέρη καὶ ἑνώ-



σωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 6 διὰ χορδῶν ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Α π. χ. καὶ λάβωμεν 16 τοιαύτας χορδάς, θὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ α.

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

44. Διὰ νὰ εὕρωμεν μὲ πόσα λεπτὰ ἰσοδυναμοῦσι 3 εἰκοσάδραχμα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι 3 εἰκοσδρ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ $20\times3=60$ δρ. καὶ ἔπειτα ὅτι 60 δρ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ $60\times100=6000$ λ.

Τὴν πρᾶξιν σημειοῦμεν οὕτω:

$$20\times3\times100$$

καὶ τὸ ἐξαγόμενον καλοῦμεν γινόμενον τῶν ἀριθμῶν τούτων. Γενικῶς:

Καλοῦμεν γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν τὸ ἐξαγόμενον, ὅπερ εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τὸν πρῶτον ἐπὶ τὸν δεύτερον, τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον κ.τ.λ. μέχρις οὗ λάβωμεν καὶ τὸν τελευταῖον παράγοντα».

45. *Θεώρημα.* Ἔστω τὸ γινόμενον

$$2\times3\times4\times5\times6 \qquad (1)$$

Πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ πρέπει πρῶτον νὰ πολλαπλασιάσωμεν 2×3· ἀλλὰ $2\times3=3\times2$· ἄρα τὸ δοθὲν γινόμενον δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$3\times2\times4\times5\times6 \qquad (2)$$

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἀνταλλάξωμεν τοὺς παράγοντας α′ καὶ β′.

Τὸ γινόμενον $2\times3\times4$ κατὰ τὸν ὁρισμὸν 44 σημαίνει τὸ ἑξῆς ἄθροισμα:

$$\begin{array}{l}(2+2+2+\\ \ 2+2+2+\\ \ 2+2+2+\\ \ 2+2+2)\end{array}$$

περιέχον 4 σειρὰς ἐκ τριῶν 2 ἑκάστην ἢ 3 στήλας ἐκ τεσσάρων 2 ἑκάστην· ἤτοι $2\times3\times4=2\times4\times3$.

Ἄρα ἔχομεν

$$2\times3\times4\times5\times6=2\times4\times3\times5\times6$$

Δυνάμεθα ἑπομένως τοῦ γινομένου (1) νὰ ἀνταλλάξωμεν τοὺς παράγοντας β′ καὶ γ′.

'Εὰν ἐκτελοῦντες τὸν πολλαπλασιασμὸν (1) περιορισθῶμεν εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ 2 ἐπὶ 3, θὰ ἔχωμεν τὸ γινόμενον $6\times4\times5\times6$, ὅπερ ἰσοῦται ὡς ἐδείχθη τῷ $6\times5\times4\times6$· ἤτοι $2\times3\times4\times5\times6=2\times3\times5\times4\times6$ ἄρα:

Δυνάμεθα νὰ ἀνταλλάξωμεν καὶ τοὺς παράγοντας γ'. καὶ δ'. τοῦ δοθέντος γινομένου καὶ ἐν γένει δύο γειτονικοὺς παράγοντας.

'Αλλ' ὅταν δυνάμεθα ἕνα παράγοντα οἱονδήποτε νὰ ἀνταλλάξωμεν μὲ τὸν προηγούμενον ἢ ἑπόμενον, εἶναι τὸ αὐτὸ ὡς νὰ δυνάμεθα νὰ τῷ δώσωμεν οἱανδήποτε θέλομεν θέσιν· π. χ. θέλομεν εἰς τὸ δοθὲν γινόμενον νὰ μεταθέσωμεν τὸν 5 εἰς τὴν ἀρχήν, πρὸς τοῦτο ἀνταλλάσσομεν αὐτὸν μὲ τὸν 4 καὶ ἔχομεν

$$2\times3\times5\times4\times6,$$

ἔπειτα μὲ τὸν 3

$$2\times5\times3\times4\times6$$

καὶ τέλος μὲ τὸν 2

$$5\times2\times3\times4\times6\cdot \quad \text{ἄρα:}$$

Γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός.

Οὕτω γενικεύεται ἡ ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων.

Σημ. Αἱ προτάσεις, αἵτινες ἔχουσιν ἀνάγκην συλλογισμοῦ, ὅπως ἡ ἀνωτέρω, διὰ νὰ φανῇ ἡ ἀλήθεια, καλοῦνται *θεωρήματα*. Τοιαῦται εἶναι π. χ. αἱ προτάσεις 36, 37, 38. Ὁ δὲ συλλογισμὸς οὗτος λέγεται ***ἀπόδειξις***.

46. Ἐκ τῆς ἀδιαφορίας ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων ἕπονται αἱ ἑξῆς καταφανεῖς ἰδιότητες:

α') $\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta=(\alpha\times\gamma)\times\beta\times\delta$· ἤτοι:

Δυνάμεθα ἐν γινομένῳ νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντάς τινας διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν ἢ παράγοντά τινα νὰ ἀντικαταστήσωμεν δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον.

β') $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$· ἤτοι:

'Εὰν εἷς παράγων γινομένου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀριθμόν, ὅλον τὸ γινόμενον εὑρίσκεται πολλαπλασιασμένον ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

γ΄) $(\alpha\times\beta)\times(\gamma\times\delta)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$· ἤτοι:

Γινόμενον γινομένων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ πάντων τῶν παραγόντων τῶν γινομένων.

Ἀσκήσεις

1) Πόσα δευτερόλεπτα περιέχει τὸ ἔτος 1907;

2) Τί γίνεται τὸ γινόμενον;

$$2\times3\times4\times5$$

ὅταν εἷς παράγων, π. χ. ὁ 3, αὐξηθῇ κατὰ 1, 2, 3 κ.τ.λ.,

3) Εἰς τὸ προηγούμενον καὶ ἐν γένει εἰς πᾶν γινόμενον ποῖος παράγων πρέπει νὰ αὐξηθῇ κατὰ ὡρισμένον ἀριθμόν, π.χ. 3, ὥστε ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις τοῦ γινομένου νὰ εἶναι ἐλαχίστη ἢ μεγίστη;

4) Ποσάκις τὸ γινόμενον

$$2\times3\times40\times5$$

εἶναι μεῖζον τοῦ

$$2\times3\times4\times5\,;$$

Πολλαπλασιασμὸς διαφορᾶς.

47. Ἔχομεν:

$$(7-4)\times5=5\times(7-4)=5\times3=5+5+5.$$

Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ θὰ εὕρωμεν εἴτε λάβωμεν τὸν 5 τρίς, εἴτε 7κις καὶ εἶτα ἀπορρίψωμεν τέσσαρα 5· δηλ.

$$(7-4)\times5=5\times7-5\times4\cdot\ \text{ἄρα}:$$

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον καὶ ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.

Ἀσκήσεις.

1) Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ φορὰν ἀναχωροῦσιν ἱππεὺς καὶ πεζὸς συγχρόνως διατρέχοντες ὁ μὲν 11 χιλμ. τὴν ὥραν, ὁ δὲ 4· πόσον θὰ ἀπέχωσιν ἀλλήλων μετὰ 5 ὥρας;

2) Τί γίνεται τὸ γινόμενον

$$8 \times 4 \times 9 \times 16,$$

ὅταν ὁ παράγων 9 ἐλαττωθῇ κατὰ 3;

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καθόλου.

1) Ἔστω τὸ γινόμενον

$$528 \times 36.$$

Τοῦτο δὲν δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ

$$528 \times 10 = 5280$$

Ἑπομένως δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ψηφία ὀλιγώτερα τῶν τεσσάρων· εἶναι ὅμως μικρότερον τοῦ

$$528 \times 100 = 52800,$$

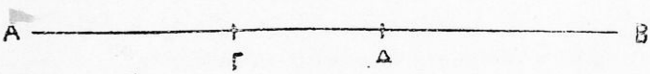
ἑπομένως δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ψηφία περισσότερα τῶν πέντε.

Νὰ διατυπωθῇ ἐντεῦθεν γενικὴ πρότασις ὁρίζουσα τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ψηφίων αὐτῶν.

2) Τὸ μέγιστον γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἐχόντων ἄθροισμα δεδομένον εὑρίσκεται, ὅταν οὗτοι εἶναι ἴσοι· π. χ. τὸ μέγιστον γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἐχόντων ἄθροισμα 10 εἶναι $5 \times 5 = 25$.

3) Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων, ἅτινα ἔχουσι περίμετρον 40 μέτρα, ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;

* 4) Τὴν εὐθεῖαν ΑΒ διαιροῦμεν εἰς τρία μέρη καὶ μετροῦμεν διὰ



τῆς αὐτῆς μονάδος τὴν ὅλην εὐθεῖαν καὶ τὰ μέρη· νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$ΑΔ \times ΓΒ = ΑΒ \times ΓΔ + ΑΓ \times ΒΔ.$$

5) Μίαν βασιλόπηταν ἐμοιράσαμεν εἰς δύο τεμάχια, ἔπειτα ἑκάτερον τούτων εἰς τρία, ἕκαστον τῶν νέων τεμαχίων εἰς 4 καὶ ἕκαστον τούτων εἰς 5. Πόσα εἶναι ὅλα τὰ τεμάχια ἐν τέλει;

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Ὁρισμοί.

48. *Πρόβλημα α').* 5 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 20 δραχ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Λύσις. Πρέπει τὰς 20 δραχμὰς νὰ μοιράσωμεν εἰς 5 ἴσα μέρη· ἓν τούτων εἶναι ἡ ἀξία τοῦ πήχεως, ἤτοι 4 δραχ., διότι

$$4\text{δρ.}+4\text{δρ.}+4\text{δρ.}+4\text{δρ.}+4\text{δρ.}=4\times5=20\text{δρ.}$$

παρατηροῦμεν δὲ συγχρόνως ὅτι ἕκαστον μερίδιον πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν αὐτῶν δίδει τὸ ὅλον ποσόν.

Πρόβλημα β'). Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 δραχ.· πόσους πήχεις δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 20 δραχμάς;

Λύσις. Τόσους, ὅσας φορὰς αἱ 5 δραχμαὶ χωροῦσιν εἰς τὰς 20 ἤτοι 4 πηχ., διότι

$$5\text{δρ.}\times4=20\text{δρ.}$$

παρατηροῦμεν δὲ ὅτι, ἐὰν ποσόν τι χωρῇ πολλάκις ἐπ' ἄλλου ἄνευ ὑπολοίπου, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει ποσάκις χωρεῖ, δίδει τὸ ποσόν, ἐφ' οὗ χωρεῖ.

Ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας λύεται τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο πρόβλημα, λέγεται **διαίρεσις**. Ἄρα:

Διαίρεσις λέγεται ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ἢ μοιράζομεν ἕνα ἀριθμὸν εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσας μονάδας περιέχει ἄλλος ἀριθμός, ἢ εὑρίσκομεν ποσάκις ἀριθμός τις χωρεῖ εἰς ἄλλον.

Ὁ ἀριθμός, ὅστις μοιράζεται ἢ εἰς τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ εὕρωμεν ποσάκις χωρεῖ ἄλλος, λέγεται *διαιρετέος*, ὁ ἄλλος ***διαιρέτης*** καὶ τὸ ἐξαγόμενον ***πηλίκον***. Σημεῖον τῆς πράξεως εἶναι: ἀπαγγελλόμενον *διὰ* καὶ τιθέμενον μεταξὺ διαιρετέου καὶ διαιρέτου· **π. χ.**

$$20 : 5=4$$

Καὶ εἰς τὰ δύο προβλήματα εἴδομεν ὅτι ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον· ἄρα:

Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς διδομένων δύο ἀριθμῶν ζητεῖται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον νὰ δίδῃ τὸν πρῶτον.

Οὕτω δὲ ἀντὶ δύο ὁρισμῶν ἔχομεν μόνον *ἕνα*.

Τελεία καὶ ἀτελὴς διαίρεσις.

49. Ἡ διαίρεσις λέγεται *τελεία*, ὁσάκις ὑπάρχει ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην δίδει τὸν διαιρετέον· π. χ. ἡ διαίρεσις:

$$15 : 5 = 3 \text{ διότι } 3 \times 5 = 15.$$

Εἰς τὴν τελείαν διαίρεσιν λέγομεν ὅτι ὁ διαιρετέος ***διαιρεῖται*** διὰ τοῦ διαιρέτου· π. χ. ὁ 15 διαιρεῖται διὰ τοῦ 5· λέγομεν πρὸς τούτοις ὅτι ὁ 15 εἶναι ***διαιρετὸς*** διὰ 5 ἢ ***πολλαπλάσιον*** τοῦ 5. Ὁ 5 λέγεται ***διαιρέτης*** ἢ ***παράγων*** τοῦ 15.

Ἀτελὴς δὲ λέγεται ἡ διαίρεσις, ὅταν δὲν ὑπάρχῃ ἀκέραιος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ δίδῃ τὸν διαιρετέον. Ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις περισσεύει, ὅταν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης ὅσας φορὰς εἶναι δυνατόν, λέγεται ***ὑπόλοιπον***· π. χ. ἡ διαίρεσις 15 : 7, ἥτις ἀφίνει ὑπόλοιπον 1· διότι

$$15 = 7 \times 2 + 1.$$

Σημ. α') Ἔχομεν $15 = 15 \times 1$, $3 = 3 \times 1$ κ.τ.λ., ἤτοι πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἑαυτοῦ δίδων πηλίκον 1 ἢ διὰ τῆς μονάδος δίδων πηλίκον ἑαυτόν.

Σημ. β') Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Ἰδιότης τοῦ ὑπολοίπου.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον δὲν ἀλλάσσει, ὅταν εἰς τὸν διαιρετέον προστεθῇ ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου.

Πότε τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον ἢ πολυψήφιον.

50. Ἔστω τὸ πηλίκον:

$$1899 : 288$$

Τὸ γινόμενον $288 \times 10 = 2880$ ὑπερβαίνει τὸν διαιρετέον, ἄρα τὸ πηλίκον εἶναι ἔλασσον τοῦ 10, ἤτοι *μονοψήφιον*. Ἐὰν ὅμως θεωρήσωμεν τὸ πηλίκον 1899 : 28, βλέπομεν ὅτι $28 \times 10 = 280$ εἶναι μικρότερον τοῦ 1899· ἄρα ὁ 28 χωρεῖ εἰς τὸ 1899 ἀπὸ 10 καὶ ἄνω φοράς· ἤτοι τὸ πηλίκον εἶναι *πολυψήφιον*.

Γενικῶς :

Ἐάν, πρὶν εὕρωμεν τὸ πηλίκον, θέλωμεν νὰ γνωρίσωμεν, ἂν εἶναι μονοψήφιον ἢ πολυψήφιον, γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρέτου 0· ἐὰν προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρέτου, τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον· ἄλλως μονοψήφιον.

Ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως.

Εἰς πολλὰς περιστάσεις ἰδίως, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, ὁ δὲ διαιρετέος μονοψήφιος ἢ διψήφιος, τὸ πηλίκον εὑρίσκεται ἀπὸ μνήμης. Ὅταν δὲ ἀδυνατῶμεν νὰ εὕρωμεν αὐτὸ ἀπὸ μνήμης, τὸ εὑρίσκομεν διὰ πράξεως προφορικῆς ἢ γραπτῆς.

Περὶ τῆς προφορικῆς διαιρέσεως ἰδὲ μικράν μου Ἀριθμητικήν. Ἐνταῦθα θὰ εἴπωμεν μόνον περὶ τῆς γραπτῆς, ἐν ᾗ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον ἢ πολυψήφιον.

Α' περίπτωσις.

51. Ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν 857 : 96. Τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον (§ 50).

Ὁσάκις αἱ 9 δεκάδες τοῦ διαιρέτου χωροῦσιν εἰς τὰς 85 δεκάδας τοῦ διαιρετέου ἢ εἰς ὁλόκληρον τὸν διαιρετέον, ὅπερ ταὐτό, τοσάκις ἢ ὀλιγωτέρας φορὰς θὰ χωρῇ ὁ διαιρέτης εἰς τὸν διαιρετέον. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 9 χωρεῖ εἰς τὸν 85 ἐννέα φοράς, τὸ πηλίκον εἶναι ἢ 9 ἢ μικρότερον.

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸ 9, πολλαπλασιάζομεν 9×96 καί, ἂν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ 857, τότε τὸ πηλίκον εἶναι 9, ἄλλως δοκιμάζομεν τὸν ἀμέσως μικρότερον ἀριθμὸν 8 καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ 96 νὰ ἀφαιρῆται ἀπὸ 857, ἐκτελοῦντες δὲ τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην εὑρίσκομεν τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{rr|l} & 857 & 96 \\ \cline{3-3} (96\times 8)\cdots\cdots & 768 & 8 \text{ πηλίκον} \\ \cline{2-2} (\text{ὑπόλοιπον}) & 89 & \end{array}$$

ἢ συντομώτερον

$$\begin{array}{r|l} 857 & 96 \\ \cline{2-2} 89 & 8 \end{array}$$

ἤτοι ἐκτελοῦμεν συγχρόνως τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν.

Ἐντεῦθεν ἕπεται·

52. *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, ὅταν εἶναι μονοψήφιον, παρατηροῦμεν ὁποίας μονάδας παριστᾷ τὸ α΄ ψηφίον τοῦ διαιρέτου, εἶτα χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὰς ὁμοίας αὐτοῦ μονάδας. Τὸν χωρισθέντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ α΄ ψηφίου τοῦ διαιρέτου, τὸ δὲ προκῦπτον πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πρὸς εὕρεσιν καὶ τοῦ ὑπολοίπου, ἐὰν ὑπάρχῃ. Ἐὰν δὲ δὲν ἀφαιρῆται, δοκιμάζομεν τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν πηλίκον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ διαιρετέου.*

Σημ. Τὸ πηλίκον 382 : 39 εἶναι μονοψήφιον· ἐπειδὴ δὲ ὁ 3 εἰς τὸ 38 εἰσέρχεται 12άκις, ἡμεῖς ὡς πηλίκα θὰ δοκιμάζωμεν τοὺς ἀπὸ 9 καὶ κάτω ἀριθμούς.

Β' περίπτωσις.

53. Ζητεῖται τὸ πολυψήφιον πηλίκον

$$58856 : 9 \qquad (\S\ 50)$$

Χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τὸν ἀριθμὸν 58, τοῦ ὁποίου τὸ πηλίκον διὰ 9 εἶναι μονοψήφιον. Ἤδη ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς 9 ἀνθρώπους πρόκειται νὰ μοιράσωμεν 58856 δρ. Μοιράζομεν πρῶτον τὰς 58 χιλιάδ., ὁπότε ἕκαστος θὰ λάβῃ 6 χιλ., ὅσον δηλ. εἶναι τὸ πηλίκον 58 : 9, περισσεύουσι δὲ καὶ 4 χιλ. ἢ 40 ἑκατοντ., αἵτινες μὲ τὰς 8 ἑκ. τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 48ἑκ. δρ., τὰς ὁποίας μοιράζομεν εἰς τοὺς 9 ἀνθρώπους· ἕκαστος θὰ λάβῃ ἐξ αὐτῶν 5 ὑπολειπομένων 3 ἑκατ. ἢ 30 δεκ. δρ., αἵτινες μετὰ τῶν 5 τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσι 35 δεκ. δρ., τὰς ὁποίας καὶ ταύτας μοιράζομεν· ἐξ αὐτῶν θὰ λάβῃ ἕκαστος 3 δεκ. δρ. ὑπολειπομένων 8 δεκ. ἢ 80 καὶ μετὰ τῶν 6 ἐν ὅλῳ 86 δρ., τὰς ὁποίας θὰ μοιράσωμεν ἀκόμη, διὰ νὰ τελειώσῃ ἡ διανομή· διαιροῦμεν λοιπὸν 86 : 9 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβῃ ἕκαστος 9 δρ. ὑπολειπομένων ἐκ τῆς ὅλης διανομῆς 5 δρ. Ἐπομένως τὸ ὁλικὸν πηλίκον εἶναι 6539 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 58856 & 9 \\ \cline{2-2} 48 & 6539 \\ 35 & \\ 86 & \\ 5 & \end{array}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου, ὅταν εἶναι πολυψήφιον, χωρίζομεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἀποτελῆται ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ πηλίκον διὰ τοῦ διαιρέτου νὰ εἶναι μονοψήφιον. Εὑρίσκομεν τὸ μονοψήφιον τοῦτο πηλίκον, ὅπερ εἶναι τὸ α'. ψηφίον τοῦ ὅλου πηλίκου, καὶ γράφομεν αὐτὸ *κάτωθεν τοῦ διαιρέτου. Τὸ εὑρεθὲν ψηφίον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἐχωρίσαμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου, καὶ εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 1. Δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου εὑρίσκοντες οὕτω τὸ β' ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ β' ὑπόλοιπον, δεξιὰ τοῦ ὁποίου καταβιβάζομεν τὸ ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ διαιρετέου, ὁπότε εὑρίσκομεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς ὅλης πράξεως, ἐὰν ὑπάρχῃ.*

Σημ. α') Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι μονοψήφιος, π. χ. 586 : 7, ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ἔτι συντομώτερον ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{ll} 586 : 7 & \\ 83 & \text{πηλίκον} \\ 5 & \text{ὑπόλοιπον} \end{array}$$

Σημ. β') Πρὸς εὕρεσιν τοῦ α' ψηφίου τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ καὶ ἓν ἐπὶ πλέον.

Σημ. γ') Θεωρήσωμεν τὴν διαίρεσιν

$$\begin{array}{r|l} 29'76 & 28 \\ \hline 1\,76 & 106 \\ 8 & \end{array}$$

Ἐπειδὴ ὁ 28 δὲν χωρεῖ εἰς τὸ 17, καταβιβάζομεν καὶ τὸ 6, ἀφ' οὗ ὅμως προηγουμένως θέσωμεν 0 εἰς τὸ πηλίκον, διότι τὸ α' ψηφίον 1 παριστᾷ χιλιάδας, ἐνῷ τὸ πηλίκον 176:28 πρέπει νὰ παριστᾷ ἁπλᾶς μονάδας.

Συντομίαι.

54. Ζητεῖται τὸ πηλίκον 58673 : 5000.

Αἱ 5 χιλ. μόνον εἰς τὰς 58 χιλ. δύνανται νὰ χωρῶσιν· ἑπομένως, ὁσάκις ὁ 5 χωρεῖ εἰς τὸν 58, τοσάκις καὶ ὁ 5000 εἰς τὸν

58673, ἤτοι 11άκις· ἄρα τὸ ὅλον πηλίκον εἶναι 11, τὸ δὲ ὑπόλοιπον θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον τοῦ 58 χιλ. καὶ τὸν ἀριθμὸν 673. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 58673 & 5\cancel{000} \\ \cline{2-2} 8 & 11 \\ 3673 & \end{array}$$

Ἡ διαίρεσις συντομεύεται πολὺ περισσότερον, ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι 10, 100, 1000,......... Ἀρκεῖ νὰ χωρίσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ διαιρέτου, ὁπότε τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα εἶναι τὸ πηλίκον, τὸ δὲ ἄλλο τὸ ὑπόλοιπον.

Π. χ. τῆς διαιρέσεως 35΄86 : 100 τὸ πηλίκον εἶναι 35 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 86.

Βάσανος.

55. Πολλαπλασιάζομεν τὸν διαιρέτην ἐπὶ τὸ πηλίκον καὶ εἰς τὸ γινόμενον προσθέτομεν τὸ ὑπόλοιπον, ἐὰν ὑπάρχῃ· ἐὰν εὕρωμεν τὸν διαιρετέον, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς.

Χρῆσις.

56. Εἰς τὰ προβλήματα μεταχειριζόμεθα τὴν διαίρεσιν,

α΄) Ὅταν ποσόν τι πρόκειται νὰ μοιρασθῇ εἰς ἴσα μέρη· π.χ. 25 ἄνθρωποι μοιράζονται ἐξ ἴσου 100 δραχ.· πόσας λαμβάνει ἕκαστος;

β΄) Ὅταν ζητῆται ποσάκις ποσόν τι περιέχεται εἰς ἄλλο ὁμοειδές· π. χ. ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται δρ. 25· πόσους πήχεις δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 100 δρ.;

γ΄) Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων καὶ ζητῶμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς· π. χ. 8 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 56 δραχ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Ἡ γ΄ περίπτωσις ὑπάγεται εἰς τὴν α΄. Εἰς ἀμφοτέρας ταύτας πρόκειται νὰ μοιρασθῇ τὸ ποσὸν τοῦ διαιρετέου καὶ τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ· ἡ διαίρεσις τότε λέγεται **μερισμός**. Εἰς τὴν β΄ πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ποσάκις ποσόν τι χωρεῖ εἰς ἄλλο ὁμοειδές· ἡ διαίρεσις τότε λέγεται *μέτρησις*, τὸ δὲ εἶδος τῶν μονάδων τοῦ πηλίκου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ προβλήματος.

Ὅταν πρόκειται περὶ ἀφῃρημένων ἀριθμῶν, ἡ διαίρεσις ***ἀδιαφόρως*** θεωρεῖται ὡς μερισμὸς ἢ μέτρησις.

Ἀσκήσεις.

1. Εἰς πόσους ἀνθρώπους πρέπει νὰ μοιρασθῶσι 191949 δρχ., ὥστε ἕκαστος νὰ λάβῃ 327 δρ.;

2. Δύο ἅμαξαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων ἐπὶ τῆς συνδεούσης ταύτας ὁδοῦ μήκους 270 χιλμ. διανύουσαι ἡ μὲν 12, ἡ δὲ 15 χιλμ. τὴν ὥραν. Μετὰ πόσας ὥρας θέλουσι συναντηθῆ;

3. Τὸ πηλίκον 59967 : 999 εὑρίσκεται συντόμως ὡς ἑξῆς· χωρίζομεν δεξιὰ τοῦ διαιρετέου 3 ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης. Γράφομεν κατ' ἰδίαν τὸ ἕτερον τμῆμα 59· εἶτα προσθέτομεν 59 καὶ 967 εὑρίσκοντες 1026. Τοῦ ἀθροίσματος τούτου χωρίζομεν πάλιν 3 ψηφία δεξιά· γράφομεν πάλιν κατ' ἰδίαν τὸ ἕτερον τμῆμα 1, εὑρίσκομεν εἶτα τὸ ἄθροισμα $26+1=27$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 27 εἶναι μικρότερος τοῦ 999, λέγομεν ὅτι τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι $59+1=60$, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 27. Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 59'967 & 999 \\ \cline{2-2} 967 & 59 \\ \cline{1-1} 1'026 & 1 \\ \cline{2-2} 26 & 60 \\ \cline{1-1} 27 & \end{array}$$

Τοιαύτη συντομία εἶναι δυνατή, ὁσάκις πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου εἶναι 9. Ποῖος εἶναι ὁ λόγος;*

4. Ἐν ἔτει 1906 ἡ ἑορτὴ τοῦ Ἁγίου Νικολάου συνέπεσεν ἡμέρᾳ Τετάρτῃ. Ποίᾳ ἡμέρᾳ τῆς ἑβδομάδος θὰ συμπέσῃ τὸ ἑπόμενον ἔτος;

* Τὴν μέθοδον ταύτην παρελάβομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς Ι. Χατζιδάκι.

Ἰδιότητες διαιρέσεως.

57. *Θεώρημα α'*.—Πρόκειται εἰς 6 ἀνθρώπους νὰ μοιράσωμεν 27 δραχ. Διαιροῦμεν 27 : 6 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ἕκαστος θὰ λάβῃ 4 δρ., περισσεύουσι δὲ καὶ 3 δρ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν εἰς αὐτοὺς μοιράσωμεν 27 πεντόδραχμα, ἕκαστος θὰ λάβῃ 4 ἀκέραια πεντόδραχμα, θὰ περισσεύσωσι δὲ καὶ 3 πεντόδραχμα (ὀλιγώτερα ἢ ὅσοι εἶναι οἱ ἄνθρωποι)· ἤτοι 27 πεντόδρ.$=$4 πεντ.$\times 6+3$ πεντόδρ.· ἀλλὰ 4 πεντ.$\times 6=$ $=6$ πεντ.$\times 4$· ἄρα 27 πεντ.$=6$ πεντ.$\times 4+3$ πεντόδραχμα· ἤτοι διαιροῦντες $27\times 5 : 6\times 5$ εὑρίσκομεν πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 3×5. Ἄρα

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐν τῇ προτάσει ταύτῃ περιλαμβάνεται καὶ ἡ ἑπομένη·

Ἐὰν διαιρετέον καὶ διαιρέτην τελείας διαιρέσεως πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ διαίρεσις μένει τελεία καὶ τὸ πηλίκον τὸ αὐτό.

58. *Θεώρημα β'*.—Πρόκειται νὰ διαιρέσωμεν $(\alpha\times\beta\times\gamma) : \delta$, ἔστω δὲ $\beta : \delta=\kappa$· θὰ ἔχωμεν $(\alpha\times\kappa\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\kappa\times\delta)\times\gamma=$ $\alpha\times\beta\times\gamma$· ἄρα $(\alpha\times\beta\times\gamma) : \delta=\alpha\times(\beta : \delta)\times\gamma$· ἢ

Γινόμενον διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν εἷς τῶν παραγόντων διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, τῆς διαιρέσεως γινομένης ἀκριβῶς.

Πόρισμα α'.—Γινόμενον διαιρεῖται διά τινος τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἐὰν ἀπαλειφθῇ ὁ παράγων οὗτος· ὥστε

$$(\alpha\times\beta\times\gamma) : \gamma=\alpha\times\beta.$$

Πόρισμα β'.—Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ (τελείως) ἄλλον, θὰ διαιρῇ καὶ πᾶν πολλαπλάσιον αὐτοῦ.

Σημ. *Πόρισμα* λέγεται ἡ πρότασις, ἥτις εἶναι ἄμεσος συνέπεια μιᾶς ἢ πολλῶν ὁμοῦ ἀληθῶν προτάσεων.

59. *Θεώρημα γ'*.—Τὴν εὐθεῖαν ΑΒ διαιροῦμεν εἰς 2 ἴσα μέρη

ΑΓ καὶ ΓΒ καὶ ἑκάτερον τούτων εἰς 3 ἴσα μέρη· ἡ ὅλη εὐθεῖα διηρέθη εἰς 2×3 ἴσα μέρη. Ἐπομένως, ἐὰν ἡ ΑΒ ἔχῃ π.χ. μῆκος 36 μέτρ., θὰ ἔχωμεν·

$$36 \text{ μ.} : (2\times3) = 36 \text{ μ.} : 2 : 3$$

Ἐν γένει

$$\alpha : (\beta\times\gamma\times\delta) = \alpha : \beta : \gamma : \delta \cdot \quad \text{ἢ}$$

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ γινομένου, ἐὰν διαιρεθῇ ἀλληλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου, πασῶν τῶν διαιρέσεων τούτων γινομένων ἀκριβῶς.

60. *Θεώρημα δ'*.—$(\alpha : \gamma + \beta : \gamma)\times\gamma = \alpha + \beta \cdot$ ἄρα

$$(\alpha + \beta) : \gamma = \alpha : \gamma + \beta : \gamma \quad \text{ἢ}$$

Ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν ἕκαστος προσθετέος διαιρεθῇ χωριστὰ καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ πηλίκα, ὅταν πᾶσαι αὗται αἱ διαιρέσεις γίνωνται τελείως.

Πόρισμα. Ἀριθμὸς διαιρῶν (τελείως) ἄλλους ἀριθμοὺς διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

61. *Θεώρημα ε'*.—$(\alpha : \gamma - \beta : \gamma)\times\gamma = \alpha - \beta \cdot$ ἄρα

$$(\alpha - \beta) : \gamma = \alpha : \gamma - \beta : \gamma \quad \text{ἢ}$$

Διαφορὰ διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἐὰν μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος διαιρεθῶσι χωριστά, καὶ ἀπὸ τοῦ α' πηλίκου ἀφαιρεθῇ τὸ β'.

Πόρισμα. Ἀριθμὸς διαιρῶν δύο ἄλλους διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἀσκήσεις.

1) Ποσάκις τὸ γινόμενον

$$120\times9\times16$$

εἶναι μικρότερον τοῦ

$$120\times45\times16 \;;$$

2) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διὰ τρίτου δίδωσιν ἴσα ὑπόλοιπα, ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

3) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.

4) Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ δύο ἄλλους, διαιρεῖ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν.

*5) Θεωρήσωμεν μικτὸν (§ 4) ἀριθμὸν περιεχόμενον μεταξὺ 322 καὶ 323. Ἀκέραιος ἀριθμός, π.χ. ὁ 15, θὰ χωρῇ εἰς αὐτὸν τοσάκις, ὁσάκις καὶ εἰς τὸν 322.

Πῶς στηριζόμενοι ἐπὶ τούτου δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ θεώρημα 57 ἀληθεύει, καὶ ὅταν πᾶσαι αἱ διαιρέσεις δὲν γίνωνται ἀκριβῶς, ἡμεῖς δὲ ζητῶμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου; Π. χ. τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου

$$117 : (2 \times 3 \times 4)$$

εὑρίσκομεν δι' ἀλλεπαλλήλων διαιρέσεων ὡς ἑξῆς·

117	2		
17	58	3	
1	28	19	4
	1	3	4

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς διαιρέσεως καθόλου.

1) Ἠγόρασέ τις ὕφασμα πρὸς 12 δρ. τὸν πῆχυν· ἐὰν τὸ ἠγόραζε πρὸς 10 δρ. τὸν πῆχυν, θὰ ἐλάμβανεν ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων 3 πήχ. περιπλέον. Πόσους πήχεις ἠγόρασε;

2) Κρήνη προμηθεύει εἰς 7 ὥρας 945 ὀκ. ὕδατος, ἑτέρα εἰς 5 ὥρ. 475 ὀκ. καὶ γ' εἰς 6 ὥρ. 936 ὀκ. Εἰς πόσας ὥρ. καὶ αἱ 3 κρῆναι ὁμοῦ ῥέουσαι θὰ πληρώσωσι δεξαμενὴν χωροῦσαν 4246 ὀκ. ὕδατος;

3) Τὸ φῶς φθάνει ἐκ τοῦ Ἡλίου εἰς τὴν Γῆν εἰς 8 πρῶτα λεπτὰ καὶ 13 δεύτερα. Πόσα χιλιόμ. διατρέχει εἰς 1 δευτερόλεπτον γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ Ἥλιος ἀπέχει ἀπὸ τῆς Γῆς 24000 γηΐνας ἀκτῖνας, ὧν ἑκάστη εἶναι 6370 χιλιόμ.;

4) Ἐὰν *μόνον* τὸν διαιρετέον πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ἀριθμόν, τὸ νέον πηλίκον θὰ ἰσῶται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ α΄ πηλίκου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον σὺν τῷ πηλίκῳ, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν διαιροῦντες διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου τὸ γινόμενον τοῦ α΄ ὑπολοίπου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ἐφ' ὃν ἐπολλαπλασιάσαμεν τὸν διαιρετέον.

5) Τί γίνεται τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως, ὅταν *μόνον* τὸν διαιρετέον πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τινα ἀριθμόν;

ΠΕΡΙ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ὁρισμοί.

61. Τὸ γινόμενον $5\times5=25$ λέγεται *τετράγωνον* ἢ *δευτέρα δύναμις* τοῦ 5· παριστάνεται δὲ συμβολικῶς 5^2, ἔνθα ὁ 2 λέγεται *ἐκθέτης*· οὕτω

$$5^2=5\times5=25.$$

Τὸ γινόμενον $5\times5\times5$ λέγεται *κύβος* ἢ *τρίτη δύναμις* τοῦ 5 καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ συμβόλου 5^3· καὶ ἐνταῦθα ὁ 3 λέγεται ἐκθέτης· ὥστε

$$5^3=5\times5\times5=125.$$

Ὁμοίως τὸ γινόμενον $5\times5\times5\times5$ λέγεται *τετάρτη δύναμις* τοῦ 5 καὶ παριστάνεται διὰ τοῦ 5^4· καὶ γενικῶς

Δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον παραγόντων ἴσων τῷ ἀριθμῷ τούτῳ. Λέγεται δὲ δευτέρα ἢ τετράγωνον, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι δύο· τρίτη ἢ κύβος, ὅταν εἶναι τρεῖς· τετάρτη, ὅταν εἶναι τέσσαρες κτλ.

Παριστάνομεν δὲ συμβολικῶς τὴν $\nu^{\eta\nu}$ δύναμιν ἀριθμοῦ τινος α διὰ τοῦ α^ν ἔνθα ὁ μὲν ν λέγεται ἐκθέτης, ὁ δὲ α βάσις τῆς δυνάμεως.

62. Παρατηροῦμεν ὅτι:

$$10^2=100$$
$$10^3=1000$$
$$10^4=10000 \text{ κτλ.}$$

63. Κατὰ συνθήκην ἔχομεν

$$5^1=5,\ 8^1=8 \text{ κτλ.}$$

Ἰδιότητες.

64. α′) Τὸ γινόμενον $2^2 \times 2^3 \times 2^4$ ἢ τὸ ἴσον αὐτῷ

$$(2\times2)\times(2\times2\times2)\times(2\times2\times2\times2)$$

ἰσοῦται (§ 45) τῷ $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^9$
καὶ γενικῶς $\alpha^\mu \times \alpha^\nu \times \alpha^\kappa = \alpha^{\mu+\nu+\kappa}$ ἤτοι·

Γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων.

β′) Ἐκ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος συνάγομεν

$$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\times\nu}.\ \text{ἤτοι}$$

Δύναμις ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν, ἐὰν ἡ ἀρχικὴ βάσις ὑψωθῇ εἰς δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

γ′) Θεωρήσωμεν τὸ γινόμενον $(2\times3)^2$· ἔχομεν
$(2\times3)^2=(2\times3)\times(2\times3)=2\times3\times2\times3=2^2\times3^2$· γενικῶς

$$(\alpha\times\beta)^\nu = \alpha^\nu \times \beta^\nu.\ \text{ἤτοι}$$

Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ὑψωθῇ ἕκαστος τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

δ′) Ἐκ τῆς ἰσότητος $2^5\times2^3=2^8$ συνάγομεν

$$2^8 : 2^5 = 2^3.\ \text{καὶ γενικῶς}$$

$$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}.\ \text{ἤτοι}$$

Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις αὐτοῦ μὲ ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου.

Σημ. Διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ ἰδιότης αὐτη, καὶ ὅταν οἱ δύο ἐκθέται εἶναι ἴσοι, δεχόμεθα ὅτι $\alpha^0=1$, τότε δ' ἔχομεν $2^5 : 2^5 = 2^0 = 1$.

Ἀσκήσεις.

1) Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ οἱουδήποτε λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς ὃ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου.

2) Ἐὰν ἀριθμός τις λήγῃ εἰς 5, τὸ τετράγωνόν του θὰ λήγῃ εἰς 25.

3) Νὰ εὑρεθῶσιν αἱ τέταρται δυνάμεις τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

4) Ἐὰν λάβωμεν δύο ἀριθμούς, ὧν οὐδέτερος λήγει εἰς 5 ἢ 0, ἡ διαφορὰ τῶν τετάρτων δυνάμεων αὐτῶν λήγει εἰς 5 ἢ 0.

5) $(\alpha+6)\times(\alpha-6)=\alpha^2-6^2$.

6) Τί γίνεται τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, ὅταν διαιρετέος καὶ διαιρέτης ὑψωθῶσιν εἰς τὸ τετράγωνον ἢ οἱανδήποτε ἐν γένει δύναμιν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

ΠΡΩΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμοί.

65. ***Πρῶτος*** ἀριθμὸς λέγεται ἐκεῖνος, ὅστις δὲν ἔχει ἄλλους διαιρέτας εἰμὴ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα. Τοιοῦτοι εἶναι π. χ. οἱ ἀριθμοί 5, 7, 17. Πᾶς μὴ πρῶτος ἀριθμὸς λέγεται ***σύνθετος***· π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 6, 8, 20.

Ἐκ τῶν διαιρετῶν ἑνὸς ἀριθμοῦ, π. χ. τοῦ 10, ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ὁ 2, λέγεται ***δεύτερος*** διαιρέτης.

Σημ. Πᾶς ἀριθμὸς σύνθετος εἶναι γινόμενον τοῦ β' αὐτοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ συνθέτου τούτου ἀριθμοῦ.

Ἰδιότητες.

66. ***Θεώρημα α'.***—Ἔστω δ ὁ δεύτερος διαιρέτης τοῦ α. Ἐὰν ὁ δ διῃρεῖτο δι' ἀριθμοῦ μικροτέρου αὐτοῦ καὶ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος, ἔστω τοῦ δ', τότε ὁ δ' θὰ διῄρει καὶ τὸν α, ὁπότε ὁ δ δὲν θὰ ἦτο ὁ δεύτερος διαιρέτης· ἄρα ὁ δ εἶναι πρῶτος.

Ὅθεν ἕπεται

Ὁ δεύτερος διαιρέτης παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι πρῶτος.

Πόρισμα α'. Πᾶς ἀριθμὸς διαιρεῖται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ.

67. ***Θεώρημα β'.*** — Ἔστω π τὸ πηλίκον τοῦ Α διὰ τοῦ δευτέρου αὐτοῦ διαιρέτου δ· ἔχομεν

$$A=\delta\times\pi$$

Ὁ δ, ὡς εἴπομεν, εἶναι πρῶτος, ὁ δὲ π μικρότερος τοῦ Α·

Ἐὰν $\pi > 1$, θὰ ἔχωμεν ὁμοίως

$$\pi = \delta' \times \pi',$$

ἔνθα δ' εἶναι πρῶτος καὶ $\pi' < \pi$· ἐπομένως $A = \delta \times \delta' \times \pi'$·

ἐὰν πάλιν $\pi' > 1$, θὰ ἔχωμεν

$$A = \delta \times \delta' \times \delta'' \times \pi''.$$

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ π, π',...... βαίνουσιν ἐλαττούμενοι, ἀναγκαίως εἶναι ὡρισμένοι τὸ πλῆθος καὶ ὁ τελευταῖος εἶναι ἡ μονάς· ἄρα

$$A = \delta \times \delta' \times \delta'' \times \delta''' \ldots\ldots\ldots \text{ ἤτοι}$$

Πᾶς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον πρώτων παραγόντων.

Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος, οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ εἶναι μόνον αὐτὸς οὗτος καὶ ἡ μονάς· π. χ. $5 = 5 \times 1$.

68. *Θεώρημα γ'.*—Ἔστω π πρῶτος καὶ υ ἀριθμός τις μικρότερος τοῦ π. Ἐπαναλαμβάνομεν π φορὰς τὸν υ καὶ ἔχομεν

$$\upsilon + \upsilon + \ldots\ldots + \upsilon + \upsilon + \upsilon + \upsilon + \upsilon + \upsilon = \upsilon \times \pi. \quad (1)$$

Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ υ δίδει πολλαπλάσιον τοῦ π, εἶναι μικρότερος τοῦ π, ἔστω δὲ οὗτος ὁ 3 καὶ ὅτι π. χ.

$$\upsilon + \upsilon + \upsilon = \pi \times 2$$

Ἐὰν ἐν τῇ σειρᾷ (1) ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν π. χ. χωρίζωμεν τὰ υ ἀνὰ τρία, δὲν θὰ περισσεύσωσιν υ πρὸς τὰ ἀριστερά, διότι τότε τὸ γινόμενον $\upsilon \times \pi$ θὰ ἠδύνατο νὰ παρασταθῇ ὡς ἑξῆς

$$A \times 2 \times \pi + \upsilon \text{ ἢ}$$
$$A \times 2 \times \pi + (\upsilon + \upsilon)$$

ὁπότε δὲν θὰ ἦτο πολλαπλάσιον τοῦ π (§ 61), διότι οὔτε τὸ υ οὔτε τὸ $\upsilon + \upsilon$ ἀποτελοῦσι πολλαπλάσιον τοῦ π· ἄρα ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ πλῆθος τῶν υ τῆς σειρᾶς (1), ἤτοι ὁ π, ἔπρεπε νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, διαφόρου τῆς μονάδος, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ π εἶναι πρῶτος. Ἑπομένως ὁ υ πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ τοὐλάχιστον π φοράς, ἵνα ἀποτελέσῃ πολλαπλάσιον τοῦ π:

Ἐντεῦθεν συνάγομεν

Ἀριθμὸς πρῶτος οὐδέποτε διαιρεῖ γινόμενον δύο ἀριθμῶν μικροτέρων του.

69. *Θεώρημα δ'.*—Ἔστω Π ἀριθμὸς πρῶτος, ὅστις διαιρεῖ τὸ γινόμενον $A\times B$ χωρὶς νὰ διαιρῇ οὔτε τὸν A οὔτε τὸν B. Παριστῶντες διὰ π τὸ πηλίκον τοῦ A διὰ Π (τὸ π δύναται νὰ εἶναι καὶ 0) καὶ διὰ υ τὸ ὑπόλοιπον θὰ ἔχωμεν

$$A=\Pi\times\pi+\upsilon$$

Ὁμοίως $\qquad B=\Pi\times\pi'+\upsilon'.$

Ἑπομένως $A\times B=(\Pi\times\pi+\upsilon)\times(\Pi\times\pi'+\upsilon')=$
$$\Pi\times\pi\times\Pi\times\pi'+\Pi\times\pi\times\upsilon'+\Pi\times\pi'\times\upsilon+\upsilon\times\upsilon'$$

Ὁ Π διαιρῶν τὸν $A\times B$ θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ ἄθροισμα, ὁπότε (§ 61) ἔπρεπε νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον $\upsilon\times\upsilon'$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ Π εἶναι πρῶτος, οἱ δὲ ἀριθμοὶ υ καὶ υ' μικρότεροι αὐτοῦ· ἄρα ὁ Π πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου $A\times B$.

Ἐὰν ἔχωμεν γινόμενον τριῶν παραγόντων $A\times B\times \Gamma$, τοῦτο δύναται (§ 46) νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον δύο παραγόντων τοῦ A καὶ $B\times\Gamma$, ὁπότε ὁ Π πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν A ἢ τὸν $B\times\Gamma$· ἐὰν δὲ μὴ διαιρῶν τὸν A διαιρῇ τὸν $B\times\Gamma$, θὰ διαιρῇ τὸν B ἢ τὸν Γ.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι καὶ ἐπὶ γινομένου παραγόντων περισσοτέρων τῶν τριῶν συνάγομεν

Πᾶς πρῶτος ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, διαιρεῖ τοὐλάχιστον ἕνα ἐξ αὐτῶν.

Πόρισμα α'.—Ἀριθμὸς πρῶτος, ἐὰν διαιρῇ δύναμιν ἑνὸς ἀριθμοῦ, διαιρεῖ καὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Πόρισμα β'.—Ἀριθμὸς πρῶτος, ἐὰν διαιρῇ γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν, εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν.

70. *Θεώρημα ε'*.—Ἔστωσαν δύο γινόμενα πρώτων παραγόντων ἴσα

$$A\times B\times \Gamma = \alpha\times \beta\times \gamma$$

ὁ Α ὡς διαιρῶν τὸ α' γινόμενον διαιρεῖ καὶ τὸ β', ἄρα εἶναι ἴσος πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ, π. χ. τὸν α, ἤτοι Α=α.

Ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ Α περιέχεται εἰς τὸ α' γινόμενον περισσοτέρας φορὰς ἢ εἰς τὸ β'· π. χ. ὅτι ἔχομεν

$$A\times A\times B\times \cdots\cdots = A\times B\times \cdots\cdots$$

Διαιροῦντες τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης δι' Α ἔχομεν

$$A\times B\times \cdots\cdots = B\times \cdots\cdots$$

ὅπερ ἄτοπον, διότι ὁ Α θὰ περιέχηται μόνον εἰς τό α' γινόμενον· ἄρα

Ἐὰν δύο γινόμενα πρώτων παραγόντων εἶναι ἴσα, πᾶς πρῶτος παράγων περιεχόμενος εἰς τὸ ἓν θὰ περιέχηται καὶ εἰς τὸ ἕτερον καὶ τοσάκις εἰς τὸ ἕν, ὁσάκις καὶ εἰς τὸ ἕτερον.

Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ παρίστανται ὡς γινόμενα πρώτων παραγόντων, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς παράγοντας καὶ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν εἶναι ἴσοι. Π.χ. τὰ γινόμενα

$$5^2\times 7\times 11 \quad \text{καὶ} \quad 3^3\times 5^4\times 7$$

δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα.

Πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

71. Θεωρήσωμεν ὁσουσδήποτε πρώτους ἀριθμοὺς

$$A,\quad B,\quad \Gamma,\quad \Delta\cdot$$

εἰς τὸ γινόμενον αὐτῶν προσθέτομεν 1 καὶ ἔχομεν

$$A\times B\times \Gamma\times \Delta+1$$

Ἔστω Π πρῶτος ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ ἄθροισμα τοῦτο· ἐὰν οὗτος (διάφορος τῆς μονάδος) ἦτο εἷς τῶν δοθέντων, τότε ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν μετὰ τῆς μονάδος ἔπρεπε (§ 61) νὰ διαιρῇ καὶ τὴν μονάδα, ὅπερ ἄτοπον· ὥστε ὁ Π εἶναι διάφορος τῶν δοθέντων καὶ ἑπομένως, ὁσουσδήποτε πρώτους ἀριθμοὺς καὶ ἂν θεωρήσωμεν, ὑπάρχει πλὴν αὐτῶν καὶ ἕτερος· ἤτοι

Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον.

Ἀσκήσεις.

1) Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς πλὴν τοῦ 2 καὶ 3 αὐξανόμενος ἢ ἐλαττούμενος κατὰ μίαν μονάδα γίνεται σύνθετος.

2) Ἐὰν ἀριθμός τις δὲν διαιρῆται δι' οὐδενὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα περιέχονται εἰς αὐτόν, εἶναι πρῶτος.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

72. Θέλομεν νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 μέχρις 100. Γράφομεν κατὰ σειρὰν πάντας τοὺς ἀριθμοὺς ἀπὸ 1 μέχρις 100, ἐργαζόμεθα δ' ἔπειτα ὡς ἑξῆς

1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Ὁ 2 εἶναι πρῶτος ἀριθμός, οὐχὶ ὅμως καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα διαγράφομεν· πρὸς τοῦτο μετὰ τὸν 2 ἀριθμοῦμεν ἐν τῇ σειρᾷ ταύτῃ ἀνὰ δύο καὶ διαγράφομεν πάντα δεύτερον ἀριθμόν. Μετὰ τὸν 2 ἔρχεται ὁ 3 πρῶτος ἀριθμός, μεθ' ὃν διαγράφομεν πάντα τρίτον ἀριθμόν, διαγράφοντες οὕτω πάντα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3, τινὰ τῶν ὁποίων, π.χ. ὁ 30, εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια καὶ τοῦ 2, ἀλλ' ἡ ἐκ νέου αὐτῶν διαγραφὴ δὲν βλάπτει. Ὁ 4 ὡς καὶ πάντα τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2. Ὁ 5 εἶναι πρῶτος, πρόκειται δὲ νὰ διαγράψωμεν καὶ τούτου τὰ πολλαπλάσια· τὸ πρῶτον αὐτῶν, ὅπερ δὲν διεγράφη ἤδη, εἶναι τὸ τετράγωνον αὐτοῦ $5 \times 5 = 25$, διότι τὰ μικρότερα αὐτοῦ πολλαπλάσια, π. χ. τοῦ 5×5, εἶναι ἤδη διαγεγραμμένα ὡς πολλαπλάσια ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 5· διὰ τοῦτο ἀρχόμενοι μετὰ τὸν 25 διαγράφομεν πάντα πέμπτον ἀριθμόν. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διαγράφομεν καὶ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7, μεθ' ὃ ἡ ἐργασία ἐπερατώθη· διότι ὁ α΄ μὴ διαγεγραμμένος ἀριθμὸς ἐν τῇ σειρᾷ ὁ εὑρισκόμενος μετὰ τὸν 7 εἶναι ὁ 11, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον 121, ἤτοι τὸ α΄ μὴ διαγεγραμμένον πολλαπλάσιον, εὑρίσκεται πέραν τοῦ 100 καὶ ἔτι μᾶλλον βεβαίως τὰ τετράγωνα τῶν μεγαλυτέρων τοῦ 11 ἀριθμῶν. Καθ' ὅμοιον τρόπον εὑρίσκομεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ 1.....1000 ἢ οἱουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ. Ὁ ἑπόμενος πίναξ περιέχει τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ 1.......1000.

1	59	139	233	337	439	557	653	769	883
2	61	149	239	347	443	563	659	773	887
3	67	151	241	349	449	569	661	787	907
5	71	157	251	353	457	571	673	797	911
7	73	163	257	359	461	577	677	809	919
11	79	167	263	367	463	587	683	811	929
13	83	173	269	373	467	593	691	821	937
17	89	179	271	379	479	599	701	823	941
19	97	181	277	383	487	601	709	827	947
23	101	191	281	389	491	607	719	829	953
29	103	193	283	397	499	613	727	839	967
31	107	197	293	401	503	617	733	853	971
37	109	199	307	409	509	619	739	857	977
41	113	211	311	419	521	631	743	859	983
43	127	223	313	421	523	641	751	863	991
47	131	227	317	431	541	643	757	877	997
53	137	229	331	433	547	647	761	881	—

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *Κόσκινον τοῦ Ἐρατοσθένους*.

ΑΡΙΘΜΟΙ ΠΡΩΤΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ

Ὁρισμοί.

73. *Κοινὸς διαιρέτης* ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν λέγεται ὁ διαιρῶν πάντας τούτους· π. χ. ὁ 2 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 4, 8, 12· ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ 4 εἶναι κοινοὶ διαιρέται αὐτῶν.

Τὸν κοινὸν διαιρέτην παριστῶμεν συντόμως διὰ τοῦ κ. δ.

74. Οἱ μηδένα κ.δ. ἔχοντες ἀριθμοὶ ἄλλον πλὴν τῆς μονάδος λέγονται *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*· π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

8, 9, 10.

Σημ. Πρεπει νὰ διακρίνωμεν τὰς ἐννοίας *ἀριθμοὶ πρῶτοι (καθ' ἑαυτούς)*, καὶ *ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*· π.χ. ὁ 9, σύνθετος καθ' ἑαυτόν, εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν 10, ὁμοίως σύνθετον.

Θεωρήματα.

75. α') Ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς Δ διαιρεῖ τὸ γινόμενον $A \times B$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν A. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Π τὸ πηλίκον $A \times B : \Delta$, ἔχομεν

$$\Delta \times \Pi = A \times B.$$

Θεωρήσωμεν ἤδη τοὺς ἀριθμοὺς Δ, Π, A καὶ B ἀναλελυμένους εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας· εἶναι φανερὸν ὅτι πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν Δ καὶ Π ὁμοῦ λαμβανόμενοι εἶναι οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ $\Delta \times \Pi$. Ὁμοίως πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν A καὶ B ὁμοῦ εἶναι οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ $A \times B$, οἵτινες (§ 70) πρέπει νὰ εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς τοῦ $\Delta \times \Pi$ καὶ μὲ τοὺς αὐτοὺς ἐκθέτας.

Ἐπειδὴ δὲ Δ καὶ A εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ Δ μὲ τοὺς ἐκθέτας των περιέχονται ὡς παράγοντες εἰς τὸν B· ἑπομένως τὸ γινόμενον αὐτῶν, ἤτοι ὁ Δ, εἶναι παράγων τοῦ B, ἤτοι τὸν διαιρεῖ. Ἄρα

Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, θὰ διαιρῇ τὸν ἕτερον.

76. β′) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Δ διαιρετὸς διὰ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ***ἀνὰ δύο***, ἤτοι τοῦ Α πρὸς τὸν Β, τοῦ Α πρὸς τὸν Γ καὶ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ.

Παριστῶντες διὰ Π τὸ πηλίκον Δ : Α ἔχομεν

$$\Delta = (\mathrm{A} \times \Pi) \quad (1)$$

Ὁ Β διαιρῶν τὸν Δ ἢ Α×Π καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν Α διαιρεῖ τὸν Π· ἄρα

$$\Pi = \mathrm{B} \times \Pi' \quad (2)$$

Ὁ Γ διαιρῶν τὸν Δ ἢ Α×Π καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν Α διαιρεῖ τὸν Π ἢ Β×Π′, ἑπομένως καὶ τὸν Π′· ἄρα

$$\Pi' = \Gamma \times \Pi'' \quad (3)$$

Ἐὰν ἤδη τὰς ἰσότητας (1)(2) (3) πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη καὶ ἀπαλείψωμεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας Π καὶ Π′, λαμβάνομεν

$$\Delta = (\mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \Gamma) \times \Pi''$$

Ἑπομένως ὁ Δ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου Α×Β×Γ· ἤτοι

Ἀριθμὸς διαιρετὸς δι᾽ ἄλλων πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἐφαρμογή. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου εὐκολύνεται πολλάκις ἡ εὕρεσις γνωρισμάτων διαιρετότητος· π. χ. ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ $24 = 2 \times 3 \times 4$, ἐὰν εἶναι διαιρετὸς διὰ 2, διὰ 3 καὶ διὰ 4, διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἀνὰ δύο πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

77. γ′) Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς Α, Β, Γ μὴ πρώτους πρὸς ἀλλήλους· ἔστω δὲ Κ κ. δ. αὐτῶν διάφορος τῆς μονάδος, ὅστις θὰ διαιρῆται ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ π. Ὁ π ὡς διαιρῶν τὸν Κ θὰ διαιρῇ (§ 58) καὶ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ Α, Β, Γ· ἄρα

Ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι πάντοτε ὡς κ. δ. πρῶτόν τινα ἀριθμόν.

78. δ') Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

$$A, \quad B, \quad \Gamma,$$

πρώτους πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱασδήποτε αὐτῶν δυνάμεις· π.χ.

$$A^3, \ B^4, \ \Gamma^2.$$

Ἐὰν αἱ δυνάμεις αὗται δὲν εἶναι πρῶται πρὸς ἀλλήλας, θὰ ἔχωσιν ὡς κ. δ. πρῶτόν τινα ἀριθμόν, ἔστω τὸν π, ὅστις διαιρῶν τὸν A^3 θὰ διαιρῇ καὶ τὸν A (§ 69)· ὁμοίως ὡς διαιρῶν τὸν B^4 καὶ τὸν Γ^2 θὰ διαιρῇ καὶ τοὺς B καὶ Γ, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ A, B, Γ θὰ εἶχον κ. δ. τὸν π, διάφορον τῆς μονάδος, ὅπερ ἄτοπον, διότι ὑπετέθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἄρα

Ἀριθμῶν πρώτων ***πρὸς ἀλλήλους αἱ δυνάμεις εἶναι*** *πρῶται πρὸς ἀλλήλας.*

Ἀσκήσεις.

1) Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς πάντα μὴ διαιρούμενον ὑπ' αὐτοῦ.

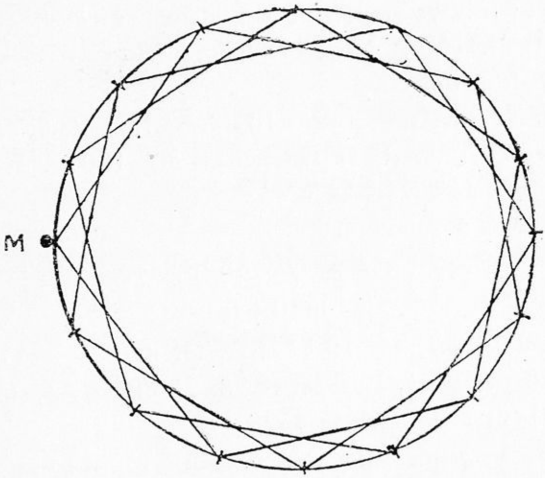
2) Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς αὐτὸ τὸ γινόμενον.

3) Ἐὰν ἀριθμός τις Δ διαιρῆται διὰ δύο ἄλλων A καὶ B χωρὶς νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν, οἱ ἀριθμοὶ A καὶ B δὲν δύνανται νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

4) Ἐὰν A εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν B, θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ ἄθροισμα $A+B$.

5) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ Α γίνεται πολλαπλάσιον τοῦ Β, εἶναι ὁ Β· π. χ. ὁ ἐλάχιστος ἀριθμός, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ 3 γίνεται πολλαπλάσιον τοῦ 16, εἶναι ὁ 16.

6) Περιφέρεια κύκλου εἶναι διῃρημένη εἰς 16 μέρη. Ἐὰν ἀρ-



χόμενοι ἀπό τινος σημείου τῆς διαιρέσεως Μ ἑνώσωμεν ἀνὰ 4 τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως διὰ χορδῶν, μετὰ πόσας τοιαύτας χορδὰς τὸ ὀλιγώτερον θὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον Μ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΟΣ

Ἐνταῦθα θὰ θεωρήσωμεν ὡρισμένους διαιρέτας καὶ θὰ ἐξετάσωμεν, πῶς δυνάμεθα χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν νὰ γνωρίζωμεν, ἂν ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ τῶν διαιρετῶν τούτων.

α') *Διὰ 10, 100,.......*

79. Εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ 10 διαιρεῖται ἀριθμός τις, ἐὰν τελειώνῃ τοὐλάχιστον εἰς ἓν μηδενικόν, διὰ 100, ἐὰν τελειώνῃ τοὐλάχιστον εἰς δύο μηδενικὰ κ.τ.λ.

β') *Διὰ 2 ἢ 5.*

80.—Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 3528, ὅστις γράφεται καὶ ὡς

$$3520+8$$

Ὁ 2 ἢ 5 διαιροῦντες τὸν 10 θὰ διαιρῶσι καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 3520· ἂν λοιπὸν διαιρῶσι τὸν 8, θὰ διαιρῶσι καὶ τὸ ἄθροισμα (§ 60), ἤτοι τὸν ἀριθμὸν 3528. Ἄρα

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 2 ἢ 5, ὅταν τὸ τελευταῖον αὐτοῦ ψηφίον εἶναι διαιρετὸν διὰ 2 ἢ 5, ὅταν δὲ τὸ τελευταῖον ψηφίον εἶναι 0, διαιρεῖται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5.

Ἕπεται ἐκ τοῦ κανόνος τούτου, ὅτι διὰ 2 διαιροῦνται οἱ ἀριθμοί, οἵτινες λήγουσιν εἰς ἓν τῶν ψηφίων 0, 2, 4, 6, 8 καὶ οἵτινες λέγονται ***ἄρτιοι***· διὰ 5 δὲ οἱ λήγοντες εἰς 0 ἢ 5.

Πάντες οἱ μὴ ἄρτιοι ἀριθμοὶ λέγονται ***περιττοί***.

Ἄρτιοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ldots\ldots$$

περιττοὶ δὲ οἱ ἀριθμοὶ

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Πόρισμα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

γ') *Διὰ 4 ἢ 25.*

81. Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 8482· οὗτος γράφεται καὶ $8400+82$· ὁ 4 ἢ ὁ 25 διαιροῦντες τὸν $100=4\times25$ θὰ διαιρῶσι καὶ τὸ πολλαπλάσιόν του 8400· ἐπομένως, ἐὰν διαιρῶσι καὶ τὸν 82, θὰ διαιρῶσι καὶ τὸ ἄθροισμα 8482. Ἄρα

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4 ἢ 25, ἐὰν τὰ δύο τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία, ὡς εἶναι γεγραμμένα, ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ 4 ἢ 25.

Π. χ. ὁ 1968 διαιρεῖται διὰ 4, διότι διαιρεῖται ὁ 68· ὁμοίως ὁ 1975 διαιρεῖται δι' 25, διότι διαιρεῖται ὁ 75.

Πόρισμα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ 25 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ τελευταῖα ψηφία.

δ') *Διὰ 8 ἢ 125.*

82. Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν $58482=58000+482$.

Ἐπειδὴ $1000=8\times125$, σκεπτόμενοι ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι

Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 8 ἢ 125, ὅταν τὰ τρία τελευταῖα αὐτοῦ ψηφία, ὡς εἶναι γεγραμμένα, ἀποτελῶσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.

Π. χ. ὁ 54488 διαιρεῖται δι' 8, διότι ὁ 488 διαιρεῖται δι' 8.

Πόρισμα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι' 8 ἢ 125 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ τρία τελευταῖα ψηφία.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ τῶν χρηματικῶν ποσῶν 5867 δρ., 3868 δρ., 5000 δρ., 6800 δρ., 5675 δρ. ποῖα δύνανται νὰ πληρωθῶσι δι' ἀκεραίων διδράχμων ἢ πεντοδράχμων, ἢ 25δράχμων ἢ 100δράχμων;

2) Ἐὰν ἀπὸ 5867 δρ. ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ ἐν αὐταῖς περιεχόμενα 5δραχμα ἢ 25δραχμα, πόσαι δρ. ὑπολείπονται;

3) Τὸ γινόμενον δύο ἢ περισσοτέρων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ 2.

4) Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων διαιρῆται διὰ 4.

5) Γινόμενον περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμοίως περιττὸς ἀριθμός.

ε') *Διὰ 3 ἢ 9.*

83. Παρατηροῦμεν ὅτι

$$1\times9=9$$
$$11\times9=99$$
$$111\times9=999 \quad \text{κ.τ.λ.}$$

ἤτοι πᾶς ἀριθμός, τοῦ ὁποίου πάντα τὰ ψηφία εἶναι 9, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9· ἀλλ' ἔχομεν

$$10=\ 9+1$$
$$100=\ 99+\ 1$$
$$1000=\ 999+1$$

ἤτοι, ἐὰν ἀπὸ μονάδα *οἱασδήποτε* τάξεως ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ 9 ἢ πάντα τὰ 3, τὰ ὁποῖα περιέχει, ἀπομένει ἡ ἁπλῆ μονάς.

Ἔστω ἤδη ὁ ἀριθμὸς 58673. Ἐὰν ἐξ ἑκάστης τῶν 5 μυριάδων, τῶν 8 χιλιάδων κ.τ.λ. αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν πάντα τὰ 9 ἢ πάντα τὰ 3, θὰ μείνῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ

$$5+8+6+7+3.$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ ἀφαιρεθέντα ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ ἀριθμὸν διαιρετὸν δι' 9 ἢ 3, ἕπεται ὅτι

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 3 ἢ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9.

Π. χ. ὁ 2721 διαιρεῖται διὰ 3· ὁ 2763 δι' 9 καὶ διὰ 3. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι μέγας ἀριθμός, λαμβάνομεν καὶ τούτου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων· π. χ. ἐὰν πρόκειται περὶ τοῦ ἀριθμοῦ 5867838, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ εἶναι 45, τούτου δὲ πάλιν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 9, ὅπερ ἀμέσως βλέπομεν ὅτι εἶναι διαιρετὸν δι' 9· ἄρα ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 9.

Πόρισμα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 3 ἢ 9 ἰσοῦται τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ.

ς΄) *Διὰ 6.*

84. Οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 εἶναι ***πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους***· ἐπειδὴ δὲ

$$6=2\times3$$

ἕπεται κατὰ τὸ θεώρημα ὅτι

Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 6, ἐὰν διαιρῆται καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 3.

Π. χ. ὁ 264 εἶναι διαιρετὸς δι' 6, ὡς διαιρούμενος διὰ 2 καὶ διὰ 3.

ζ΄) *Διὰ 11.*

85. Χαρακτῆρα διαιρετότητος δι' 11 εὕρομεν τὸν ἑπόμενον, ὅστις καὶ συντομώτατος εἶναι καὶ ἔχει τὸ μέγα πλεονέκτημα, ὅτι παρέχει ἀμέσως τὸ πηλίκον, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 627· ὑπὸ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων αὐτοῦ 7 γράφομεν 0 καὶ ὑπ' αὐτὸ ὁριζοντίαν γραμμήν·

$$\begin{array}{r} 627 \\ 570 \\ \hline 057 \end{array}$$

Ἔπειτα λέγομεν 0 ἀπὸ 7 ἴσον 7, ὅπερ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν καὶ εἰς τὴν στήλην τῶν μονάδων· ἔπειτα 7 ἀπὸ 12 (διότι δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ 2) ἴσον 5, ὅπερ γράφομεν ὑπὸ τὴν γραμμὴν ἀριστερὰ τοῦ 7· ἔπειτα 5 καὶ 1 (κρατούμενον) ἴσον 6, ἀπὸ 6 ἴσον 0.

Ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὕτη ἀφαίρεσις ἔδωκεν ὑπόλοιπον 0, συνάγομεν ὅτι ὁ 627 εἶναι διαιρετὸς δι' 11 καὶ τὸ *πηλίκον* εἶναι 57.

Διότι $627=570+57=57\times(10+1)=57\times11$.

Εὐκόλως δὲ παρατηροῦμεν ὅτι, *ὁσάκις* ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' 11, ἡ τελευταία τῶν ἀφαιρέσεων, περὶ ὧν εἴπομεν, θὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 0, διότι πᾶς τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον ἑτέρου ἐπὶ 11· π. χ. 57×11, ὅπερ εὑρίσκεται διὰ τῆς ἑπομένης προσθέσεως·

$$\begin{array}{r} 57 \\ 570 \\ \hline 625 \end{array}$$

ἡμεῖς δὲ οὐδὲν ἄλλο πράττομεν ἢ νὰ ἀφαιρῶμεν 570 ἀπὸ 627. Ἑπομένως θὰ εὕρωμεν 57, τοῦθ' ὅπερ ἀπαιτεῖ ἡ τελευταία ἀφαίρεσις νὰ δώσῃ ὑπόλοιπον 0. Ἄρα

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 11, ἀφαιροῦμεν τὰς μονάδας αὐτοῦ ἀπὸ τὰς δεκάδας, τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν ἀπὸ τὰς ἑκατοντάδας, τὴν νέαν διαφορὰν ἀπὸ τὰς χιλιάδας καὶ οὕτω καθεξῆς· ἐὰν ἡ τελευταία ἀφαίρεσις δώσῃ ὑπόλοιπον 0, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 11, τὸ δὲ πηλίκον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰς εὑρεθείσας διαφορὰς καὶ τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.

Π. χ. ὁ 407 διαιρεῖται δι' 11, διότι 7 ἀπὸ 10 ἴσον 3, 3 καὶ 1 ἴσον 4, ἀπὸ 4 ἴσον 0, τὸ δὲ πηλίκον εἶναι 37.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ τῶν ἀριθμῶν

17601,	52803,	105606
64537,	5867,	58671

τίνες διαιροῦνται διὰ 3 ἢ 9 ἢ 6 ἢ 11;

2) Ἐὰν πάντα τὰ ψηφία ἀριθμοῦ εἶναι 1 καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον, ὁ ἀριθμὸς οὗτος διαιρεῖται δι' 11· π. χ. ὁ 1111.

3) Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 6, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων προστιθέμενον εἰς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν ἄλλων παρέχῃ ἀριθμὸν διαιρετὸν δι' 6.

4) Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 11, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων αὐτοῦ τμημάτων ἐκ δεξιῶν λαμβανομένων διαιρῆται δι' 11.

5) Τὸ γινόμενον τριῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετὸν δι' 6.

η') Διὰ 12.

86. Οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 4 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο ἑπομένως (§ 76)

Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 12=3×4, ἐὰν διαιρῆται καὶ διὰ 3 καὶ διὰ 4.

Π. χ. ὁ 144, ὁ 720.

Ἀσκήσεις.

Καθ' ὅμοιον τρόπον νὰ ζητηθῶσι χαρακτῆρες διαιρετότητος διὰ διαφόρων ἄλλων διαιρετῶν, π. χ. διὰ 15, 18, 36, 45 κτλ.

* Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9.

86. *Θεώρημα α'*. Θεωρήσωμεν τὸ πηλίκον

$$(18+8):5.$$

Ἐὰν ἕκαστον προσθετέον ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ 5, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος πολλαπλάσιον τοῦ 5· ἑπομένως τὸ προκῦπτον ἄθροισμα 3+3 θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον (§ 49), ὅπερ καὶ τὸ δοθὲν ἄθροισμα· ἄρα ***Τὸ ὑπόλοιπον ἀθροίσματος ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἕκαστον προσθετέον ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.***

87. *Θεώρημα β'*. Θεωρήσωμεν τὸ γινόμενον 63×27. Τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 5 τὸ περιεχόμενον εἰς τὸ 63 εἶναι 5×12=60· ἔχομεν δὲ

$$63\times27=(60+3)\times27=60\times27+3\times27$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο ἀφαιρέσωμεν 60×27, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 5 δὲν ἀλλάσσει. Ἑπομένως ὅ,τι ὑπόλοιπον δίδει τὸ 63×27, τὸ αὐτὸ θὰ δώσῃ καὶ τὸ 3×27· καὶ τοῦτο πάλιν διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ δώσῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ τὸ γινόμενον 3×2, ὅπερ εὑρίσκομεν ἀντικαθιστῶντες τὸν 27 διὰ τοῦ ὑπολοίπου αὐτοῦ 2· ἄρα

Τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν ὡς πρὸς οἱονδήποτε διαιρέτην δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν ἑκάτερον τῶν παραγόντων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν διαιρέτην.

88. Κατὰ τὰ προηγούμενα ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύναται νὰ γίνῃ διὰ τοῦ διαιρέτου 9 ὡς ἑξῆς·

Ἔστω ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ

$$\begin{array}{r} 587 \\ 68 \\ \hline 4696 \\ 3522 \\ \hline 39916 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|c} 2 & 5 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$$

Προσθέτομεν τὰ ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ εὑρίσκομεν 20· ἐπειδὴ δὲ $20>9$, προσθέτομεν καὶ τούτου τὰ ψηφία καὶ εὑρίσκομεν 2, ὅπερ δὲν ὑπερβαίνει πλέον τὸν 9· τὸν 2 γράφομεν εἰς μίαν τῶν ἄνω γωνιῶν ἑνὸς σταυροῦ. Πράττομεν τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιαστὴν καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν 5 γράφομεν εἰς τὴν ἑτέραν τῶν ἄνω γωνιῶν. Ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν 2×5 καὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου τούτου 10 πράττομεν τὸ αὐτό, ὁπότε εὑρίσκομεν 1, ὅπερ γράφομεν εἰς μίαν τῶν κάτω γωνιῶν. Πράττομεν τέλος τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τὸ γινόμενον 39916 καί, ἐὰν εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ψηφίον 1, ὅπερ εὑρήκαμεν ἐκ τοῦ 2×5, συνάγομεν ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς.

Ἐὰν ἡ ἐπαλήθευσις αὕτη δὲν ἐπιτύχῃ, ἡ πρᾶξις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δὲν ἐγένετο ὀρθῶς· ἀλλ' ἐὰν ἐπιτύχῃ, δὲν ἕπεται μετὰ βεβαιότητος ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ὀρθῶς· διότι, ἐὰν ἐγένετο λάθος πολλαπλάσιον τοῦ 9, ἡ βάσανος αὕτη δὲν τὸ ἐξελέγχει.

Σημ. Ἀντὶ τοῦ 9 δυνάμεθα καὶ πάντα ἄλλον διαιρέτην νὰ λάβωμεν, προτιμῶμεν ὅμως τὸν 9· διότι α') τὰ ὑπόλοιπα εὑρίσκονται εὐκόλως· β') εἰς τὴν βάσανον λαμβάνουσι μέρος πάντα τὰ ψηφία τῶν παραγόντων καὶ τοῦ γινομένου.

89. Ὁμοία δοκιμὴ δύναται νὰ γίνῃ καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν· διότι ἐκ τῶν θεωρημάτων α′ καὶ β′ ἕπεται, ὅτι, ἐὰν λάβωμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου τῶν ὑπολοίπων διαιρέτου καὶ πηλίκου διά τινος ἀριθμοῦ καὶ εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ὑπολοίπου (ἐὰν ὑπάρχῃ) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, θὰ εὕρωμεν ἀριθμὸν δίδοντα τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, ὅπερ καὶ ὁ διαιρετέος.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς διαιρετότητος καθόλου.

1) Τοῦ ἀριθμοῦ 45627 νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον 7 δι' ἄλλου τοιούτου, ὥστε ὁ ἀριθμὸς νὰ γίνῃ διαιρετὸς δι' 9 ἢ 4 ἢ 25 ἢ 6.

2) Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 7, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, τοῦ 3πλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ 9πλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν ἑκατοντάδων διαιρῆται δι' 7.

3) Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, τοῦ 2πλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ 4πλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων διαιρῆται δι' 8.

4) Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων διαιρούμενον διὰ 3 οὐδέποτε δίδει ὑπόλοιπον 1.

5) Ἐὰν ἐν τῇ ἐκτελέσει τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ πολυψήφιον λησμονήσαντες γράψωμεν δύο μερικὰ γινόμενα οὕτως, ὥστε τὰ τελευταῖα αὐτῶν ψηφία νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ, τὸ προκῦπτον σφάλμα θὰ ἐλέγξῃ ἡ διὰ τοῦ 9 βάσανος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΣΥΝΘΕΤΟΥ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΠΡΩΤΟΥΣ ΑΥΤΟΥ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ

90. Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 120. Θεωροῦμεν τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἀπὸ τοῦ 2 καὶ ἐφεξῆς·

$$2,\ 3,\ 5,\ 7, \ldots\ldots$$

καὶ δοκιμάζομεν αὐτοὺς κατὰ σειράν, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἕνα αὐτῶν διαιροῦντα τὸν 120· παρατηροῦμεν ὅτι 120 διαιρεῖται διὰ 2· διαιροῦμεν καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 60· ἄρα

$$120 = 2 \times 60 \qquad (1)$$

Τὸ πηλίκον 60 διαιρεῖται καὶ αὐτὸ διὰ 2· τὸ διαιροῦμεν καὶ ἔχομεν

$$60 = 2 \times 30\cdot$$

ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) 60 διὰ τοῦ 2×30 καὶ ἔχομεν

$$120 = 2 \times 2 \times 30 \qquad (2)$$

ὁμοίως διαιροῦμεν $30 : 2$ καὶ ἔχομεν $30 = 2 \times 15$· ἄρα

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 15\cdot$$

ὁ 15 δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 2· παρατηροῦμεν, τίς ἐκ τῶν ἑπομένων τῷ 2 πρώτων ἀριθμῶν κατὰ σειρὰν διαιρεῖ τὸν 15 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι τὸν διαιρεῖ ὁ 3· διαιροῦμεν $15 : 3$ καὶ ἔχομεν

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

ἢ συντομώτερον

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

καὶ οὕτως ὁ 120 εὑρίσκεται ἀναλελυμένος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Παρατ. α΄) Ὅταν πρῶτός τις ἀριθμὸς παύσῃ νὰ εἶναι διαιρέτης, δὲν τὸν δοκιμάζομεν πλέον εἰς τὰ ἑπόμενα πηλίκα· π. χ. εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἶναι περιττὸν νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ὁ 2 διαιρεῖ τὸν 5, διότι, ἐὰν τὸν διῄρει, ἔπρεπε νὰ διαιρῇ καὶ τὸ πολλαπλάσιον αὐτοῦ 15, ὅπερ δὲν συμβαίνει.

Παρατ. β΄) Ὅταν εἶναι εὔκολον, ἀναλύομεν προχείρως τὸν δοθέντα ἀριθμὸν εἰς ἄλλους παράγοντας πρώτους ἢ συνθέτους. Εἶτα ἀναλύομεν τοὺς συνθέτους ἐξ αὐτῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ σχηματίζομεν γινόμενον περιέχον πάντας τοὺς εὑρεθέντας πρώτους παράγοντας.

Π.χ. $7000=7\times10\times10\times10$ · εὑρίσκομεν ὅτι $10=2\times5$. Ἄρα

$$7000=7\times5\times2\times5\times2\times5\times2=7\times2^3\times5^3$$

Παρατ. γ΄) Κατὰ τὴν ἀνάλυσιν ταύτην εὑρίσκομεν πολλάκις πηλίκα, τὰ ὁποῖα δὲν γνωρίζομεν, ἂν εἶναι πρῶτοι ἢ σύνθετοι ἀριθμοί· τότε, ἐὰν τὸ πηλίκον εἶναι μικρότερον τοῦ 1000, παρατηροῦμεν, ἂν ὑπάρχει ἢ ὄχι εἰς τὸν πίνακα τῆς σελ. 49· ὑπάρχουσι δὲ καὶ πίνακες πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 10000 ἢ καὶ μεγαλυτέρου ὁρίου. Π. χ. εἰς τὴν ἑπομένην ἀνάλυσιν

$$\begin{array}{r|l} 52300 & 2 \\ 26150 & 2 \\ 13075 & 5 \\ 2615 & 5 \\ 523 & 523 \\ 1 & \end{array}$$

μανθάνομεν ἐκ τοῦ εἰρημένου πίνακος ὅτι ὁ 523 εἶναι πρῶτος. Ἄνευ δὲ πινάκων ἡ δοκιμασία τοῦ 523 γίνεται ὡς ἑξῆς. Ἐξετάζομεν, ἂν ὁ 523 διαιρεῖται διὰ τοῦ ἑπομένου τῷ 5 πρώτου ἀριθμοῦ 7. Ἐπειδὴ δὲν διαιρεῖται, ἐξετάζομεν, ἂν διαιρεῖται διὰ τοῦ ἑπομένου πρώτου 11· ἐξακολουθοῦντες οὕτω βλέπομεν ὅτι δὲν διαιρεῖται οὔτε διὰ τοῦ 29, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ὑπερβαίνει τὸν 523· ἄρα ὁ 523 εἶναι πρῶτος (§ 72).

’Ασκήσεις.

1) Ἔχομεν $A=2^2\times3^3\times5$. Ἐκ τῶν διαιρετῶν τοῦ A τίς εἶναι ὁ μέγιστος, ἐξαιρουμένου τοῦ A;

2) Ὁ ἀριθμὸς 1829 εἶναι πρῶτος ἢ σύνθετος;

3) Νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας οἱ ἀριθμοὶ 1326, 888, 6865, 56000, 840, 1000.

’Εφαρμογαί.

Α′) Πολλαπλασιασμός.

91. Ἔστωσαν $A=2^2\times3$ καὶ $B=2^3\times3\times5^2$· θὰ ἔχωμεν

$A\times B=(2^2\times3)\times(2^3\times3\times5^2)=2^5\times3^2\times5^2$· ἤτοι

Τὸ γινόμενον ἀριθμῶν εἶναι γινόμενον πάντων τῶν πρώτων αὐτῶν παραγόντων λαμβανομένου ἑκάστου μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει ἐν τοῖς ἀριθμοῖς.

Β′) Εὕρεσις δυνάμεως.

92. Ἔστω $A=2^2\times3^3\times5$.

Κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν

$$A^2=2^4\times3^6\times5^2.$$

Ἐὰν δὲ παράγοντα μὴ ἔχοντα ἐκθέτην θεωρήσωμεν ὡς ἔχοντα τοιοῦτον τὴν μονάδα, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι

Τὸ τετράγωνον παντὸς ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν αὐτῶν πρώτων παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἀλλὰ μὲ ἐκθέτας διπλασίους.

Καὶ γενικῶς εὑρίσκομεν ὅτι

Ἡ ν^{η} δύναμις ἀριθμοῦ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν αὐτῶν πρώτων παραγόντων μὲ ἐκθέτας ν φορὰς μεγαλυτέρους.

Σημ. Ἐν γένει γινόμενον οἱωνδήποτε πρώτων ἢ συνθέτων ἀριθμῶν ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν πάντες οἱ ἐκθέται αὐτῶν πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως. Π. χ.

$$(4\times10^2)^2=4^2\times10^4.$$

Γ΄) *Χαρακτῆρες τελείας δυνάμεως.*

93. Ἔστω $Α = 2^4 \times 3^6$.

Διαιροῦντες τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων διὰ 2 ἔχομεν $2^2 \times 3^3$, ὅπερ παριστῶντες δι' α εὑρίσκομεν κατὰ τὰ προηγούμενα

$$α^2 = (2^2 \times 3^3)^2 = 2^4 \times 3^6 = Α.$$

Ἔστω ἤδη $Β = 2^5 \times 3^6$· ἂς ὑποθέσωμεν προσέτι, ὅτι ὁ Β εἶναι τετράγωνον τοῦ ἀκεραίου β, ἤτοι $Β = β^2$. Ἀναλύομεν τὸν β εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ ἔστω $β = γ^ν \times δ^τ$, ὁπότε ἔχομεν

$$β^2 = γ^{2ν} \times δ^{2τ} \cdot \quad ἄρα$$
$$2^5 \times 3^6 = γ^{2ν} \times δ^{2τ}$$

ἀλλ' ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης εἶναι ἄτοπος (§ 70)· ἄρα

Ἀριθμὸς εἶναι τετράγωνον ἄλλου, ὅταν πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ εἶναι ἄρτιοι καὶ τότε μόνον.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἐν γένει·

Ἀριθμὸς εἶναι $ν^{η}$ δύναμις ἄλλου, ὅταν πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἶναι πολλαπλάσια τοῦ ν καὶ τότε μόνον.

Ἀσκήσεις.

1) Ἔστωσαν $Α = 2^2 \times 3$ καὶ $Β = 2^4 \times 3 \times 7$. Νὰ παρασταθῇ τὸ γινόμενον $Α \times Β$ ἀναλελυμένον εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας.

2) Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα νὰ παρασταθῶσιν αἱ δυνάμεις $Α^2$, $Α^{ν}$, $Β^3$, $Β^4$ ἀναλελυμέναι εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας.

3) Τίνες ἐκ τῶν ἀριθμῶν 5822, 563, 867, 1681 εἶναι τετράγωνα ἄλλων;

4) Τὸ διπλάσιον τοῦ τετραγώνου οἱουδήποτε ἀριθμοῦ οὐδενὸς ἀριθμοῦ εἶναι τετράγωνον· π. χ. τὸ 49×2.

5) Τίνος ἀριθμοῦ εἶναι κύβος τὸ γινόμενον

$$5^6 \times 3^3 \times 7^9;$$

Δ') Γενικὸς χαρακτὴρ διαιρετότητος.

94. Ἔστω $A=2^5\times3^7\times5^4$ καὶ $B=2^2\times3^7$. Ὡς βλέπομεν ὁ Α περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ Β μὲ ἐκθέτην ὄχι μικρότερον, ὁπότε χωρίζοντες ἀπὸ τοῦ Α τοὺς παράγοντας τοῦ Β ἔχομεν

$$A=(2^3\times5^4)\times(2^2\times3^7)=B\times(2^3\times5^4)\cdot$$

ἤτοι ὁ Α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Β καὶ διαιρεῖται ἑπομένως δι' αὐτοῦ.

Ἤδη ἂς ὑποτεθῇ $B=2^3\times3^8\times7$.

Κατὰ τὸ τῆς § 70 θεώρημα οὐδὲν πολλαπλάσιον τοῦ Β δύναται νὰ εἶναι ἴσον τῷ Α· ἄρα

Ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἄλλου, ἐὰν περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας μὲ ἐκθέτην ἴσον ἢ μεγαλύτερον καὶ τότε μόνον.

Ἀσκήσεις.

1) Πότε ἀριθμός τις διαιρεῖται δι' 66;

2) Χωρὶς νὰ γίνῃ ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως νὰ εὑρεθῇ, τίνες ἐκ τῶν ἑπομένων διαιρέσεων ἐκτελοῦνται τελείως· 5867 : 38, 3300 : 132, 8672 : 224.

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

Ὁρισμός.

95. *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ πλειόνων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος τῶν κοινῶν διαιρετῶν, παριστάνεται δὲ συντόμως διὰ τοῦ συμβόλου μ. κ. δ.*

Π. χ. ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 4, 8, 16, 20 εἶναι ὁ 4.

Ὁ μ. κ. δ. ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἶναι 1.

Εὕρεσις τοῦ μ. κ. δ.

96. *Θεώρημα α'.* Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 4, 8, 16, 20, ὧν ὁ ἐλάχιστος 4 διαιρεῖ πάντας τοὺς λοιπούς· οὗτος ὡς διαιρῶν καὶ ἑαυτὸν εἶναι κ. δ. πάντων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, εἶναι δὲ

καὶ μ. κ. δ., διότι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 4 δὲν διαιρεῖ τὸν 4. Ἄρα

Ὁ μ. κ δ. ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἐξ αὐτῶν, ἐὰν οὗτος διαιρῇ πάντας τοὺς λοιπούς.

97. *Θεώρημα β'*. Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς

$$8, \quad 12, \quad 5, \quad 10 \qquad (1)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸν 12 διὰ τῆς διαφορᾶς 12—5 ἔχομεν τὴν σειρὰν

$$8, \quad 7, \quad 5, \quad 10 \qquad (2)$$

Πᾶς κ. δ. τῶν ἀριθμῶν (1) ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 5 θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν 12—5 (§ 61)· ἑπομένως θὰ εἶναι κ. δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν (2). Καὶ πᾶς κ. δ. τῶν ἀριθμῶν (2) ὡς διαιρῶν τοὺς ἀριθμοὺς 7 καὶ 5 διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα 7+5 (§ 60) καὶ θὰ εἶναι κ. δ. καὶ τῶν ἀριθμῶν (1). Ὥστε αἱ δύο σειραὶ ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κ.δ., ἄρα καὶ τὸν αὐτὸν μ. κ. δ. Ἤτοι

Ὁ μ. κ. δ. δεδομένων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν ἀπό τινος αὐτῶν ἀφαιρεθῇ ἕτερος.

Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ ὑπόλοιπον διαιρέσεως δύναται νὰ εὑρεθῇ δι' ἀλλεπαλλήλων τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσεων, συνάγομεν·

Ὁ μ. κ. δ. δεδομένων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ὅταν εἷς αὐτῶν ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ δι' ἄλλου μικροτέρου.

Π. χ. αἱ σειραὶ

$$\begin{array}{ccc} 12, & 5, & 8 \quad \text{καὶ} \\ 2, & 5, & 8 \end{array}$$

ἔχουσι τὸν αὐτὸν μ. κ. δ.

98. Ἐπὶ τῶν προτάσεων τούτων στηριζόμενοι δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. Διακρίνομεν δὲ δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον οἱ δεδομένοι ἀριθμοὶ εἶναι δύο ἢ πλείονες.

α') Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 65 καὶ 5· ἐπειδὴ ὁ 5 διαιρεῖ τὸν 65, κατὰ τὸ α' θεώρημα αὐτὸς εἶναι ὁ μ. κ. δ.

Ἔστωσαν ἤδη οἱ ἀριθμοὶ 65 καὶ 25, ὧν ὁ μικρότερος δὲν διαιρεῖ τὸν μεγαλύτερον. Κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ β' θεωρήματος ὁ μ. κ. δ. δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν τὸν 65 ἀντικαταστήσωμεν διὰ τοῦ ὑπολοίπου 15 τῆς διαιρέσεως 65 : 25· ἤτοι ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 25. Τούτων δὲ πάλιν ὁ μ. κ. δ. εἶναι ὁ αὐτὸς μὲ τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν 15 καὶ 10, ἔνθα 10 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 25 : 15. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον οἱ ἀριθμοὶ 15 καὶ 10 θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν μ. κ. δ., ὃν καὶ οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ 10, ἤτοι τὸν 5.

Ἡ πρᾶξις συντόμως διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

2	1	1	2	
65	25	15	10	5
15	10	5	0	

Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. δύο ἀριθμῶν διαιροῦμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου· ἐὰν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μ. κ. δ.· ἄλλως διαιροῦμεν τὸν μικρότερον διὰ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω διαιροῦντες ἕκαστον διαιρέτην διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸν ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ὁ τελευταῖος διαιρέτης εἶναι ὁ μ. κ. δ.

Παρατ. Ἐν τῇ διατάξει τῆς πράξεως οἱ ἀριθμοὶ τῆς γ' σειρᾶς πλὴν τοῦ α' εἶναι ὑπόλοιπα διαιρέσεων μὲ διαιρέτην τὸν προηγούμενον αὐτῶν ἀριθμόν· ἄρα βαίνουσιν ἐλαττούμενοι καὶ ἀναγκαίως θὰ φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.

β') Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 5, 15, 25· ἐπειδὴ ὁ μικρότερος αὐτῶν 5 διαιρεῖ πάντας τοὺς λοιπούς, αὐτὸς εἶναι ὁ μ. κ. δ.

Ἔστωσαν ἤδη οἱ ἀριθμοὶ

12, 66, 28,

ὧν ὁ μικρότερος 12 δὲν διαιρεῖ πάντας τοὺς λοιπούς. Ὁ μ. κ. δ. δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν διαιρέσωμεν διὰ τοῦ 12 πάντας τοὺς λοιποὺς ἀντικαθιστῶντες ἅμα αὐτοὺς διὰ τῶν ὑπολοίπων των· οὕτως εὑρίσκομεν τὴν σειρὰν

12, 6, 4·

ἐκ ταύτης κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν τὴν σειρὰν

0, 2, 4 ἢ

2, 4,

τῆς ὁποίας οἱ ἀριθμοὶ ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν 2, ὅστις ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ ὁ μ. κ. δ. τῶν δοθέντων.

Ἐντεῦθεν συνάγομεν·

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ. πολλῶν ἀριθμῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ μικροτέρου αὐτῶν πάντας τοὺς λοιπούς· ἐὰν πασῶν τῶν διαιρέσεων τούτων τὰ ὑπόλοιπα εἶναι 0, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μ.κ.δ.· ἄλλως ἀντικαθιστῶμεν τοὺς διαιρεθέντας ἀριθμοὺς διὰ τῶν ὑπολοίπων αὐτῶν καὶ σχηματίζομεν νέαν σειράν, εἰς τὴν ὁποίαν πράττομεν τὸ αὐτό, μέχρις οὗ εὕρωμεν σειρὰν ἀριθμῶν, ὧν ὁ μικρότερος νὰ διαιρῇ πάντας τοὺς λοιπούς, ὁπότε οὗτος θὰ εἶναι ὁ ζητούμενος μ. κ. δ..

Ἡ ἀνάλυσις ἀριθμοῦ εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας παρέχει ἑτέραν μέθοδον πρὸς εὕρεσιν τοῦ μ. κ. δ.

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοί:

48, 276, 84·

ἀναλύοντες αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας ἔχομεν

$$48=2^4\times 3$$
$$276=2^2\times 3\times 23$$
$$84=2^2\times 3\times 7$$

Λαμβάνομεν τοὺς κοινοὺς αὐτῶν πρώτους παράγοντας 2 καὶ 3 μὲ τοὺς μικροτέρους ἐκθέτας των καὶ σχηματίζομεν τὸ γινόμενον $2^2 \times 3 = 12$. Ὁ 12 εἶναι κ. δ. τῶν δοθέντων (§ 94), μεγαλύτερος δὲ τούτου κ.δ. δὲν ὑπάρχει, διότι πᾶς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 12 ἢ θὰ περιέχῃ πρώτους παράγοντας διαφόρους τῶν 2 καὶ 3 ἢ θὰ περιέχῃ τὸν ἕνα τούτων ἢ καὶ τοὺς δύο μὲ ἐκθέτας μεγαλυτέρους ἢ ἀμφότερα θὰ συμβαίνωσιν, ὁπότε οὗτος δὲν θὰ εἶναι κ.δ. Ἄρα

Ὁ μ. κ. δ. ἀριθμῶν δεδομένων εὑρίσκεται, ἐὰν ἀναλύσωμεν αὐτοὺς εἰς πρώτους παράγοντας καὶ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν κοινῶν αὐτοῖς παραγόντων λαμβανομένου ἑκάστου μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην.

Πόρισμα. Πᾶς κ. δ. δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι διαιρέτης τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν.

Ἁπλοποίησις ἐν τῇ εὑρέσει τοῦ μ. κ. δ.

99. *Θεώρημα α΄.* Ἔστωσαν

$$A = 2^2 \times 3 \times 7$$
$$B = 2 \times 3^2 \times 11$$

Ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν Α καὶ Β εἶναι $2 \times 3 = 6$. Πολλαπλασιάζομεν ἤδη τοὺς ἀριθμοὺς Α καὶ Β ἐπὶ Γ, ἔστω δὲ $\Gamma = 2 \times 5^2$, καὶ ἔχομεν

$$A \times \Gamma = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$$
$$B \times \Gamma = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$$

ὁπότε ὁ μ. κ. δ. γίνεται $2^2 \times 3 \times 5^2 = (2 \times 3) \times (2 \times 5^2) = 6 \times \Gamma$. Ἄρα

Ἐὰν ἀριθμοί τινες πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

100. *Θεώρημα β΄.* Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι

Ἐὰν ἀριθμοί τινες διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

101. Ἐκ τῶν προηγουμένων δύο προτάσεων συνάγομεν τὰ ἑξῆς·

Πόρισμα α΄) Ἐὰν ἀριθμοί τινες διαιρεθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν, τὰ πηλίκα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα.

Πόρισμα β΄) Ἐὰν διαιρέσαντες ἀριθμοὺς διά τινος κ. δ. αὐτῶν εὕρωμεν πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ ἀριθμός, δι' οὗ διῃρέθησαν, εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν.

Σημ. Εἰς τὰ δύο προηγούμενα πορίσματα συμβαίνει τὸ ἑξῆς· Εἰς τὸ α΄ ὑποτίθεται ὅτι οἱ ἀριθμοὶ διαιροῦνται διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν καὶ συμπεραίνεται ὅτι τὰ πηλίκα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα, εἰς τὸ β΄ ὑποτίθεται ὅτι τὰ πηλίκα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα καὶ συμπεραίνεται ὅτι ὁ ἀριθμός, δι' οὗ διῃρέθησαν οἱ δοθέντες ἀριθμοί, εἶναι ὁ μ. κ. δ. αὐτῶν. Δύο τοιαῦται προτάσεις, ὥστε ἡ ὑπόθεσις τῆς μιᾶς νὰ εἶναι συμπέρασμα τῆς ἄλλης καὶ τἀνάπαλιν, λέγονται **ἀντίστροφοι.**

102. Ἐπὶ τῶν προτάσεων 99 καὶ 100 στηριζόμενοι δυνάμεθα πολλάκις νὰ συντομεύσωμεν τὴν ἀναζήτησιν τοῦ μ. κ. δ. Ζητοῦμεν π. χ. τὸν μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

24000, 8000, 5000.

Διαιροῦμεν αὐτοὺς διὰ 1000 καὶ εὑρίσκομεν

24, 8, 5,

τῶν ὁποίων μ. κ. δ. εἶναι 1· ἄρα μ. κ. δ. τῶν δοθέντων εἶναι $1 \times 1000 = 1000$.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι πάντες οἱ κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

52, 64, 12

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν ἀριθμῶν

1040, 1280, 240

3) Ἐκ τῶν νομισμάτων τῆς μιᾶς, τῶν δύο, τῶν πέντε, τῶν δέκα καὶ τῶν εἰκοσιπέντε δραχμῶν ποῖα εἶναι ἐκεῖνα, ἐξ ἑκάστου

τῶν ὁποίων πολλάκις ἐπαναλαμβανομένου ἀποτελεῖται ἕκαστον τῶν ἑξῆς ποσῶν: 210 δρ., 250 δρ., 300 δρ.

4) Ὁ μ. κ. δ. ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, ἐάν τινες αὐτῶν ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν.

5) Πῶς διὰ τῆς προηγουμένης προτάσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν μ. κ. δ. ;

6) Τρία τεμάχια ὑφάσματος ἔχουσι μῆκος τὸ α΄ 200 μέτρ., τὸ β΄ 320 καὶ τὸ γ΄ 420. Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος ἀριθμὸς τῶν προσώπων, εἰς τὰ ὁποῖα καὶ τὰ τρία ταῦτα τεμάχια μοιράζονται ἀκριβῶς, ἤτοι ἕκαστον πρόσωπον λαμβάνει ἴσον ἀριθμὸν ἀκεραίων μέτρων ἐξ ἑκάστου τεμαχίου ἄνευ ὑπολοίπου ;

ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ

Ὁρισμοί.

103. Εἰς τὸν λιμένα μιᾶς πόλεως καταπλέουσι ταυτοχρόνως 3 ἀτμόπλοια Α, Β καὶ Γ, ἐξ ὧν τὸ μὲν Α ἐπανέρχεται εἰς τὸν αὐτὸν λιμένα ἀνὰ 5 ἡμέρας, τὸ Β ἀνὰ 2 καὶ τὸ Γ ἀνὰ 3 ἡμέρας. Μετὰ πόσας ἡμέρας τὰ ἀτμόπλοια ταῦτα θὰ καταπλεύσωσι ταυτοχρόνως πάλιν εἰς τὸν αὐτὸν λιμένα;

Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἡμερῶν πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τῶν τριῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5· τοιαῦτα δὲ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 30, 60, 90, 120 κ.τ.λ., ὧν ἕκαστος λέγεται **κοινὸν πολλαπλάσιον** τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5. Γενικῶς

***Κοινὸν πολλαπλάσιον** ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις διαιρεῖται δι' ἑκάστου τούτων.*

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $2\times3\times5$ καὶ πᾶν αὐτοῦ πολλαπλάσιον εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, ἕπεται·

Τὰ κοινὰ πολλαπλάσια ἀριθμῶν τινων εἶναι *ἄπειρα* τὸ πλῆθος καὶ *οὐδὲν* αὐτῶν εἶναι μέγιστον. Ἐπειδὴ δὲ οὐδὲν κοινὸν πολλαπλάσιον δύναται νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ μεγίστου τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἕπεται ὅτι ὑπάρχει ἓν ἐξ αὐτῶν, τὸ μικρότερον πάντων, ὅπερ καλεῖται ***ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον***.

Τῶν ἀριθμῶν π. χ. 2, 3, 5 ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι ὁ 30.

104. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἐζητεῖτο μετὰ πόσας ἡμέρας τὸ ὀλιγώτερον θὰ γίνῃ ταυτοχρόνως ὁ κατάπλους τῶν ἀτμοπλοίων, ἡ λύσις θὰ ἦτο «*μετὰ 30 ἡμέρας*».

Ἐν τοῖς ἑπομένοις θὰ παριστῶμεν πρὸς συντομίαν τὸ μὲν κοινὸν πολλαπλάσιον διὰ τοῦ κ. π., τὸ δὲ ἐλάχιστον διὰ τοῦ ἐ. κ. π.

Εὕρεσις τοῦ ἐ. κ. π.

105. *Θεώρημα α΄*. Θεωρήσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 5, 10, 20, ὧν ὁ μεγαλύτερος 20 διαιρεῖται διὰ τῶν λοιπῶν· οὗτος εἶναι κ. π. αὐτῶν, εἶναι δὲ καὶ τὸ ἐ. κ. π., διότι ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ 20 δὲν δύναται νὰ εἶναι πολλαπλάσιον αὐτοῦ. Ἄρα

Τὸ ἐ. κ. π. ἀριθμῶν, ὧν ὁ μεγαλύτερος διαιρεῖται διὰ τῶν λοιπῶν, εἶναι αὐτὸς ὁ μεγαλύτερος.

106. *Θεώρημα β΄*. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 10, ὧν ὁ μεγαλύτερος 10 δὲν διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν. Τὸ μικρότερον πολλαπλάσιον τοῦ 10 τὸ διαιρούμενον δι' ὅλων εἶναι $10 \times 3 = 30$· ἐπειδὴ δὲ μικρότερος ἀριθμὸς τοῦ 30 δὲν ὑπάρχει, ὅστις νὰ διαιρῆται καὶ διὰ 10 καὶ διὰ τῶν λοιπῶν, ἕπεται ὅτι ὁ 30 εἶναι τὸ ἐ. κ. π. Ἄρα

Ἐὰν ἔχωμεν ἀριθμούς, ὧν ὁ μεγαλύτερος δὲν διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν, τότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐ. κ. π. αὐτῶν διπλασιάζομεν τὸν μεγαλύτερον καὶ παρατηροῦμεν ἂν τὸ διπλάσιον αὐτοῦ διαιρεῖται διὰ πάντων τῶν λοιπῶν, ὁπότε τοῦτο εἶναι τὸ ἐ. κ. π.· ἄλλως τριπλασιάζομεν, τετραπλασιάζομεν κ.τ.λ. τὸν μεγαλύτερον, τὸ δὲ α΄ πολλαπλάσιον αὐτοῦ, ὅπερ θὰ εὕρωμεν διαιρούμενον διὰ πάντων τῶν λοιπῶν, εἶναι τὸ ζητούμενον ἐ. κ. π.

Σημ. Ἡ μέθοδος αὕτη ἄγει ἐνίοτε πολὺ μακρὰν καθισταμένη ἐπίπονος· τότε μεταχειριζόμεθα ἄλλας μεθόδους· μίαν τοιαύτην παρέχει τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

107. *Θεώρημα γ'*. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ

48, 276, 84

Ἀναλύομεν αὐτοὺς εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας καὶ ἔχομεν

$$48=2^4\times3$$
$$276=2^2\times3\times23$$
$$84=2^2\times3\times7$$

Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρώτων αὐτῶν παραγόντων, κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν, λαμβανομένου ἑκάστου μὲ τὸν μεγαλύτερον αὐτοῦ ἐκθέτην, καὶ ἔχομεν

$$2^4\times3\times7\times23=7728$$

Κατὰ τὸν γενικὸν χαρακτῆρα διαιρετότητος (§ 94) ὁ 7728 εἶναι κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, οὐδεὶς δὲ τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων δύναται νὰ λείψῃ ἀπὸ οἱονδήποτε κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν οὔτε νὰ ἔχῃ μικρότερον ἐκθέτην· ἐὰν π. χ. ἀριθμός τις δὲν περιέχῃ τὸν παράγοντα 7, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 84· ἐὰν δὲ περιέχῃ τὸν 2 μὲ ἐκθέτην 3, δὲν θὰ διαιρῆται διὰ τοῦ 48. Ἑπομένως πᾶν κ. π. θὰ περιέχῃ τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ 7728 ἢ μόνους ἢ μετ' ἄλλων, ἄρα, ὅταν **μόνον** αὐτοὺς περιέχῃ, εἶναι τὸ ἐ. κ. π.· ὅθεν ἕπεται

Τὸ ἐ. κ. π. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εἶναι γινόμενον πάντων τῶν πρώτων αὐτῶν παραγόντων, κοινῶν καὶ μὴ κοινῶν, λαμβανομένου ἑκάστου μὲ τὸν μέγιστόν του ἐκθέτην.

Πόρισμα α'. Πᾶν κ.π. ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἐ.κ.π. αὐτῶν.

Πόρισμα β'. Τὸ ἐ. κ. π. ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ***ἀνὰ δύο*** εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Διότι δὲν ὑπάρχει πρῶτος παράγων κοινὸς οὔτε δύο ἐξ αὐτῶν. Ἑπομένως πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐ. κ. π. πρέπει νὰ λάβωμεν κατὰ σειρὰν πάντας τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, ὁπότε προφανῶς θὰ ἔχωμεν τὸ γινόμενον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· π. χ. τὸ ἐ. κ. π. τῶν ἀριθμῶν

$$35=5\times7$$
$$8=2^3$$
$$9=3^2$$

εἶναι $5\times7\times2^3\times3^2=35\times8\times9=2520$.

Σχέσις μεταξὺ μ. κ. δ. καὶ ἐ. κ. π. δύο ἀριθμῶν.

Ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εὑρίσκεται ὁ μ. κ. δ. καὶ τὸ ἐ. κ. π. αὐτῶν, ἕπεται·

Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν ἐπὶ τὸ ἐ. κ. π.

Οὕτως, ἐὰν ἔχωμεν τοὺς ἀριθμοὺς Α καὶ Β καὶ παραστήσωμεν διὰ Μ τὸν μ.κ.δ. καὶ διὰ Π τὸ ἐ.κ.π., θὰ ἔχωμεν $A\times B=M\times \Pi$:

Διότι ἔστω

$$A=2^2\times3\times5$$
$$B=2\times3^2\times7\cdot \text{ τότε}$$
$$M=2\times3 \text{ καὶ}$$
$$\Pi=2^2\times3^2\times5\times7$$

ἤτοι ὁ Π περιλαμβάνει πάντας τοὺς παράγοντας πλὴν μόνον ἐκείνων, οὓς περιλαμβάνει ὁ Μ.

Ἀσκήσεις.

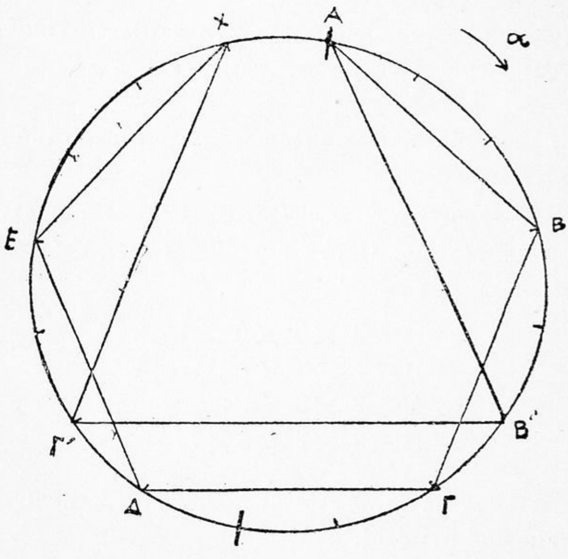
1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐ. κ.. π. ἑκάστης τῶν σειρῶν

α′	9,	40		
β′	3,	5,	10	
γ′	16,	22,	60,	100

2) Δύο ὡρολόγια ἄρχονται τὴν αὐτὴν στιγμὴν ἠχοῦντα τὴν ὥραν. Μεταξὺ δύο ἤχων τοῦ α' ὡρολογίου παρέρχονται 3'', μεταξὺ δὲ δύο ἤχων τοῦ β' 4''. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως θὰ συμπέσωσι πάλιν οἱ ἦχοι αὐτῶν;

3) Περιφέρεια κύκλου εἶναι διῃρημένη εἰς 16 ἴσα μέρη. Ἀπὸ τοῦ σημείου Α καὶ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους α ἀναχωροῦσι δύο ἐγγεγραμμέναι τεθλασμέναι γραμμαὶ

ΑΒΓΔΕ....Χ...... καὶ ΑΒ'Γ'......



Ἑκάστη πλευρὰ τῆς πρώτης ὑποτείνει 3 διαιρέσεις τῆς περιφερείας, ἑκάστη δὲ πλευρὰ τῆς δευτέρας 5. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς περιφερείας θὰ γίνῃ ἡ πρώτη συνάντησις τῶν κορυφῶν αὐτῶν καὶ διατί;

4) Τρία ἀτμόπλοια ταχυδρομικὰ φθάνουσι συγχρόνως εἰς Πειραιᾶ τῇ 12ῃ Ἰουνίου 1908. Τούτων τὸ α' φθάνει εἰς Πειραιᾶ κατὰ πᾶσαν 6ην ἡμέραν, τὸ β' κατὰ πᾶσαν 8ην καὶ τὸ γ' κατὰ

πᾶσαν 10ην. Τίς ἡ ἡμερομηνία τῆς νέας ταυτοχρόνου ἀφίξεώς των;

5) Τρεῖς δρομεῖς πρόκειται νὰ τρέξωσι διαγράφοντες ἕκαστος διάφορον περιφέρειαν κύκλου· τούτων ὁ α′ διατρέχει τὴν περιφέρειάν του εἰς 35 δευτερόλεπτα, ὁ β′ εἰς 50 καὶ ὁ γ′ εἰς 80. Ἕτοιμοι δὲ νὰ τρέξωσι κατέχουσι σημεῖόν τι ἕκαστος ἐπὶ τῆς περιφερείας του. Μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς κινήσεως καὶ τῶν τριῶν θὰ κατέχωσι καὶ οἱ τρεῖς τὸ σημεῖον, ὅθεν ἐξεκίνησαν;

6) Ἐὰν $A = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^4$, τότε ὁ A εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν ἀριθμῶν 2^2, 3^3, 5 καὶ 7^4.

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμοί.—Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία.

108. *Ἐὰν τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον παριστᾷ ἡ ἀκεραία μονάς, θεωρήσωμεν διῃρημένον εἰς ἴσα μέρη, ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν ἓν τῶν μερῶν τούτων λέγεται μονὰς κλασματική.*

Ἰδιαιτέρως δέ, ἐὰν τὸ ποσὸν τοῦτο διαιρέσωμεν εἰς 2 ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν μερῶν τούτων λέγεται *ἓν δεύτερον*· ἐὰν εἰς 3, *ἓν τρίτον* κ.τ.λ.

Ὁ ἀριθμὸς ὁ προκύπτων διὰ τῆς ἐπαναλήψεως κλασματικῆς μονάδος λέγεται ἀριθμὸς κλασματικὸς ἢ κλάσμα· π. χ. τρία τέταρτα, πέντε ὄγδοα κ.τ.λ.

Καὶ αὐταὶ αἱ κλασματικαὶ μονάδες λέγονται *κλασματικοὶ ἀριθμοὶ* ἢ *κλάσματα.*

Πᾶν κλάσμα γράφεται διὰ δύο ἀκεραίων, οἵτινες γράφονται ὁ εἷς ὑπὸ τὸν ἄλλον χωριζόμενοι δι' ὁριζοντίας γραμμῆς· ὁ κάτωθεν τῆς γραμμῆς δηλοῖ ἀπὸ ποίαν κλασματικὴν μονάδα γίνεται τὸ κλάσμα ἢ εἰς πόσα ἴσα μέρη διῃρέθη ἡ μονὰς καὶ λέγεται **παρονομαστής**, ὁ δὲ ἄλλος δηλοῖ πόσα τοιαῦτα μέρη ἐλάβομεν καὶ λέγεται **ἀριθμητής**· π.χ. τὸ κλάσμα πέντε ἕβδομα γράφεται $\frac{5}{7}$.

Αἱ κλασματικαὶ μονάδες κατὰ σειρὰν γράφονται ὡς ἑξῆς

$$\frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ldots\ldots\ldots$$

Ἀπαγγέλλομεν δὲ τὸ κλάσμα ἀπαγγέλλοντες τὸν μὲν ἀριθμητὴν ὡς ἀπόλυτον ἀριθμητικόν, τὸν δὲ παρονομαστὴν ὡς τακτικόν· π. χ. $\frac{5}{8}$ ἀπαγγέλλεται ***πέντε ὄγδοα.***

Ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς ὁμοῦ λέγονται *ὅροι* τοῦ κλάσματος.

Μικτὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐξ ἀκεραίου καὶ κλάσματος· π. χ. $5+\frac{3}{4}$, ...

109. *Παρατήρησις.* Εἶναι φανερὸν ὅτι κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι ἴσοι, ἰσοῦται τῇ ἀκεραίᾳ μονάδι· π. χ. $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{5}$, ...

Ὁμοίως ὅτι κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ· π. χ. $\frac{5}{8}<1$, $\frac{9}{5}>1$.

Τροπὴ ἀκεραίου εἰς κλάσμα.

110. Ἔστω ὁ ἀκέραιος 3. Ἑκάστη ἀκεραία μονὰς περιέχει 5άκις τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτῆς· ἐπομένως αἱ 3 ἀκέραιαι μονάδες θὰ τὸ περιέχωσι 5×3 ἢ 15 φοράς· ἄρα $3=\frac{15}{5}$.

Ὁμοίως $6=\frac{30}{5}$ κ.τ.λ.

Ἐν γένει

Διὰ νὰ τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς κλάσμα ἔχον δοθέντα παρονομαστήν, πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀκέραιον ἐπὶ τὸν δοθέντα παρονομαστὴν καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον θέτομεν παρονομαστὴν τὸν δοθέντα.

Τροπὴ μικτοῦ εἰς κλάσμα.

111. Ἔστω ὁ $5\frac{3}{4}$· κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν $5=\frac{20}{4}$· ἄρα

$$5\frac{3}{4}=\frac{20+3}{4}=\frac{23}{4}.$$ Ὅθεν ἕπεται·

Μικτὸς τρέπεται εἰς κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀκέραιον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος καὶ εἰς τὸ γι-

νόμενον προσθέσωμεν τὸν ἀριθμητήν· εἶτα δὲ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα τοῦτο γράψωμεν ὡς παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος.

Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματος.

112. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{27}{5}$. Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{5}{5}=1$· ἄρα ὅσας φορὰς τὰ $\frac{5}{5}$ χωροῦσιν εἰς τὰ $\frac{27}{5}$, ἤτοι ὅσας φορὰς τὸ 5 χωρεῖ εἰς τὸ 27, τόσας ἀκεραίας μονάδας περιέχει τὸ $\frac{27}{5}$. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 5 χωρεῖ 5άκις εἰς τὸ 27 καὶ περισσεύουσι 2 μονάδες, ἕπεται ὅτι $\frac{27}{5}=5+\frac{2}{5}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\frac{127}{5}=25+\frac{2}{5}$, $\frac{25}{5}=5$.

Ἡ τοιαύτη ἐργασία λέγεται *ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων τοῦ κλάσματος*. Ἄρα

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὰς ἀκεραίας μονάδας κλάσματος περιέχοντος τοιαύτας, διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, ὁπότε τὸ πηλίκον παριστᾷ τὰς ἀκεραίας ταύτας μονάδας. Καί, ἐὰν μὲν ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία, τὸ δοθὲν κλάσμα τρέπεται εἰς ἀκέραιον, ἐὰν δὲ ἀτελής, εἰς μικτὸν ἀποτελούμενον ἐκ τοῦ πηλίκου καὶ ἐκ κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Συμπλήρωσις τοῦ πηλίκου.

113. Ἐὰν εἰς 5 ἀνθρώπους μοιράσωμεν 1 δραχ., θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{1}{5}$ δρ.· ἐὰν μοιράσωμεν 2 δρ., θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{2}{5}$ δρ.· ἐὰν ἑπομένως μοιράσωμεν 27 δρ., θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{27}{5}$ δρ.· ἄρα $27:5=\frac{27}{5}$.

Ἐν γένει

Πᾶν κλάσμα παριστᾷ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

Κατὰ τὰ προηγούμενα δὲ ἔχομεν

$$\frac{27}{5}=5+\frac{2}{5}$$

ἤτοι, ὅταν ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελής, εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον **πλῆρες**, ἐὰν εἰς τὸ εὑρεθὲν ἀκέραιον πηλίκον προσθέσωμεν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ ὑπόλοιπον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Ἑπομένως μετὰ τὴν γνῶσιν τῶν κλασμάτων δὲν ὑπάρχουσι **πλέον** ἐν τοῖς ἀκεραίοις ἀτελεῖς διαιρέσεις.

Πόρισμα. Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητήν του.

Σημ. $\frac{8}{1}=8$, $\frac{3}{1}=3$, ἤτοι πᾶς ἀκέραιος δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν μὲν τὴν ἀκεραίαν μονάδα, ἀριθμητὴν δὲ αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν.

Ἀσκήσεις.

1) Ποσάκις τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$ εἶναι μικρότερον τοῦ 3;

2) Ποσάκις τὸ $\frac{1}{8}$ περιέχεται εἰς τὸ 5;

8) Εἰς 7 ἀνθρώπους διενεμήθη χρηματικὸν ποσὸν καὶ ἔλαβεν ἕκαστος δρ. $3\frac{2}{7}$· πόσαι ἦσαν αἱ διανεμηθεῖσαι δραχμαί;

4) 8 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 67 δραχ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

5) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 15 δρ.· πόσους πήχεις δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 228 δρ.;

6) Τὸ ὁλικὸν ὕψος οἰκίας μετὰ τῶν θεμελίων εἶναι 22 μέτρ., μόνον δὲ τῶν θεμελίων 3 μ. Τί μέρος τοῦ ὅλου ὕψους εἶναι τὸ ὑπὲρ τὸ ἔδαφος;

7) Νὰ ταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα

$$\frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{7},\ \frac{8}{9}$$

8) Ἔχων τις 5500 δρ. ἐδαπάνησε τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτῶν· πόσαι τῷ ἔμειναν;

Θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

114. α' Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{5}{8}$· πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν 5 ἐπὶ 4 καὶ ἔχομεν τὸ κλάσμα $\frac{20}{8}$, τὸ ὁποῖον προφανῶς εἶναι 4άκις μεῖζον τοῦ $\frac{5}{8}$· ἀντιστρόφως τὸ $\frac{5}{8}$ εἶναι 4άκις ἔλασσον τοῦ $\frac{20}{8}$, ἐκ τοῦ ὁποίου προκύπτει διὰ διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 20 διὰ 4. Ἄρα

Ἐὰν ἀριθμητὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διά τινος ἀκεραίου, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀκεραίου.

Σημ. Ἐν γένει τὸ κλάσμα αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ αὐξηθῇ ἢ ἐλαττωθῇ.

β' Ἐὰν εἰς 5 ἀνθρώπους μοιράσωμεν 3 δρ., ἕκαστος θὰ λάβῃ (§ 113) $\frac{3}{5}$ δρ. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν τὸ αὐτὸ ποσὸν μοιράσωμεν εἰς διπλασίους ἀνθρώπους, τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ γίνῃ δὶς μικρότερον, ἀλλ᾽ ὡς γνωρίζομεν τὸ μερίδιον τότε εἶναι $\frac{3}{10}$, ἄρα τὸ κλάσμα $\frac{3}{10}$ εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{3}{5}$ καὶ ἑπομένως τὸ $\frac{3}{5}$ διπλάσιον τοῦ $\frac{3}{10}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{3}{15}$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ $\frac{3}{5}$. Ἄρα

Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολλαπλασιάσθῇ ἢ διαιρεθῇ διά τινος ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Σημ. Ἐν γένει τὸ κλάσμα αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἐλαττῶται ἢ αὐξάνηται.

γ'. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{2}{5}$· πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ 3 καὶ ἔχομεν $\frac{6}{15}$. Κατὰ τὴν α' ἰδιότητα τὸ $\frac{6}{15}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{2}{15}$· κατὰ δὲ τὴν β' καὶ τὸ $\frac{2}{5}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{2}{15}$· ἄρα $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$. Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται·

Ἡ ἀξία κλάσματος δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀσκήσεις.

1) 15 πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται 27 δρ.· πόσον τιμῶνται 8 πήχ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Ὁ εἷς πῆχ. τιμᾶται $\frac{27}{15}$ καὶ οἱ 8 πήχ. $\frac{27\times 8}{15}=14\frac{6}{15}$ δρ.

2) Τὰ $\frac{5}{8}$ οἰκίας διενεμήθησαν ἐξ ἴσου εἰς 3 ἀνθρώπους· τί μέρος τῆς οἰκίας θὰ ἀνήκῃ εἰς ἕκαστον;

3) $\frac{5}{8}$ τῆς δραχμῆς μὲ πόσα ὀγδοηκοστὰ ἰσοδυναμοῦσιν;

4) Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα ἰσοδύναμον τῷ $\frac{7}{8}$ καὶ τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα 60.

Ἁπλοποίησις.

115. *Ἁπλοποιῶ* κλάσμα σημαίνει ὅτι εὑρίσκω ἄλλο κλάσμα ἔχον τὴν αὐτὴν ἀξίαν, ἀλλὰ μικροτέρους ὅρους.

Κατὰ τὰ προηγούμενα, ἐὰν οἱ ὅροι κλάσματος ἔχωσι κοινόν τινα διαιρέτην, δυνάμεθα νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα διαιροῦντες αὐτοὺς διὰ τοῦ κ. δ. Ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{350}{150}$· ἁπλοποιοῦμεν διὰ 10 καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον κλάσμα $\frac{35}{15}$ καὶ τοῦτο πάλιν ἁπλοποιοῦντες διὰ 5 ἔχομεν $\frac{7}{3}$, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· τὸ τοιοῦτο δὲ κλάσμα λέγεται **ἀνάγωγον.**

116. *Θεώρημα.* Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{2}{3}$ καὶ ἰσοδύναμον αὐτῷ ἕτερον κλάσμα, τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$· ἔχομεν

$$\frac{2}{3}=\frac{\alpha}{\beta}$$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἴσους τούτους ἀριθμοὺς ἐπὶ β καὶ ἔχομεν

$$(2) \qquad \frac{2\times\beta}{3}=\alpha$$

Ἄρα ὁ 3 διαιρεῖ τὸ γινόμενον $2\times\beta$ καὶ ὢν πρῶτος πρὸς τὸν 2 διαιρεῖ τὸν β· ἄρα $\beta=3\times\pi$· ἔνθα π εἶναι ἀκέραιος. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ β διὰ τοῦ $3\times\pi$ καὶ ἔχομεν

$$\alpha=\frac{2\times3\times\pi}{3}=2\times\pi$$

ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3 καὶ ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ εἶναι μικρότεροι ὁ μὲν α τοῦ 2, ὁ δὲ β τοῦ 3.

Ἐντεῦθεν ἕπεται·

Κλάσμα, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, δὲν ἔχει ἄλλο ἰσοδύναμον αὐτῷ καὶ ἁπλούστερον· δι' ὃ καλεῖται ἀνάγωγον.

Πόρισμα α') Δύο ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι ἴσα, *μόνον* ὅταν ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς καὶ ἀριθμητὰς καὶ παρονομαστάς.

Πόρισμα β') Πάντα τὰ ἴσα πρὸς ἄλληλα κλάσματα προέρχονται ἐξ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀναγώγου κλάσματος διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

117. Διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως α') λαμβάνομεν σαφεστέραν ἔννοιαν τοῦ κλάσματος· β') εὐκολυνόμεθα εἰς τὰς ἐπ' αὐτῶν πράξεις.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ καταστῶσιν ἀνάγωγα τὰ κλάσματα

$$\frac{112}{3600},\quad \frac{252}{693},\quad \frac{1764}{4851}.$$

5) 1800 πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται 360 δραχ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Σημ. Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{283}{881}$, τοῦ ὁποίου δυσκολευόμεθα νὰ λάβωμεν σαφῆ ἰδέαν, διότι ἔχει μεγάλους ὅρους.

Διαιροῦμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀριθμητοῦ, ὁπότε ὁ μὲν ἀριθμητὴς γίνεται 1, ὁ δὲ παρονομαστὴς $3\frac{32}{283}$. Ἄρα τὸ δοθὲν κλάσμα περιέχεται μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{3}$· οὕτω δὲ κατανοεῖται καλύτερον.

Ἡ ὑψηλοτέρα κορυφὴ τῶν Ἱμαλαΐων ἔχει ὕψος ὑπὲρ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης 8588 μέτρ. Τί κλάσμα εἶναι τὸ ὕψος τοῦτο τῆς ἀκτῖνος τῆς γῆς, ἴσης πρὸς 6366 χιλμ.;

Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

118. *Ὁμώνυμα* κλάσματα λέγονται τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν· π. χ.

$$\frac{5}{9},\quad \frac{4}{9},\quad \frac{7}{9},$$

ἑτερώνυμα δὲ τὰ μὴ ὁμώνυμα.

Ἤδη θὰ ἐξετάσωμεν, πῶς τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα. Θεωρήσωμεν δύο ἑτερώνυμα

$$\frac{\alpha}{\beta},\quad \frac{\gamma}{\delta}$$

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπὶ δ καὶ τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ β καὶ ἔχομεν τὰ κλάσματα

$$\frac{\alpha\times\delta}{\beta\times\delta},\quad \frac{\gamma\times\beta}{\delta\times\beta},$$

ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα καὶ ὁμώνυμα· ἄρα

Διὰ νὰ τρέψωμεν δύο κλάσματα ἑτερώνυμα εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκατέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου.

Θεωρήσωμεν ἤδη πλείονα τῶν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα.

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\gamma}{\delta}, \quad \frac{\varepsilon}{\zeta},$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἰσοδύναμα πρὸς ταῦτα καὶ ὁμώνυμα εἶναι τὰ ἑπόμενα

$$\frac{\alpha\times\delta\times\zeta}{\beta\times\delta\times\zeta}, \quad \frac{\gamma\times\beta\times\zeta}{\delta\times\beta\times\zeta}, \quad \frac{\varepsilon\times\beta\times\delta}{\zeta\times\delta\times\beta}, \quad \text{ἤτοι}$$

Διὰ νὰ τρέψωμεν κλάσματα ἑτερώνυμα πλείονα τῶν δύο εἰς ὁμώνυμα, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους ἑκάστου ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Κατὰ τοὺς κανόνας τούτους τὰ ἑτερώνυμα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$ τρέπονται εἰς τὰ ὁμώνυμα $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$.

Ὁμοίως τὰ ἑτερώνυμα

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{3}{10}$$

τρέπονται εἰς τὰ ὁμώνυμα

$$\frac{100}{150}, \quad \frac{120}{150}, \quad \frac{45}{150}$$

119. Θεωρήσωμεν τὰ ἑτερώνυμα $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{40}$. Ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 40 διαιρεῖται διὰ τῶν ἄλλων. Διαιροῦμεν 40 δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶν καὶ ἔχομεν κατὰ σειρὰν τὰ πηλίκα 10, 5, 1· πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον καὶ εὑρίσκομεν

$$\frac{30}{40}, \quad \frac{25}{40}, \quad \frac{7}{40},$$

τὰ ὁποῖα προφανῶς εἶναι ἰσοδύναμα πρὸς τὰ δοθέντα, εἶναι δὲ καὶ ὁμώνυμα, διότι οἱ παρονομασταὶ τῶν δοθέντων κλασμάτων ὡς διαιρέται πολλαπλασιαζόμενοι ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον δίδουσι τὸν κοινὸν διαιρετέον 40.

Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα γίνεται εὐκολώτερον, εὑρίσκεται δὲ καὶ μικρότερος κοινὸς παρονομαστής.

120. Θεωρήσωμεν ἤδη τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, 10, ὧν ὁ μεγαλύτερος παρονομαστὴς 10 δὲν εἶναι κ. π. τῶν παρονομαστῶν· ζητοῦμεν τότε ἓν κ. π. καὶ ἰδίως τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν, διὰ νὰ ἔχωμεν ἔτι μικρότερον κοινὸν παρονομαστήν· εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ἐ. κ. π. εἶναι ὁ 30 (§ 105)· τοῦτο διαιροῦμεν διὰ τῶν παρονομαστῶν καὶ πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον ἔχομεν

$$\frac{20}{30},\quad \frac{24}{30},\quad \frac{21}{30}$$

Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους *ἀνὰ δύο*, τὸ ἐ. κ. π. αὐτῶν εἶναι (§ 106) τὸ γινόμενον αὐτῶν, ὁπότε διὰ τῆς μεθόδου ταύτης εὑρίσκομεν τὸν αὐτὸν κοινὸν παρονομαστήν, τὸν ὁποῖον καὶ διὰ τῆς α΄ μεθόδου.

Π. χ. προκειμένου περὶ τῶν κλασμάτων

$$\frac{2}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{9}{8},$$

Ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής.

121. Ἔστωσαν τὰ κλάσματα

$$\frac{2}{3},\quad \frac{8}{10},\quad \frac{5}{20} \qquad (1)$$

καὶ τὰ ἴσα πρὸς αὐτὰ ἀνάγωγα

$$\frac{2}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{1}{4} \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ β΄ πορίσματος τῆς § 116 ἕπεται ὅτι καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν τρέψωμεν τὰ κλάσματα (1) εἰς ὁμώνυμα ὁ κοινὸς παρονομαστὴς θὰ εἶναι κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν κλασμάτων (2). Ἄρα

Ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, ὃν δύνανται ν' ἀποκτήσωσιν ὁσαδήποτε κλάσματα, εἶναι τὸ ἐ. κ. π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ἰσοδυνάμων ἀναγώγων κλασμάτων ἢ τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων, ἐὰν ταῦτα εἶναι ἀνάγωγα.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς εἶναι 60.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ ταχθῶσι κατὰ τάξιν μεγέθους τὰ κλάσματα

$$\frac{8}{5}, \quad \frac{7}{20}, \quad \frac{8}{10}, \quad \frac{13}{12}$$

2) Τίς ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, ὃν δύνανται νὰ ἀποκτήσωσι τὰ κλάσματα τοῦ προηγουμένου προβλήματος;

3) Τὰ κλάσματα $\frac{8}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ νὰ τραπῶσιν εἰς ἕτερα ἰσοδύναμα καὶ ἔχοντα τὸν αὐτὸν ἀριθμητήν.

Ἰσότης καὶ ἀνισότης.

122. Δύο κλάσματα ὁμώνυμα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχωσιν ἴσους ἀριθμητάς, ἄνισα δέ, ὅταν ἔχωσιν ἀνίσους ἀριθμητὰς καὶ μεγαλύτερον τὸ ἔχον μεγαλύτερον ἀριθμητήν· π. χ.

$$\frac{5}{7} = \frac{5}{7}, \quad \frac{5}{7} > \frac{3}{7}$$

Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ βλέπομεν οὕτως, ἂν εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καί, ἐὰν εἶναι ἄνισα, ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον.

Σημ. Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει α') ὡς εἴδομεν, διὰ νὰ εὑρίσκωμεν, ἂν δύο κλάσματα εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καὶ ποῖον εἶναι μεγαλύτερον, β') εἰς τὰς ἐπὶ τῶν κλασμάτων πράξεις, ὡς θὰ ἴδωμεν μετ' ὀλίγον.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ δύο ἐργατῶν ὁ α' ἔσκαψεν εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{7}{18}$ μιᾶς ἀμπέλου, ὁ β' τὰ $\frac{8}{20}$· ποῖος εἰργάσθη περισσότερον;

2) Ἔμπορος ἠγόρασε 3 τεμάχια ὑφάσματος, τὸ α' ἀντὶ δρ. 8, τὸ β' ἀντὶ δραχμῶν 12 καὶ τὸ γ' ἀντὶ δραχμῶν 9. Ἐπώλησε δὲ τὸ μὲν α' ἀντὶ 11 δρ., τὸ β' ἀντὶ 17 δρ. καὶ τὸ γ' ἀντὶ 13 δρ. Ποῖον ἐκ τῶν 3 τεμαχίων ἔφερε περισσότερον κέρδος ἀναλόγως τῆς ἀγορᾶς του;

3) Δύο ἀτμόπλοια διέτρεξαν τὸ α' 55 χιλμ. εἰς 8 ὥρ., τὸ β' 60 χιλμ. εἰς 9 ὥρ.· ποῖον ἐκινήθη ταχύτερον;

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

123. Ἡ πρόσθεσις ὁρίζεται ἐνταῦθα ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅταν λέγωμεν μονάδας, νὰ ἐννοῶμεν καὶ τὰς ἀκεραίας καὶ τὰς κλασματικάς.

124. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

α') Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{7}+\frac{4}{7}$$

Φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἑνώσωμεν ὅλα τὰ ἕβδομα, θὰ ἔχωμεν $\frac{12}{7}$. Ἄρα

Διὰ νὰ προσθέσωμεν κλάσματα ὁμώνυμα, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμητὰς καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θέτομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν.

β') Ἐὰν οἱ προσθετέοι εἶναι κλάσματα ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω· π. χ.

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=\frac{9}{6}=1\frac{1}{2}$$

γ') Ζητεῖται τὸ ἄθροισμα

$$3\frac{2}{3}+8\frac{4}{5}$$

Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω· ἀλλ' εἶναι εὐκολώτερον νὰ προσθέσωμεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα ἑνώνοντες τὰ μερικὰ ἀθροίσματα ὡς ἑξῆς·

$$3+8=11$$

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{22}{15}$$

Ὁλικὸν ἄθροισμα$=12\frac{7}{15}$. Ἐν γένει, ὅταν εἴς τι ἄθροισμα οἱ προσθετέοι εἶναι ἀκέραιοι καὶ κλάσματα, προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀκεραίους καὶ χωριστὰ τὰ κλάσματα καὶ ἑνώνομεν ἔπειτα τὰ μερικὰ ταῦτα ἀθροίσματα.

125. Ἡ πρόσθεσις ἔχει προφανῶς καὶ ἐνταῦθα τὴν ἰδιότητα τῆς ἀδιαφορίας ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν προσθετέων, ἄρα καὶ πάσας τὰς ἄλλας ἰδιότητας (§ 23), αἵτινες ἐξ αὐτῆς ἀπορρέουσι καὶ αἵτινες, ὡς εἴδομεν, παρίστανται διὰ τῶν τύπων

1) $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$.

2) $(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma$.

3) $(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)=\alpha+\beta+\gamma+\delta$.

Ἐνταῦθα ὅμως τὰ γράμματα παριστῶσιν ἀδιακρίτως ἀκεραίους ἢ κλάσματα.

126. Τοὺς ἀκεραίους καὶ τὰ κλάσματα ὁμοῦ καλοῦμεν ***συμμέτρους*** ἀριθμούς.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐδαπάνησέ τις διαδοχικῶς τὸ $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{5}$ τῆς περιουσίας του. Τί μέρος τοῦ ὅλου ἐδαπάνησεν;

2) Ἐκ δύο ἐργατῶν ὁ α' τελειώνει τὸ ἔργον μόνος του εἰς 8

ἡμέρας, ὁ β′ εἰς 15 ἡμέρας. Τί μέρος τοῦ ἔργου τελειώνουσιν ἀμφότεροι εἰς μίαν ἡμέραν;

3) Πρὸς κατασκευὴν πυρίτιδος ἀνεμίξαμεν $33\frac{1}{3}$ γραμ. νίτρου, $5\frac{1}{9}$ γραμ. ἄνθρακος καὶ $5\frac{5}{9}$ γραμ. θείου. Πόσον ζυγίζει ἡ κατασκευασθεῖσα πυρῖτις;

4) Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα ἔχωσι παρονομαστὰς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ὁμοίως κλάσμα ἀνάγωγον.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

126. Ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους.

127. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς ἀφαιρέσεως διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

α′) Ζητεῖται ἡ διαφορὰ $\frac{8}{9}-\frac{2}{9}$· αὕτη προφανῶς εἶναι $\frac{6}{9}$. Ἄρα

Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν κλάσμα ἀπὸ κλάσματος ὁμωνύμου, ἀφαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν θέτομεν παρονομαστὴν τὸν κοινόν.

β′) Ἐὰν τὰ κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν αὐτὰ εἰς ὁμώνυμα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω· π. χ.

$$\frac{7}{8}-\frac{3}{4}=\frac{7}{8}-\frac{6}{8}=\frac{1}{8}$$

γ′) Ζητεῖται ἡ διαφορὰ

$$8\frac{4}{5}-5\frac{2}{3}$$

Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τοὺς μικτοὺς εἰς κλάσματα καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω· ἀλλ᾽ εἶναι εὐκολώτερον νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀφαίρεσιν χωριστὰ τῶν ἀκεραίων καὶ χωριστὰ τῶν κλασμάτων καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰς δύο ταύτας διαφοράς· οὕτως ἔχομεν

$$8-5=3,\ \frac{4}{5}-\frac{2}{3}=\frac{2}{15}\cdot\ \text{ὅθεν}$$

$$8\frac{4}{5} - 5\frac{2}{3} = 3\frac{2}{15}$$

Ζητήσωμεν προσέτι τὴν διαφορὰν $8\frac{3}{7} - 3\frac{4}{7}$.

Ἐπειδὴ $\frac{4}{7}$ δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ $\frac{3}{7}$, λαμβάνομεν ἐκ τοῦ 8 μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἣν προσθέτομεν εἰς τὸ $\frac{3}{7}$, καὶ ἔχομεν

$$7\frac{10}{7} - 3\frac{4}{7} = 4\frac{6}{7}$$

δ′) Πλὴν τῶν προηγουμένων διακρίνομεν καὶ ἄλλας δευτερευούσας περιπτώσεις, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑπόμενα παραδείγματα·

α′) Ζητεῖται $8\frac{5}{9} - 4$.

Ἀφαιροῦμεν 4 ἀπὸ 8 καὶ ἔχομεν $8\frac{5}{9} - 4 = 4\frac{5}{9}$.

β′) Ζητεῖται $8\frac{9}{10} - \frac{5}{10}$.

Ἀφαιροῦμεν $\frac{5}{10}$ ἀπὸ $\frac{9}{10}$ καὶ ἔχομεν $8\frac{9}{10} - \frac{5}{10} = 8\frac{4}{10}$.

Ὁμοίως $8\frac{5}{10} - \frac{9}{10} = 7\frac{15}{10} - \frac{9}{10} = 7\frac{6}{10}$.

γ′) Ζητεῖται $12 - \frac{4}{5}$.

Ἔχομεν $12 - \frac{4}{5} = 11\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = 11\frac{1}{5}$.

δ′) Ζητεῖται $15 - 3\frac{3}{4}$.

Ἔχομεν $15 - 3\frac{3}{4} = 14\frac{4}{4} - 3\frac{3}{4} = 11\frac{1}{4}$.

128. Εἶναι φανερόν, ὅτι αἱ ἰδιότητες, τὰς ὁποίας ἔχει ἡ ἀφαίρεσις ἐν τοῖς ἀκεραίοις, ἀληθεύουσιν ἐν γένει ἐπὶ τῶν **συμμέτρων** ἀριθμῶν. Ἤτοι

1) $(\alpha+\delta)-(\beta+\delta)=\alpha-\beta$.
2) $(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+(\beta-\delta)+\gamma$.
3) $\Delta-(\alpha+\beta)=\Delta-\alpha-\beta$.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ 3 ἐργατῶν ὁ α΄ τελειώνει ἔργον τι εἰς 5 ἡμέρας, ὁ β΄ εἰς 4 ἡμ. καὶ ὁ γ΄ εἰς 6 ἡμ. Πρὸς ἐκτέλεσιν δὲ τοῦ ἔργου τούτου εἰργάσθησαν τὴν πρώτην ἡμέραν ὁμοῦ καὶ οἱ τρεῖς, τὴν δὲ δευτέραν μόνος ὁ β΄. Τί μέρος τοῦ ἔργου ὑπολείπεται;

2) Πατὴρ ἀφίνει εἰς τὰ 3 τέκνα του τὴν περιουσίαν του ὡς ἑξῆς. Εἰς τὸ α΄ τὸ $\frac{1}{3}$, εἰς τὸ β΄ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ εἰς τὸ γ΄ τὰς ὑπολειπομένας 5000 δρ. Πόση εἶναι ὅλη ἡ περιουσία;

3) Δεξαμενὴ ἔχει 3 κρήνας, ὧν αἱ μὲν 2 ῥίπτουσιν εἰς αὐτὴν ὕδωρ, ἡ δὲ ἄλλη χρησιμεύει πρὸς ἐκροὴν τοῦ ἐν αὐτῇ ὕδατος. Ἡ α΄ κρήνη δύναται νὰ πληρώσῃ αὐτὴν εἰς 4 ὥρας, ἡ β΄ εἰς 5 ὥρ., ἡ δὲ γ΄ δύναται νὰ κενώσῃ αὐτὴν εἰς 7 ὥρ. Τῆς δεξαμενῆς οὔσης κενῆς ἀφίνονται καὶ αἱ 3 κρῆναι ἀνοικταί. Εἰς πόσας ὥρας θὰ πληρωθῇ ἡ δεξαμενή;

4) Ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα ἔχωσι παρονομαστὰς πρώτους πρὸς ἀλλήλους, ἡ διαφορὰ τῶν κλασμάτων τούτων εἶναι κλάσμα ἀνάγωγον.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, καθ᾽ ὅσον ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀκέραιος, κλασματικὸς ἢ μικτὸς ἀριθμός.

Α΄ περίπτωσις.

129. Κατὰ τὰς ἰδιότητας (§ 114)

Κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιρέσωμεν τὸν παρονομαστὴν δι᾽ αὐτοῦ, ἐὰν διαιρῆται. Π. χ.

$$\frac{5}{8}\times 4=\frac{5\times 4}{8}=\frac{20}{8} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{5}{8}\times 4=\frac{5}{8:4}=\frac{5}{2}$$

130. Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ γινόμενον

$$\left(5\frac{3}{4}\right)\times 2$$

Τοῦτο προφανῶς ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$5\times 2+\frac{3}{4}\times 2=10+\frac{6}{4}=11\frac{1}{2}$$

Ἠδυνάμεθα ὅμως νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ νὰ ἐργασθῶμεν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα. Ἄρα

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μικτὸν ἐπὶ ἀκέραιον ἢ τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἐφαρμόζομεν ἔπειτα τὸν κανόνα τῆς § 129 ἢ πολλαπλασιάζομεν τὰ μέρη αὐτοῦ χωριστὰ προσθέτοντες ἔπειτα τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἐν γένει

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀκέραιον, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰ μέρη του καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Β' περίπτωσις.

131. *Πρόβλημα.* Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 4 δρ.· πόσον τιμῶνται τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ πήχεως;

Λύσις. Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ πήχεως τιμᾶται $\frac{4}{5}$ δρ.· ἄρα τὰ $\frac{2}{5}$ πήχ. τιμῶνται $\frac{4}{5}\times 2=\frac{4\times 2}{5}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$ δρ.

Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐλάβομεν τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 4 δρ. δίς, ἤτοι τὰ $\frac{2}{5}$ τῶν 4 δρ.

Ἐὰν ἐζητεῖτο, πόσον τιμῶνται 2 πήχ., θὰ ἐλέγομεν ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν ἀξίαν τοῦ πήχεως ἐπὶ 2, διότι ἐμάθομεν ἐν τοῖς ἀκεραίοις ὅτι

Ὁσάκις δίδεται ἡ ἀξία τῆς ἀκεραίας μονάδος **καὶ ζητεῖται** *ἡ* **ἀξία πολλῶν** *μονάδων, πολλαπλασιάζομεν* **τὴν ἀξίαν τῆς** *μιᾶς* **ἐπὶ τὸν** *ἀριθμὸν τῶν πολλῶν.*

Πρὸς γενίκευσιν τοῦ κανόνος τούτου λέγομεν ὅτι, καὶ ὅταν ο πήχεις εἶναι $\frac{2}{5}$, πρὸς εὕρεσιν τῆς ἀξίας αὐτῶν πολλαπλασιάζομεν τὴν ἀξ αν τοῦ πήχεως ἐπὶ $\frac{2}{5}$· ἤτοι νὰ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμὸς ἐπὶ $\frac{2}{5}$ σημαίνει νὰ ληφθῶσι τὰ $\frac{2}{}$ αὐτοῦ ἢ τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ δίς. Γενικῶς

132. Νὰ πολλαπλασιασθῇ ἀριθμὸς ἐπὶ πλῆθός τι δευτέρων ἢ τρίτων ἢ τετάρτων κ.τ.λ. τῆς μονάδος σημαίνει νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ αὐτοῦ ἢ τὸ τρίτον κ.τ.λ. τοσάκις, ὅσας τοιαύτας κλασματικὰς μονάδας περιέχει ὁ πολλαπλασιαστής.

133. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν

$$7\times\frac{3}{4}=\frac{7}{4}\times 3=\frac{7\times 3}{4}=\frac{21}{4}.$$ Ἤτοι

Ἀκέραιος πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.

134. Ἔστω τὸ γινόμενον

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$$

Τοῦτο σημαίνει νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ $\frac{2}{3}$. Τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι (§ 132) $\frac{2}{3\times 5}$. τούτου δὲ τὸ 4πλάσιον εἶναι $\frac{2\times 4}{3\times 5}$· ἄρχ

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5}=\frac{8}{15}\cdot$$ ἤτοι

Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Σημ. Τὸ γινόμενον $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ *λέγεται κλάσμα τοῦ κλάσματος* $\frac{2}{3}$.

Ἐφαρμογή. Ἐὰν ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $\frac{2}{3}$ δρ., τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ τιμῶνται $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$ δρ.

135. Ἔστω τὸ γινόμενον

$$\left(5\,\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}$$

Πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰ μέρη τοῦ μικτοῦ καὶ νὰ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα, ἤτοι

$$5\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=5\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}+\frac{4}{9}=\frac{34}{9}=3\frac{7}{9}.$$

136. Γενικῶς

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ κλάσμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν χωριστὰ τὰ μέρη αὐτοῦ καὶ ἑνώσωμεν ἔπειτα τὰ μερικὰ γινόμενα.

Π. χ. $\left(5+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{10}=5\times\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{3}{10}.$

Γ' περίπτωσις.

137. Ἐν γένει ὁσάκις ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικτός, δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν αὐτὸν εἰς κλάσμα, ὁπότε ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην· π. χ.

$$5\times\left(2\,\frac{3}{4}\right)=5\times\frac{11}{4}=\frac{55}{4}.$$

Ἀλλὰ δυνάμεθα καὶ ἄλλως νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον.

Ζητεῖται π. χ. $10\times3\frac{2}{5}$, ὅπερ ἰσοῦται τῷ $10\times\frac{17}{5}$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς §131 πρέπει τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ 10 νὰ λάβωμεν 17άκις· ἀλλ' ἐὰν τὸ λάβωμεν 5άκις εὑρίσκομεν 10, ἐὰν δὲ τὸ λάβωμεν 15άκις, εὑρίσκομεν $10\times3=30$, ὁπότε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου γινομένου ὑπολείπονται τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ 10, ἤτοι $10\times\frac{2}{5}=4$. Ἄρα

$$10\times3\frac{2}{5}=10\times3+10\times\frac{2}{5}=34.$$ Ἤτοι

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μικτόν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ ἑνώσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

138. Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{5}{8}\times 2\frac{3}{4}=\frac{5}{8}\times 2+\frac{5}{8}\times\frac{3}{4}$$

$$4\frac{2}{7}\times 5\frac{3}{4}=4\frac{2}{7}\times 5+4\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}$$

$$=4\times 5+\frac{2}{7}\times 5+4\times\frac{3}{4}+\frac{2}{7}\times\frac{3}{4}.$$

139. Ἐν γένει

Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἄθροισμα, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν χωριστὰ ἐφ᾽ ἕκαστον μέρος τοῦ ἀθροίσματος καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα· καὶ

Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕτερον ἄθροισμα, ἐὰν ἕκαστον μέρος τοῦ α′ πολλαπλασιάσωμεν ἐφ᾽ ἕκαστον μέρος τοῦ β′ καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

140. Γνωρίζομεν ἤδη ὅτι

α′) $5\times 3=5+5+5.$

β′) $5\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}.$

γ′) $5\times\frac{2}{3}=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}.$

δ′) $5\times 2\frac{2}{3}=5+5+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}.$

Ἐκ τούτων συνάγεται ὁ ἑξῆς γενικὸς ὁρισμός·

Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι᾽ ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν σχηματίζομεν ἐκ τοῦ πρώτου τρίτον, ὅπως ὁ β′ σχηματίζεται ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Ὁ α′ λέγεται πάντοτε *πολλαπλασιαστέος*, ὁ β′ *πολλαπλασιαστής*, ἀμφότεροι *παράγοντες* καὶ τὸ ἐξαγόμενον *γινόμενον*.

Τάξις τῶν παραγόντων.

141. Ἐκ τοῦ κανόνος τῆς § 133 ἕπεται·

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\alpha}{\beta}$$

Ἐπειδὴ δὲ πᾶς σύμμετρος ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, συνάγομεν ὅτι

Τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν παραγόντων.

Γινόμενον διαφορᾶς ἐπὶ ἀριθμόν.

142. Κατὰ τὴν § 135 ἔχομεν

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)\times\frac{\varepsilon}{\zeta}+\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\gamma}{\delta}\right)\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}$$

Ἄρα $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\gamma}{\delta}\right)\times\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}-\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\varepsilon}{\zeta}$· ἤτοι

Διαφορὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν μειωτέον καὶ ἀφαιρετέον χωριστὰ καὶ ἀπὸ τοῦ α΄ γινομένου ἀφαιρέσωμεν τὸ β΄.

Γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν.

143. Γινόμενον ἀριθμῶν περισσοτέρων τῶν δύο ὁρίζεται πάντοτε ὡς καὶ ἐν τοῖς ἀκεραίοις.

Ἔστω τὸ γινόμενον

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}.$$

Εὑρίσκομεν πρῶτον

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}$$

ἔπειτα τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ $\frac{6}{7}$, τὸ ὁποῖον εἶναι

$$\frac{2\times4\times6}{3\times5\times7}=\frac{48}{105}$$

῞Οθεν ἕπεται·

Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε κλασμάτων εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

Πρὶν ἐκτελέσωμεν τοὺς σεσημειωμένους πολλαπλασιασμοὺς εἰς τὸ κλάσμα, τὸ ὁποῖον παριστᾷ τὸ γινόμενον, δυνάμεθα πολλάκις νὰ ἁπλοποιήσωμεν.

Π. χ. Εἰς τὸ προηγούμενον γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 3 τοὺς ὅρους αὐτοῦ καὶ ἔχομεν

$$\frac{2\times4\times2}{5\times7}=\frac{16}{35}$$

Κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα εὑρίσκεται καὶ τὸ γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν οἱωνδήποτε, ἐὰν τρέψωμεν τοὺς μὲν ἀκεραίους εἰς κλάσματα ἔχοντα παρονομαστὴν 1 (ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον), τοὺς δὲ μικτοὺς εἰς κλάσματα μὲ παρονομαστὴν τὸν τοῦ κλάσματος αὐτῶν.

Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

144. Εἰς γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων κλασματικῶν, ἐὰν μεταβληθῇ ἡ τάξις αὐτῶν, οἱ ὅροι τοῦ γινομένου, ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῶν ἀκεραίων, δὲν μεταβάλλονται· ἐπειδὴ δὲ πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα, ἕπεται·

Γινόμενον ὁσωνδήποτε συμμέτρων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάσσει, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός.

Οὕτω γενικεύεται ἡ ἀδιαφορία ὡς πρὸς τὴν τάξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Καὶ πᾶσαι δὲ αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες αἱ ἐκ ταύτης πηγάζουσαι ἰσχύουσι καὶ ἐνταῦθα καὶ ἀποδεικνύονται ὡς καὶ ἐν τοῖς ἀκεραίοις· οὕτως ἔχομεν ἐπὶ οἱωνδήποτε ἀριθμῶν

1) $\alpha\times\beta\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$.

2) $(\alpha\times\beta\times\gamma)\times\delta=\alpha\times(\beta\times\delta)\times\gamma$.

3) $(\alpha\times\beta)\times(\gamma\times\delta)=\alpha\times\beta\times\gamma\times\delta$.

145. Ὡς εἴδομεν εἰς τὰ προηγούμενα (§ 136, 139), ἰσχύει καὶ ἐνταῦθα ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι. Οὕτως ἔχομεν

1) $(\alpha+\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma$.
2) $(\alpha+\beta)\times(\gamma+\delta)=\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma+\alpha\times\delta+\beta\times\delta$.
3) $(\alpha-\beta)\times\gamma=\alpha\times\gamma-\beta\times\gamma$.

Χρῆσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

146. Ἐκ τοῦ γενικοῦ ὁρισμοῦ τῆς § 140 ἕπεται ὅτι θὰ ἐκτελῶμεν πολλαπλασιασμόν, ὁσάκις πρόκειται νὰ ἐπαναλάβωμεν ἢ ὁλόκληρον ἀριθμὸν ἢ ὡρισμένον αὐτοῦ τέλειον μέρος, π.χ. τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$..., ἢ καὶ ἀμφότερα ταῦτα. Τοιαῦται δὲ περιστάσεις εἶναι αἱ ἑπόμεναι·

α΄) Ὡς εἴδομεν ἤδη, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ζητῶμεν τὴν ἀξίαν πολλῶν μονάδων ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν. Π. χ. Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 2 δρ.· πόσον τιμῶνται $5\frac{3}{8}$ πήχ. ; Τὸ ζητούμενον εἶναι $2\times5\frac{3}{8}$ δρ.

β΄) Ὅταν ζητῆται ὡρισμένον μέρος ποσοῦ τινος. Π.χ. Ἡ περιουσία τινὸς εἶναι 500 δρ.· πόσαι δρ. εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῆς; Τὸ ζητούμενον εἶναι $500\times\frac{3}{5}$.

γ΄) Ὁσάκις ἔχοντες ποσόν τι μεμετρημένον μὲ μίαν μονάδα, ζητοῦμεν τὸν παριστῶντα αὐτὸ ἀριθμόν, ὅταν μετρηθῇ μὲ ὑποδιαίρεσιν τῆς μονάδος· π. χ. $5\frac{3}{4}$ ὀκάδες πρὸς πόσα δράμια ἰσοδυναμοῦσι; Φανερὸν ὅτι τὸ ζητούμενον εἶναι $400\times5\frac{3}{4}$.

Σημ. Ἡ γ΄ περίπτωσις ὑπάγεται εἰς τὴν α΄.

Ἀσκήσεις.

1) Εἶχέ τις 356 δρ., ἐξ ὧν ἐδαπάνησε α΄ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ β΄ τὰ $\frac{2}{5}$· πόσαι ὑπολείπονται;

2) Ἔμπορος ἀνταλλάσσει σάκχαρον δι' ἀλεύρου δίδων 9 ὀκ. σακχάρου ἀντὶ 15 ὀκ. ἀλεύρου. Πόσας ὀκ. σακχάρου πρέπει νὰ δώσῃ, διὰ νὰ λάβῃ 567 ὀκ. ἀλεύρου;

3) Ἐδαπάνησέ τις τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς περιουσίας του· εἶτα ἀπώλεσε τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ τέλος δωρεῖται εἰς ἓν τέκνον του τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου. Τί μέρος τῆς περιουσίας του ὑπολείπεται;

4) Σφαῖρα ἐλαστικὴ πεσοῦσα ἐξ ὕψους 18 μέτρων ἀναπηδᾷ πεντάκις. Εἰς ἑκάστην δὲ ἀναπήδησιν ἀνέρχεται εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὕψους, ὅθεν προηγουμένως πίπτει. Εἰς πόσον ὕψος ἀνῆλθε κατὰ τὴν τελευταίαν ἀναπήδησιν;

5) Τὸ ἐξ Εὐρώπης κομιζόμενον οἰνόπνευμα ἔχει συνήθως καθαρότητα $\frac{95}{100}$, ἤτοι εἰς 100 μέρη τὰ 95 εἶναι καθαρὸν οἰνόπνευμα καὶ τὰ 5 ὕδωρ. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς 5 $\frac{1}{2}$ ὀκ. τοιούτου οἰνοπνεύματος, ὥστε ἡ καθαρότης αὐτοῦ νὰ κατέλθῃ εἰς $\frac{87}{100}$;

6) Πρὸς πόσα χιλιοστὰ τῆς ἀκεραίας μονάδος ἰσοδυναμοῦσι τὰ $\frac{5}{8}$ αὐτῆς;

7) Νὰ κατασκευασθῇ πρόβλημα, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις νὰ ἀπαιτῇ τὸν πολλαπλασιασμὸν

$$10 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$$

νὰ εἶναι δὲ διάφορον τοῦ 4ου τοῦ ἀναφερομένου εἰς τὴν ἐλαστικὴν σφαῖραν.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

147. Ἡ διαίρεσις ὁρίζεται καὶ ἐνταῦθα ὡς πρᾶξις, δι' ἧς δεδομένων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον παράγει τὸν πρῶτον.

148. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν δὲ τῆς πράξεως διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος, κλασματικὸς ἢ μικτός.

Α' περίπτωσις.

Ἐκ τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων (§ 114) ἕπεται ὅτι

Ἵνα διαιρέσωμεν κλάσμα δι' ἀκεραίου, πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν δι' αὐτοῦ, ἐὰν εἶναι διαιρετός· π. χ.

$$\frac{3}{5}:7=\frac{3}{35}$$

$$\frac{9}{5}:3=\frac{3}{5}$$

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ πηλίκον $5\frac{6}{7}:3$· πρὸς εὕρεσιν αὐτοῦ δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν μικτὸν εἰς κλάσμα καὶ ἔχομεν

$$5\frac{6}{7}:3=\frac{41}{7}:3=\frac{41}{21}$$

ἢ διαιροῦμεν χωριστὰ τὸν ἀκέραιον καὶ χωριστὰ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα· ἤτοι

$$5\frac{6}{7}:3=\frac{5}{3}+\frac{2}{7}\cdot \text{διότι}$$

$$\left(\frac{5}{3}+\frac{2}{7}\right)\times 3=5\frac{6}{7}$$

Β΄ περίπτωσις.

149. Ζητεῖται $5 : \frac{3}{4}$· ἐὰν παραστήσωμεν τὸ πηλίκον διὰ π, ἔχομεν

$$\pi \times \frac{3}{4} = 5$$

ἤτοι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πηλίκου εἶναι 5, ἑπομένως τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{5}{3}$ καὶ τὰ $\frac{4}{4}$, ἤτοι ὅλον τὸ πηλίκον, εἶναι $\frac{5\times4}{3}$· ἄρα

$$5 : \frac{3}{4} = \frac{5\times4}{3} = 5\times\frac{4}{3}$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$$

προσέτι

$$5\,\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = 5\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}$$

Γενικῶς

Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζομεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.

Γ΄ περίπτωσις.

150. *Ἵνα διαιρέσωμεν ἀριθμὸν οἱονδήποτε διὰ μικτοῦ, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς κλάσμα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω*· π.χ.

$$5 : 2\,\frac{3}{4} = 5 : \frac{11}{4} = 5\times\frac{4}{11}$$

Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως.

151. Παριστῶμεν διὰ π τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$, ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}\times\pi$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\mu}{\nu}=\left(\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\mu}{\nu}\right)\times\pi \text{ ἢ}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\mu}{\nu}:\frac{\gamma}{\delta}\times\frac{\mu}{\nu}=\pi\cdot \text{ ἄρα}$$

Ἐὰν διαιρετέον καὶ διαιρέτην πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάσσει.

Καὶ πᾶσαι δὲ αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες, περὶ ὧν εἴπομεν ἐν τοῖς ἀκεραίοις, ἰσχύουσι καὶ ἐνταῦθα ὁμοίως ἀποδεικνυόμεναι. Οὕτως ἔχομεν τοὺς ἑπομένους τύπους, ἔνθα τὰ γράμματα παριστῶσιν ἐν γένει ἀριθμοὺς συμμέτρους.

1) $(\alpha\times\beta\times\gamma):\delta=\alpha\times(\beta:\delta)\times\gamma$

2) $\alpha:(\beta\times\gamma)=(\alpha:\beta):\gamma$

3) $(\alpha+\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)+(\beta:\gamma)$

4) $(\alpha-\beta):\gamma=(\alpha:\gamma)-(\beta:\gamma)$.

Σύνθετα κλάσματα.

152. Εἴδομεν ὅτι τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἰσοῦται πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην· π. χ.

$$16:5=\frac{16}{5}$$

Τὴν τοιαύτην παράστασιν τοῦ πηλίκου γενικεύομεν ἐπὶ πάντων τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν· οὕτω γράφομεν

$$5:\frac{2}{7}=\frac{5}{\frac{2}{7}}$$

Ὁμοίως ἀντὶ $\frac{2}{3}:\frac{4}{5}$ γράφομεν $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$.

Αἱ τοιαῦται δὲ κλασματικαὶ παραστάσεις λέγονται κλάσματα *σύνθετα*· πρὸς διάκρισιν δὲ τὰ κλάσματα, περὶ ὧν μέχρι τοῦδε εἴπομεν, λέγονται *ἁπλᾶ*.

Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἁπλῶν κλασμάτων καὶ πάντες οἱ κανόνες τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων ἰσχύουσιν ἐπὶ τῶν συνθέτων, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑπομένων.

153. *Θεώρημα α'*. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, οὗ οἱ ὅροι εἶναι οἱοιδήποτε ἀριθμοί· παριστῶντες διὰ π τὸ πηλίκον $\alpha:\beta$ ἔχομεν $\alpha:\beta=\alpha\times\nu:\beta\times\nu$ (§ 151), ἤτοι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\nu}{\beta\times\nu}$. Ἄρα

Ἡ ἀξία κλάσματος οἱουδήποτε ἁπλοῦ ἢ συνθέτου δὲν ἀλλάσσει, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Πόρισμα α'. Τὰ ἑτερώνυμα σύνθετα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα ὅπως καὶ τὰ ἁπλᾶ.

Πόρισμα β'. Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν συνθέτων κλασμάτων γίνεται ὅπως ἡ τῶν ἁπλῶν.

154. *Θεώρημα β'*. Ἔστω $\alpha:\beta=\pi$ καὶ $\gamma:\delta=\kappa$, ἔνθα τὰ γράμματα παριστῶσιν οἱουσδήποτε ἀριθμούς· ἔχομεν

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\beta\times\pi\\ \gamma&=\delta\times\kappa\end{aligned}\right\}\quad\text{ὅθεν}$$

$$(\alpha\times\gamma)=(\beta\times\delta)\times(\pi\times\kappa)\quad\text{ἢ}$$

$$\pi\times\kappa=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}\quad\text{ἄρα}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha\times\gamma}{\beta\times\delta}$$

Ὅθεν ἕπεται·

Τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων ἐχόντων ὅρους οἱουσδήποτε εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν.

155. *Θεώρημα γ'*. Ζητεῖται $\Delta : \frac{\alpha}{\beta}$, ἔνθα πάλιν τὰ γράμματα παριστῶσιν οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

Τὸ πηλίκον εἶναι $\Delta \times \frac{\beta}{\alpha}$, διότι

$$\Delta \times \frac{\beta}{\alpha} \times \frac{\alpha}{\beta} = \Delta\cdot \quad \text{ἄρα}$$

Ἀριθμὸς οἱοσδήποτε διαιρεῖται διὰ κλάσματος ἔχοντος ὅρους οἱουσδήποτε, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον.

Χρῆσις τῆς διαιρέσεως.

156. Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τούς τε ἀκεραίους καὶ τὰ κλάσματα ὁρίζομεν ὡς ἑξῆς τὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς γίνεται χρῆσις αὐτῆς.

α') Ὅταν πρόκειται ποσόν τι νὰ μερισθῇ εἰς ἴσα μέρη.

Π. χ. 22 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν $110\frac{1}{2}$ δρ.· πόσας ἔλαβεν ἕκαστος;

Τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι $110\frac{1}{2} : 22$.

β') Ὅταν ζητῆται ἡ ἀξία τῆς ἀκεραίας μονάδος, δεδομένης τῆς ἀξίας πολλῶν μονάδων οἱωνδήποτε· π. χ.

$25\frac{3}{4}$ πήχ. τιμῶνται $15\frac{4}{5}$ δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Τὸ ζητούμενον εἶναι

$$15\frac{4}{5} : 25\frac{3}{4}$$

Σημ. Ἡ περίπτωσις αὕτη ὑπάγεται εἰς τὴν α'.

γ') Ὅταν ζητῆται, πῶς ἀποτελεῖται ποσόν τι ἔκ τινος ἄλλου ὁμοειδοῦς· π. χ.

Δύο ἄνθρωποι ἔχουσι περιουσίαν ὁ μὲν 5000 δρ., ὁ δὲ 1500 δρ.· πῶς ἀποτελεῖται ἡ περιουσία τοῦ α' ἐκ τῆς τοῦ β' καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς;

Τὸ ζητούμενον εἶναι

$$5000 : 1500 = 3\,\frac{1}{3}$$

ἤτοι ἡ τοῦ α΄ ἀποτελεῖται ἐκ τοῦ 3πλασίου τῆς τοῦ β΄ καὶ ἐκ τοῦ τρίτου αὐτῆς.

δ΄) Ὅταν δίδηται ἡ ἀξία τῆς ἀκεραίας μονάδος καὶ ἡ ἀξία πλήθους μονάδων οἱωνδήποτε, ζητῆται δὲ τὸ πλῆθος αὐτῶν· π.χ.

Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται $2\,\frac{2}{3}$ δρ.· πόσους πήχεις δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 100 δρ.;

Τὸ ζητούμενον εἶναι

$$100 : 2\,\frac{2}{3} = 37\,\frac{1}{2} \text{ πήχ.}$$

Σημ. Ἡ περίπτωσις αὕτη ὑπάγεται εἰς τὴν γ΄.

ε΄) Ὅταν ἐκ τοῦ μέρους ζητῆται τὸ ὅλον· π. χ.

Τὰ $\frac{3}{5}$ ἑνὸς κεφαλαίου εἶναι 1000 δρ.· πόσον εἶναι τὸ κεφάλαιον;

Τὸ ζητούμενον εἶναι

$$1000 : \frac{3}{5}$$

Ἀσκήσεις.

1) Ἔμπορος ἠγόρασεν $125\,\frac{2}{3}$ ὀκ. ἐλαίου ἀντὶ 216 δρ.· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ $75\,\frac{1}{2}$ δρ.;

2) Νὰ κατασκευασθῇ πρόβλημα λυόμενον διὰ τῆς διαιρέσεως

$$\frac{5}{8} : \frac{3}{4}$$

3) Σφαῖρα ἐλαστικὴ πεσοῦσα ἔκ τινος ὕψους ἀναπηδᾷ πεντάκις. Ἐκ πόσου ὕψους κατέπεσεν, ἐὰν εἰς ἑκάστην μὲν ἀναπή-

δησιν ἀνέρχηται εἰς τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ὕψους, ὅθεν προηγουμένως πίπτει, τὸ δὲ ὕψος τῆς τελευταίας ἀναπηδήσεως εἶναι 2 μέτρα;

4) Εἶχέ τις 25 δρ., ἐξ ὧν ἐδαπάνησε $5\frac{3}{4}$ δρ.· τί μέρος τῶν 25 δρ. ἀποτελεῖ ἡ δαπάνη;

5) Δύο ἁμαξοστοιχίαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο ἄκρων σιδηροδρομικῆς γραμμῆς. Ἡ α′ διατρέχει ὅλην τὴν γραμμὴν εἰς 10 ὥρ., ἡ β′ εἰς 14 ὥρ. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ συναντηθῶσι καὶ τί μέρος τῆς γραμμῆς θὰ διατρέξωσιν ἑκατέρα μέχρι τῆς συναντήσεως;

6) Ἐκ τοῦ μισθοῦ ὑπαλλήλου κρατοῦνται α′) $1\frac{1}{4}$ τοῖς ἑκατὸν ὑπὲρ τῆς παιδείας, β′) $7\frac{1}{2}$ τοῖς ἑκατὸν λόγῳ συντάξεως· τί μέρος τοῦ μισθοῦ του ἀποτελοῦσιν αἱ δύο κρατήσεις;

7) Ἐκ τινος πίθου περιέχοντος $120\frac{1}{2}$ ὀκ. ἐλαίου ἐπωλήθησαν $20\frac{1}{2}$ ὀκ.· τί μέρος τοῦ ἐλαίου ἐπωλήθη καὶ τί ἔμεινεν;

Δυνάμεις.

157. Παρατηροῦμεν ὅτι $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$· ἄρα

Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐὰν εἰς τὴν δύναμιν ταύτην ὑψωθῶσιν οἱ ὅροι αὐτοῦ.

Οὕτως ἔχομεν γενικῶς

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$$

Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι τὰ γράμματα α καὶ β δύνανται νὰ παριστῶσιν οἱουσδήποτε ἀριθμούς.

158. Καὶ πᾶσαι αἱ λοιπαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων, περὶ ὧν εἴπομεν ἐν τοῖς ἀκεραίοις, ἀληθεύουσι καὶ ἐνταῦθα, στηριζόμεναι

ὁμοίως ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ· οὕτως ἔχομεν

$$\alpha^{\nu}\times\alpha^{\varkappa}\times\alpha^{\sigma}=\alpha^{\nu+\varkappa+\sigma}$$
$$(\alpha\times\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}\times\beta^{\nu}$$
$$(\alpha^{\nu})^{\varkappa}=\alpha^{\nu\times\varkappa}$$
$$\alpha^{\varkappa}:\alpha^{\nu}=\alpha^{\varkappa-\nu}$$

Ἔνθα τὰ γράμματα α καὶ β παριστῶσιν ἐν γένει ἀριθμοὺς συμμέτρους.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος κύβου ἔχοντος πλευρὰν $\frac{3}{10}$ τοῦ μέτρου;

2) Πόσον ζυγίζει σφαῖρα σιδηρᾶ ἔχουσα εἰδικὸν βάρος $7\frac{1}{2}$ καὶ ἀκτῖνα $\frac{1}{10}$ μέτρου;

3) Ἐὰν κλάσμα τι εἶναι ἀνάγωγον, καὶ πᾶσα δύναμις αὐτοῦ εἶναι ὁμοίως κλάσμα ἀνάγωγον;

4) Τί μέρος τοῦ κλάσματος $\frac{3}{4}$ εἶναι ἡ τρίτη αὐτοῦ δύναμις;

5) $(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$, ἔνθα α καὶ β σύμμετροι.

6) Ἐὰν $\frac{1}{5}$ ὑψωθῇ εἰς τὴν 4ην δύναμιν, ποσάκις γίνεται μικρότερον;

7) Ἔχομεν δύο κύκλους, ἐξ ὧν ὁ α′ ἔχει ἀκτῖνα 1 μέτρ., ὁ δὲ β′ $\frac{2}{3}$ μέτρ. Τί μέρος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ α′ κύκλου εἶναι τὸ τοῦ β′;

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν κλασμάτων καθόλου.

1) Τρεῖς ἐργάται διαφόρου δυνάμεως χρησιμοποιοῦνται πρὸς ἐκτέλεσιν ἔργου. Ἐὰν ἕκαστος αὐτῶν εἰργάζετο μόνος, ὁ μὲν α′ ἐχρειάζετο $1\frac{1}{2}$ ὥρ., ὅπως τὸ τελειώσῃ, ὁ δὲ β′ 2 ὥρ. καὶ ὁ γ′ $2\frac{1}{3}$ ὥρ. Εἰς πόσας ὥρας καὶ οἱ τρεῖς ὁμοῦ ἐργαζόμενοι τελειώνουσι τὸ ἔργον;

2) Ἐδαπάνησα τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων μου, ἀπώλεσα ἔπειτα τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ὑπολοίπου καὶ ἐδώρησα τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου, ἔχω δὲ εἰσέτι 10 δρ.· πόσας δραχμὰς εἶχον ἐν ἀρχῇ ;

3) $8\frac{3}{8}$ πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται $5\frac{3}{4}$ δρ.· πόσον τιμῶνται $6\frac{1}{8}$ πήχ. ;

4) $8\frac{3}{4}$ πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται $5\frac{1}{2}$ δρ. Πόσους πήχεις δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 25 δρ. ;

* 5) Ἐκ τριῶν ἐργατῶν ὁ α′ καὶ ὁ β′ ὁμοῦ τελειώνουσιν ἔργον τι εἰς $\frac{30}{11}$ τῆς ἡμέρας, ὁ β′ καὶ ὁ γ′ εἰς $\frac{20}{9}$ τῆς ἡμέρας, ὁ α′ καὶ ὁ γ′ εἰς $\frac{12}{5}$ τῆς ἡμέρας. Εἰς πόσας ἡμέρας ἕκαστος ἐργάτης μόνος θὰ ἐτελείωνε τὸ ἔργον ;

6) Ἔμεινέ τις μὲ χρέος 200 δρ., ἀφ' οὗ ἐδαπάνησε τὰ $\frac{2}{3}$, τὰ $\frac{4}{5}$ καὶ τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ ποσοῦ, ὅπερ εἶχε. Πόσας δρ. εἶχεν ;

7) Ἁμαξοστοιχία σιδηροδρομικὴ διατρέχουσα 48 χιλιόμ. τὴν ὥραν ἀναχωρεῖ $4\frac{1}{2}$ ὥρας μετὰ μίαν ἄλλην διατρέχουσαν μόνον 25 χιλ. τὴν ὥραν. Εἰς πόσην ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς ἀναχωρήσεως αἱ δύο ἁμαξοστοιχίαι θέλουσι συναντηθῆ ;

8) Ἄθροισμα δύο κλασμάτων ἀναγώγων καὶ ἑτερωνύμων οὐδέποτε ἰσοῦται ἀκεραίῳ ἀριθμῷ.

9) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} = \ldots$, τότε ἕκαστον τῶν ἴσων τούτων κλασμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ

$$\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\ldots}{\beta+\delta+\zeta+\ldots}$$

10) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$, τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta} < \frac{\varepsilon}{\zeta}$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄.

ΡΗΤΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Ὁρισμοί.

158. Ἐν τῇ ἀριθμητικῇ καλοῦμεν *παραστάσεις* τὰς σημειώσεις διαφόρων πράξεων ἐκτελεστέων ἐπὶ ἀριθμῶν· π. χ.

$$5+3-2$$

$$(5+3-2)\times 10$$

$$\frac{3\times\alpha-\beta}{\alpha}$$

$$(\alpha^2-3\times\beta^2)\times\alpha^3.$$

159. Καλοῦμεν *ῥητὰς* τὰς παραστάσεις, ἐν αἷς δὲν ὑπάρχουσιν ἄλλαι πράξεις σεσημειωμέναι πλὴν τῶν τεσσάρων θεμελιωδῶν καὶ τῆς ὑψώσεως εἰς δύναμιν, ἥτις καὶ αὕτη ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, μίαν τῶν θεμελιωδῶν. Τοιαῦται παραστάσεις εἶναι αἱ προηγουμένως σημειωθεῖσαι.

160. Τὰς παραστάσεις, αἵτινες περιέχουσι γράμματα, καλοῦμεν *ἐγγραμμάτους*.

* *Σημ. α΄*. Τὰς ἐγγραμμάτους παραστάσεις καλοῦμεν καὶ *ἀλγεβρικάς*, τὰς δὲ μὴ τοιαύτας κυρίως *ἀριθμητικάς*.

Σημ. β΄. Πρὸς συντομίαν τῶν παραστάσεων τὸ γινόμενον θὰ σημειῶμεν δι' ἁπλῆς παραθέσεως τῶν παραγόντων, ἄνευ δηλ. σημείου, ἐκτὸς ὅταν δύο διαδοχικοὶ παράγοντες εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοί· π. χ.

Ἀντὶ $5\times\alpha\times\beta$ θὰ γράψωμεν $5\alpha\beta$· ἀντὶ $5\times3\times\alpha\times\beta$ θὰ γράψωμεν $5\times3\alpha\beta$, διότι, ἐὰν ἐγράφομεν $53\alpha\beta$, θὰ εἴχομεν τὸ γινόμενον $53\times\alpha\times\beta$, ὅπερ διάφορον.

161. Ἔστω ἡ ἐγγράμματος παράστασις

$$(3\alpha+\beta)\,\alpha$$

Θέτομεν $\alpha=2$ καὶ $\beta=3$, ὁπότε ἔχομεν

$$(3\times2+3)\times2=18.$$

Ὁ 18 λέγεται *ἀριθμητικὴ τιμὴ* τῆς παραστάσεως ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐτῇ γραμμάτων $\alpha=2$ καὶ $\beta=3$.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ὁρισμοί.

162. Δύο παραστάσεις ἐγγράμματοι λέγονται *ἰσοδύναμοι*, ὅταν εἰς τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων ἀντιστοιχῶσιν ἴσαι ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν παραστάσεων· π. χ. αἱ παραστάσεις $\alpha\beta$ καὶ $\beta\alpha$.

Μετασχηματισμὸς δὲ παραστάσεως λέγεται ἡ εὕρεσις ἄλλης ἰσοδυνάμου αὐτῇ.

Πολλάκις διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ ἁπλοποιοῦμεν τὴν παράστασιν, ἤτοι εὑρίσκομεν ἄλλην ἁπλουστέραν καὶ ἰσοδύναμον.

Ἐκθέτομεν ἤδη παραδείγματα τοιούτων μετασχηματισμῶν.

163. Ἡ παράστασις

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta \qquad (1)$$

δύναται προφανῶς νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

$$(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta).$$

Ἤδη ἂς ὑποτεθῇ ὅτι εἰς μίαν παράστασιν Κ πρόκειται νὰ προστεθῇ ἡ παράστασις (1)· ἔχομεν

$$\begin{gathered}K+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)=K+[(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)]\\ =K+(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)=K+\alpha+\gamma-\beta-\delta=\\ K+\alpha-\beta+\gamma-\delta.\end{gathered}$$

Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἰσότητα

$$(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)=\alpha-\beta+\gamma-\delta.$$

164. Θεωρήσωμεν τὸ ἄθροισμα

$$\alpha^2\beta+5\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta\cdot$$

κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦτο ἰσοῦται τῷ

$$(1+5+3)\alpha^2\beta=9\alpha^2\beta.$$

Οὕτω δὲ τὸ ἄθροισμα μετεσχηματίσθη ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον.

Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν

$$(3\alpha+\beta)+5\alpha=3\alpha+\beta+5\alpha=8\alpha+\beta.$$

Ὁμοίως

$$(5\alpha^2\beta+3\beta)+(3\alpha^2\beta+3\beta)=5\alpha^2\beta+3\beta+3\alpha^2\beta+3\beta$$
$$=8\alpha^2\beta+6\beta.$$

165. Κατὰ τὰς ἰδιότητας τῆς ἀφαιρέσεως ἔχομεν

$$8\alpha^3\beta^2-5\alpha^3\beta^2=(8-5)\alpha^3\beta^2=3\alpha^3\beta^2.$$

Ὁμοίως

$$8\alpha\beta-4\alpha\beta+9\alpha\beta-5\alpha\beta=(8\alpha\beta+9\alpha\beta)-(4\alpha\beta+5\alpha\beta)$$
$$=17\alpha\beta-9\alpha\beta=8\alpha\beta.$$

Ὁμοίως

$$(8\alpha-3\beta)+(10-5\alpha+4\gamma)=3\alpha-3\beta+10+4\gamma.$$

Σημ. Εἰς πάντα τὰ τοιαῦτα ζητήματα θεωροῦμεν μόνον δυνατὰς ἀφαιρέσεις.

166. Ἂν ὑποτεθῇ ὅτι ἀπὸ τῆς παραστάσεως Κ πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ παράστασις

$$\alpha-\beta+\gamma-\delta \qquad (1),$$

ἡ διαφορὰ

$$K-(\alpha-\beta+\gamma-\delta)$$

μετασχηματίζεται διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς·

$$K-[(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)]=K+(\beta+\delta)-(\alpha+\gamma)$$
$$=K+\beta+\delta-\alpha-\gamma=K-\alpha+\beta-\gamma+\delta$$

Δηλ. κατόπιν τῆς παραστάσεως Κ γράφομεν κατὰ σειρὰν τοὺς προσθετέους καὶ ἀφαιρετέους τῆς παραστάσεως (1) μετατρέποντες τοὺς μὲν προσθετέους εἰς ἀφαιρετέους, τοὺς δὲ ἀφαιρετέους εἰς προσθετέους.

Ἀσκήσεις.

Νὰ μετασχηματισθῶσιν ἐπὶ τὸ ἁπλούστερον αἱ παραστάσεις·

1) $(2\alpha+3\beta+5)+\frac{2}{3}\beta$

2) $(5\alpha\beta+3\beta+\frac{1}{2})-(3\alpha^2\beta-\frac{5}{7}\beta+1+\alpha\beta)$

3) $(\alpha-3\beta+\gamma)-(\alpha-5\beta)$.

167. Κατὰ τὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῶν δυνάμεων ἔχομεν

$$3\alpha^2\beta\times5\alpha\beta^3\gamma\times4\beta\gamma^2\delta=60\alpha^3\beta^5\gamma^3\delta.$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\frac{2}{3}\times9\alpha^2\beta\times4\gamma^5\delta\times\alpha^5\beta^5\delta\times10=240\alpha^7\beta^6\gamma^5\delta^2.$$

168. Ἡ παράστασις

$$(\alpha-\beta+\gamma-\delta)\kappa$$

μετασχηματίζεται διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς·

$$[(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)]\kappa=\alpha\kappa+\gamma\kappa-\beta\kappa-\delta\kappa=\alpha\kappa-\beta\kappa+\gamma\kappa-\delta\kappa.$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$(5\alpha^2\beta-\beta^2\gamma+1)2\alpha=10\alpha^3\beta-2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha.$$

Ἕπεται ἐντεῦθεν καὶ ἐκ τῆς § 144 ὁ ἑξῆς μετασχηματισμός·

$$(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)=(\alpha-\beta)\gamma-(\alpha-\beta)\delta=\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha\delta+\beta\delta.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$(3\alpha-5\beta)(\alpha-8\beta+3\alpha\beta)=3\alpha^2-29\alpha\beta+40\beta^2+9\alpha^2\beta-15\alpha\beta^2.$$

169. Ἔχομεν

$$24\alpha^5\beta^4 : 4\alpha^2\beta^3 = \frac{24}{4}\alpha^{5-2}\beta^{4-3} = 6\alpha^3\beta, \text{διότι}$$

$$6\alpha^3\beta \times 4\alpha^2\beta^3 = 24\alpha^5\beta^4.$$

Κατὰ τὰς ἰδιότητας τῆς διαιρέσεως ἔχομεν καὶ τὸν ἑπόμενον μετασχηματισμόν·

$$(8\alpha^5 + 3\alpha^4) : \alpha^2 = 8\alpha^3 + 3\alpha^2.$$

Ὁμοίως τὸν ἑξῆς·

$$(15\alpha^4\beta - 5\alpha^7\beta^3) : 5\alpha\beta = 3\alpha^3 - \alpha^6\beta^2.$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι πράξεις·

1) $\frac{2}{3}\alpha^2\beta^3 \times \frac{9}{8}\alpha\beta^4\gamma^5$

2) $(3\alpha - 5\beta^4)10\alpha^2\beta\gamma$

3) $(\alpha - \beta)^2$

4) $(\alpha^5 - 2\alpha^4\beta + 1)(5\alpha - 2\beta)$

5) $15\alpha^8\beta^6\gamma : 3\alpha\beta^5$

6) $(15\alpha^4\beta^5\gamma - \frac{3}{4}\alpha^5\beta^4) : 5\alpha\beta.$

Κλασματικαὶ παραστάσεις.

170. Τὸ πηλίκον δύο παραστάσεων σημειοῦμεν ἐν γένει διὰ κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην.

Ἑπόμενον εἶναι ὅτι αἱ κλασματικαὶ αὗται παραστάσεις ἔχουσι πάσας τὰς ἰδιότητας τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων καὶ αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἐκτελοῦνται κατὰ τοὺς αὐτοὺς κανόνας.

Ἐκθέτομεν ἤδη παραδείγματα μετασχηματισμῶν, ἐν οἷς ἀπαντῶσι τοιαῦται κλασματικαὶ παραστάσεις.

α΄) Ἁπλοποίησις.

$$\frac{16\alpha^4\beta^5\gamma}{12\alpha^5\beta\gamma^2}=\frac{4\beta^4}{3\alpha\gamma}.$$

β΄) Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

$$\frac{A}{4\alpha^2},\ \frac{B}{9\beta^2},\ \frac{\Gamma}{18\alpha\beta}$$

$36\alpha^2\beta^2$=κ. π. τῶν παρονομαστῶν.

Πηλίκα τοῦ κ. π. διὰ τῶν παρονομαστῶν εἶναι

$$9\beta^2,\ 4\alpha^2,\ 2\alpha\beta$$

καὶ τὰ ὁμώνυμα, εἰς ἃ τρέπονται,

$$\frac{9A\beta^2}{36\alpha^2\beta^2},\ \frac{4B\alpha^2}{36\alpha^2\beta^2},\ \frac{2\Gamma\alpha\beta}{36\alpha^2\beta^2}$$

γ΄) Πρόσθεσις.

$$\frac{A}{4\alpha^2}+\frac{B}{9\beta^2}+\frac{\Gamma}{18\alpha\beta}=$$

$$\frac{9A\beta^2+4B\alpha^2+2\Gamma\alpha\beta}{36\alpha^2\beta^2}.$$

δ΄) Ἀφαίρεσις.

$$\frac{A}{4\alpha^2}-\frac{\Gamma}{18\alpha\beta}=$$

$$\frac{9A\beta^2-2\Gamma\alpha\beta}{36\alpha^2\beta^2}$$

ε΄) Πολλαπλασιασμός.

$$\frac{\alpha^2}{5\beta^2}\times\frac{5\alpha}{3\alpha\beta}=\frac{\alpha^2}{3\beta^3}$$

ϛ΄) *Διαίρεσις.*

$$\frac{\alpha^2}{5(\alpha+\beta)} : \frac{3(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha+\beta} =$$

$$\frac{\alpha^2}{5(\alpha+\beta)} \times \frac{\alpha+\beta}{3(\alpha^2-\beta^2)} = \frac{\alpha^2}{15(\alpha^2-\beta^2)}$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ ἐκτελεσθῶσιν αἱ ἑπόμεναι πράξεις·

1) $\frac{\alpha}{\chi+\psi} + \frac{\beta}{\chi+\psi} + \frac{\gamma}{\chi^2+\psi^2}$

2) $(5\alpha^2\beta^3 - 3\alpha\beta^4) : \alpha^3\beta^5$

3) $\frac{1}{\chi+3} - \frac{1}{\chi+6}$

4) $\frac{3\alpha}{(\alpha^2-\beta^2)} \times \frac{\alpha+\beta}{5\alpha\beta}$

5) $\left(\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\gamma}{3\delta}\right) : \frac{3\alpha}{5\beta(\alpha-\beta)}$.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ὁρισμοί.

171. Τὰς ἰσότητας, αἵτινες περιέχουσι γράμματα, διακρίνομεν εἰς *ταυτότητας καὶ ἐξισώσεις.*

Ἡ ἰσότης $(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ ἐπαληθεύεται διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν ἐν αὐτῇ γραμμάτων, ἤτοι τὰ μέλη αὐτῆς γίνονται ἴσοι ἀριθμοί, **οἱουσδήποτε** ἀριθμοὺς καὶ ἂν θέσωμεν ἀντὶ τῶν γραμμάτων α, β, γ. Ἡ τοιαύτη ἰσότης καλεῖται *ταυτότης.*

Ἡ ἰσότης ὅμως $5\chi = 10$ δὲν ἐπαληθεύεται ἢ μόνον διὰ $\chi = 2$.

Ἡ ἰσότης $\chi + \psi = 10$ ἐπαληθεύεται μὲ ἀπείρους τιμὰς τῶν χ καὶ ψ, ἀλλ᾽ ὄχι τὰς τυχούσας.

Π. χ. ἐπαληθεύεται διὰ $\chi = 3$ καὶ $\psi = 7$, δὲν ἐπαληθεύεται δὲ διὰ $\chi = 7$ καὶ $\psi = 5$.

Αἱ τοιαῦται ἰσότητες λέγονται *ἐξισώσεις.*

Τὰ γράμματα τῶν ἐξισώσεων, διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν ὁποίων δὲν ἐπαληθεύουσιν αὗται, λέγονται αἱ *ἄγνωστοι* αὐτῶν.

Τιμαὶ τῶν ἀγνώστων λέγονται οἱ ἀριθμοί, οἵτινες ἀντικαθιστῶντες αὐτὰς ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν. Ἡ δὲ εὕρεσις αὐτῶν λέγεται *λύσις* τῆς ἐξισώσεως.

172. Δύο ἐξισώσεις λέγονται *ἰσοδύναμοι*, ὅταν ἔχωσι τὰς αὐτὰς λύσεις· π. χ.

$$5\chi=10 \text{ καὶ } 3\chi=6,$$

αἵτινες ἀμφότεραι ἔχουσι μόνον τὴν λύσιν $\chi=2$.

Ἰδιότητες ἐξισώσεων.

173. Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς φανερὸν ὅτι

α΄) Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἢ ἀφαιρέσωμεν, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον·

β΄) Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν ὁμοίως ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον.

Π. χ. αἱ ἐξισώσεις

$$5\chi=10 \quad \text{καὶ} \quad 15\chi=30$$
$$\text{ἢ} \quad 5\chi=10 \quad \text{καὶ} \quad 5\chi+2=10+2$$

εἶναι ἰσοδύναμοι.

Σημ. α΄) Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμόν, ἕπεται ὅτι ἡ β΄ πρότασις ἀληθεύει, καὶ ὅταν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Σημ. β΄) Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ 0, τρέπεται εἰς ταυτότητα καὶ ἑπομένως δὲν ἀληθεύει τότε ἡ β΄ πρότασις.

Πόρισμα α΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$2\chi+3=6\chi-5$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη 5 καὶ ἔχομεν

$$2\chi+3+5=6\chi$$

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὰ μέλη τῆς αὐτῆς ἐξισώσεως ἀφαιρέσωμεν 2χ, ἔχομεν

$$3=6\chi-5-2\chi. \quad \text{Ἄρα}$$

Δυνάμεθα ἕνα ὅρον νὰ μεταθέσωμεν εἰς τὸ ἕτερον μέλος, ἀφ' οὗ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ἤτοι τὸ $+$ εἰς $-$ καὶ τὸ $-$ εἰς $+$.

Πόρισμα β') Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{5\chi}{3}-\frac{3}{4}=\frac{\chi}{12}+2.$$

Τρέπομεν πάντας τοὺς ὅρους αὐτῆς εἰς ὁμώνυμα κλάσματα (ἐὰν δὲν εἶναι) καὶ ἔχομεν

$$\frac{20\chi}{12}-\frac{9}{12}=\frac{\chi}{12}+\frac{24}{12}$$

Πολλαπλασιάζομεν εἶτα ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ 12 καὶ ἔχομεν

$$20\chi-9=\chi+24,$$

ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον τῇ δοθείσῃ καὶ ἀπηλλαγμένην τῶν παρονομαστῶν.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha\chi=\beta.$$

175. Ἡ ἁπλουστέρα μορφὴ τῆς ἐξισώσεως μὲ μίαν ἄγνωστον εἶναι

$$\alpha\chi=\beta,$$

ἔνθα α καὶ β εἶναι δεδομένοι ἀριθμοί. Ἐὰν α δὲν εἶναι 0, διαιροῦμεν τὰ μέλη δι' α καὶ ἔχομεν

$$\chi=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Οὕτως ἐλύσαμεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην.

Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἔχομεν

$$0\chi=0,$$

ἤτοι ταυτότητα.

Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ β διάφορον τοῦ 0, π. χ. $\beta=5$, ἔχομεν

$$0\chi=5,$$

ἥτις δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ χ ἐπαληθεύεται.

Ἡ ἐξίσωσις ὅμως δὲν παρουσιάζεται πάντοτε ὑπὸ τὴν ἁπλῆν ταύτην μορφήν, ἀλλ' ἀνάγεται εἰς ταύτην διὰ διαφόρων πράξεων, αἵτινες δὲν μεταβάλλουσι τὴν λύσιν αὐτῆς.

Π. χ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{7\chi}{9}-\frac{3}{4}=\frac{5\chi}{27}+\frac{55}{12}.$$

Ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν τῶν παρονομαστῶν, ὡς ἐμάθομεν, καὶ ἔχομεν

$$84\chi-81=20\chi+495.$$

Χωρίζομεν διὰ μεταθέσεων τοὺς ὅρους τοὺς ἔχοντας τὴν ἄγνωστον ἀπὸ τοὺς λοιποὺς καὶ ἔχομεν

$$84\chi-20\chi=495+81$$

καὶ μετὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων

$$64\chi=576. \quad \text{Ὅθεν}$$

$$\chi=\frac{576}{64}=9.$$

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{5(\chi+1)}{3}=\chi+5.$$

Ἀπαλλάσσομεν αὐτὴν τῶν παρονομαστῶν καὶ ἔχομεν

$$5(\chi+1)=3\chi+15.$$

Ἐκτελοῦμεν τὸν σεσημειωμένον πολλαπλασιασμὸν καὶ ἔχομεν

$$5\chi+5=3\chi+15. \quad \text{Ὅθεν}$$

$$2\chi=10 \quad \text{καὶ} \quad \chi=5.$$

Ἀσκήσεις.

Νὰ λυθῶσιν αἱ ἐξισώσεις

1) $\frac{5\chi-2}{3}-6=\frac{4\chi-3}{5}$

2) $\frac{7\chi-5}{2}-\frac{8\chi-6}{3}=\frac{3\chi+7}{4}-2$

3) $46+\chi=(12+\chi)3$

4) $\frac{20+5\chi}{6}=\frac{16\frac{4}{10}+2\chi}{9}+2.$

Ἐφαρμογαὶ τῶν ἐξισώσεων.

176. *Πρόβλημα α΄)* Ζητεῖται ἀριθμός, οὗτινος τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τρίτον προστιθέμενα ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 10.

Λύσις. Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{2}$, τὸ δὲ τρίτον $\frac{\chi}{3}$· ἄρα ἔχομεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}=10,$$

ἐξ ἧς κατὰ τοὺς προηγουμένους κανόνας εὑρίσκομεν $\chi=12$.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἠδυνάμεθα νὰ λύσωμεν, ὡς γνωστόν, καὶ ἄνευ ἐξισώσεως, ὡς ἑξῆς·

Τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ ὁμοῦ ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ· ἄρα τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 10, τὸ $\frac{1}{6}$ αὐτοῦ $\frac{10}{5}=2$ καὶ τὰ $\frac{6}{6}$, ἤτοι ὅλος ὁ ζητούμενος, $2\times6=12$.

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὁ συλλογισμὸς τοῦ προβλήματος εὐκολύνεται, ὅταν παραστήσωμεν τὴν ἄγνωστον διὰ χ καὶ ζητήσωμεν νὰ παραστήσωμεν δι᾽ ἐξισώσεως τὴν σχέσιν, ἥτις ὑπάρχει μεταξὺ δεδομένων καὶ τῆς ἀγνώστου.

177. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἡ ἐξίσωσις εἶναι οὐδὲν

ἄλλο ἢ ἡ συμβολικὴ παράστασις διὰ τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων τῆς προτάσεως τοῦ προβλήματος.

Τοῦτο συμβαίνει εἰς πλεῖστα προβλήματα, οἷον εἶναι καὶ τὸ ἑπόμενον·

Πρόβλημα β') Πατήρ τις εἶναι 46 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 12. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἔσται διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ; Ἡ πρότασις τοῦ προβλήματος γραφομένη διὰ συμβόλων εἶναι

$$46+\chi=(12+\chi)\times 2$$

καὶ ἔχομεν οὕτω τὴν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος, ἐξ ἧς $\chi=22$ ἔτη.

Ἐὰν θεωρήσωμεν πάππον καὶ ἔγγονον ἔχοντας ἡλικίαν τὸν μὲν 86 ἐτῶν, τὸν δὲ 2 ἐτῶν καὶ ζητήσωμεν μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πάππου ἔσται διπλασία τῆς τοῦ ἐγγόνου, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$86+\chi=2(2+\chi), \qquad \text{ἐξ ἧς} \qquad \chi=82.$$

Ἀλλὰ μετὰ 82 ἔτη ὁ πάππος βεβαίως δὲν θὰ ὑπάρχῃ καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι *ἀδύνατον*. Ἐνταῦθα λοιπὸν ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου ὑπόκειται εἰς *περιορισμόν*, ὅτι δὲν πρέπει προστιθεμένη εἰς τὸ 86 νὰ ἀποτελῇ ἄθροισμα ὑπερβαῖνον τὸ ὅριον τῆς ἡλικίας τοῦ ἀνθρώπου.

Εἰς τὸ α' πρόβλημα ἡ τιμὴ τοῦ χ εἰς *οὐδένα ὑπόκειται περιορισμόν*.

178. Εἰς ἄλλα προβλήματα δὲν δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν δι' ἁπλῆς συμβολικῆς παραστάσεως τῆς προτάσεως τοῦ προβλήματος· π. χ.

Πρόβλημα γ') Ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ἐν ὅλῳ 20 ἄτομα, ἐδαπάνησαν δι' ἓν κοινὸν γεῦμα 70 δρ. καὶ τῶν μὲν ἀνδρῶν ἕκαστος ἐδαπάνησε 5 δρ., τῶν δὲ γυναικῶν ἑκάστη 3 δρ. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

Λύσις. Αἱ ἄγνωστοι φαίνονται δύο, ἀλλὰ κυρίως εἶναι εἷς ἐκ τῶν δύο, διότι ὁ ἄλλος εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ 20. Θεωρήσωμεν λοιπὸν ἄγνωστον τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀνδρῶν χ· τότε ὁ τῶν γυναικῶν εἶναι $20-\chi$.

Ἕκαστος ἀνὴρ ἐδαπάνησε 5 δρ., ἐπομένως οἱ χ ἄνδρες 5χ δρ.· ἑκάστη γυνὴ ἐδαπάνησε 3 δρ., ἐπομένως αἱ $20-\chi$ γυναῖκες $(20-\chi)\,3$ δρ.· ἐπειδὴ δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δαπανῶν εἶναι 70 δρ., ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5\chi+(20-\chi)\,3=70, \quad \text{ἐξ ἧς} \quad \chi=5,$$

ἤτοι οἱ ἄνδρες ἦσαν 5 καὶ αἱ γυναῖκες $20-5=15$.

Ἐνταῦθα, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν ἐξίσωσιν,

Ἐσημειώσαμεν τὰς πράξεις, τὰς ὁποίας ἠθέλομεν ἐκτελέσει, ἐὰν γνωρίζοντες τὴν τιμὴν τῆς ἀγνώστου ἠθέλομεν νὰ δοκιμάσωμεν, ἂν ἱκανοποιεῖ τὴν πρότασιν τοῦ προβλήματος.

Ἐὰν ἡ ὅλη δαπάνη τοῦ γεύματος ἦτο 65 δρ., θὰ εὑρίσκομεν $\chi=2\frac{1}{2}$, ἤτοι τὸ πρόβλημα θὰ ἦτο ἀδύνατον. Ἐνταῦθα λοιπὸν ἡ τιμὴ τῆς ἀγνώστου ὑπόκειται εἰς τὸν περιορισμὸν ὅτι πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

179. Ἐν γένει πρὸς σχηματισμὸν τῆς ἐξισώσεως προσπαθοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἐκ τῶν δεδομένων καὶ τῆς ἀγνώστου δύο παραστάσεις, αἵτινες νὰ παριστῶσιν ἴσα ποσά.

Πρόβλημα δ΄) Εἷς ἀνὴρ καὶ ἡ γυνή του χρειάζονται 12 ἡμέρας, διὰ νὰ πίωσιν ἓν μικρὸν βαρέλιον οἴνου. Ὅταν λείπῃ ὁ ἀνήρ, ἡ γυνὴ μόνη χρειάζεται 30 ἡμέρας, διὰ νὰ κενώσῃ τὸ βαρέλιον. Πόσας ἡμέρας θὰ ἐχρειάζετο μόνος ὁ ἀνήρ;

Λύσις. Ἴσα ποσὰ εἶναι ἀφ᾽ ἑνὸς μὲν ἡ μονὰς 1 παριστῶσα ὅλον τὸν οἶνον τοῦ βαρελίου, ἀφ᾽ ἑτέρου δὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μερῶν τοῦ οἴνου, τὰ ὁποῖα πίνουσιν εἰς 12 ἡμέρας ὁ ἀνὴρ καὶ ἡ γυνή.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μόνος ὁ ἀνὴρ κενώνει τὸ βαρέλιον εἰς χ

ἡμέρας· εἰς μίαν ἡμέραν θὰ κενώσῃ τὸ $\frac{1}{\chi}$ καὶ εἰς 12 ἡμέρας τὰ $\frac{12}{\chi}$· ὁμοίως ἡ γυνὴ εἰς 12 ἡμέρας κενώνει τὰ $\frac{12}{30}$. Ἄρα

$$\frac{12}{\chi}+\frac{12}{30}=1. \quad \text{Ὅθεν} \quad \chi=20.$$

Ἀσκήσεις.

1) Ἔν τινι αὐλῇ ὑπάρχουσιν ὄρνιθες καὶ κόνικλοι, ἐν ὅλῳ 14 κεφαλαὶ καὶ 38 πόδες. Πόσαι εἶναι αἱ ὄρνιθες καὶ πόσοι οἱ κόνικλοι;

2) Ἔν τινι τάξει σχολείου τοποθετοῦμεν 8 μαθητὰς εἰς ἕκαστον θρανίον, ἀλλὰ 4 μαθηταὶ μένουσι χωρὶς θέσιν· τοποθετοῦμεν ἔπειτα 9 μαθητὰς εἰς ἕκαστον θρανίον καὶ μένουσι δύο θέσεις κεναὶ εἰς τὸ τελευταῖον θρανίον. Πόσοι εἶναι οἱ μαθηταὶ καὶ πόσα τὰ θρανία;

3) Ἡ πρόσοψις οἰκίας παρουσιάζει τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν παραθύρων εἰς τὰ διάφορα πατώματα. Εἰς τὸ α', τὸ β' καὶ τὸ γ' ἕκαστον παράθυρον ἔχει 8 ὑαλοπίνακας, εἰς τὸ δ' τὸ τελευταῖον μόνον 6, ὅλοι δὲ οἱ ὑαλοπίνακες εἶναι 180. Πόσα παράθυρα ἔχει ἕκαστον πάτωμα;

4) Αἱ 4 τάξεις γυμνασίου ἔχουσι 533 μαθητάς· καὶ ἡ μὲν α' μαθητὰς διπλασίους ἢ ἡ β', ἡ δὲ β' τριπλασίους ἢ ἡ γ' καὶ ἡ γ' τετραπλασίους ἢ ἡ δ'. Πόσους μαθητὰς ἔχει ἑκάστη τάξις;

5) Ἔχομεν 55 ὀκ. οἴνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 40 λεπτά. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ῥίψωμεν εἰς αὐτόν, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος νὰ ἀξίζῃ μόνον 25 λεπτά;

6) Ἁλιεὺς ἤγρευσεν ἰχθύν, τοῦ ὁποίου ἡ οὐρὰ ἐζύγιζε 2 ὀκ., ἡ κεφαλὴ εἶχε τόσον βάρος, ὅσον ἡ οὐρὰ καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ κορμοῦ, ὁ δὲ κορμὸς τόσον βάρος, ὅσον εἶχον ὁμοῦ ἡ κεφαλὴ καὶ ἡ οὐρά. Πόσον τὸ βάρος τοῦ ἰχθύος;

7) Παιδίον εἰσέρχεται εἰς ἐμπορικὸν κατάστημα φέρον μονό-

λεπτα κερμάτια καὶ ἀγοράζει 3 μικρὰ ἀντικείμενα. Πληρώνει δὲ διὰ μὲν τὸ α′ τὸ ἥμισυ τῶν κερματίων καὶ ἓν περιπλέον· διὰ τὸ β′ τὸ ἥμισυ τῶν ὑπολειπομένων καὶ ἓν περιπλέον· ὁμοίως καὶ διὰ τὸ γ′ τὸ ἥμισυ τοῦ νέου ὑπολοίπου καὶ ἓν λεπτὸν περιπλέον· τῷ ἔμειναν δὲ καὶ 3 μονόλεπτα. Πόσα εἶχεν;

8) Ἔμπορος ἐπώλησεν εἰς 2 ἡμέρας 600 πορτοκάλλια, εἰσέπραξε δὲ 20 δρ. τὴν α′ ἡμέραν καὶ 20 δρ. τὴν β′, ἀλλὰ τὴν β′ ἡμέραν ἐπώλησε τὰ πορτοκάλλια ἕκαστον εἰς τὸ ἥμισυ τῆς τιμῆς ἢ τὴν α′ ἡμέραν. Ζητεῖται πόσα πορτοκάλλια ἐπώλησε τὴν α′ ἡμέραν καὶ εἰς ποίαν τιμήν· ὁμοίως τὴν β′ ἡμέραν.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.

ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ὁρισμοί.

180. Αἱ μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, ... λέγονται κλασματικαὶ *δεκαδικαὶ* μονάδες. Ἑκάστη τούτων εἶναι δεκάκις μείζων τῆς ἀμέσως κατωτέρας.

Τὸ $\frac{1}{10}$ λέγεται κλασματικὴ δεκαδικὴ μονὰς *πρώτης τάξεως*, τὸ $\frac{1}{100}$ *δευτέρας* τάξεως κτλ.

181. Θεωρήσωμεν τὴν ἀπέραντον σειρὰν τῶν μονάδων

$$\cdots\cdots\cdots 1000,\ 100,\ 10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ \cdots\cdots\cdots$$

Πάσας ταύτας τὰς μονάδας ἀκεραίας ἢ κλασματικὰς καλοῦμεν *δεκαδικάς*.

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκείμενος ἐκ μονάδων δεκαδικῶν· π. χ.

$$5+\frac{3}{10}+\frac{4}{100} \quad \text{ἢ} \quad \frac{8}{10}+\frac{5}{1000} \quad \text{ἢ} \quad 65$$

Σημ. Εἰς τὸν ὁρισμὸν ἄρα περιλαμβάνονται καὶ οἱ ἀκέραιοι.

Γραφὴ καὶ ἀπαγγελία.

182. Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν δεκαδικῶν μονάδων εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀμέσως κατωτέρας, διὰ τοῦτο γράφομεν τοὺς δεκαδικοὺς ὅπως καὶ τοὺς ἀκεραίους, μὲ *μόνην* τὴν διαφορὰν ὅτι, ἐπειδὴ αἱ κατώταται μονάδες δὲν εἶναι πάντοτε τῆς αὐτῆς τάξεως, εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν, ἀπὸ ποῖον ψηφίον ἄρχονται αἱ

κλασματικαὶ δεκαδικαὶ μονάδες. Πρὸς τοῦτο θέτομεν κόμμα μετὰ τὸ τέλος τῶν ἀκεραίων μονάδων, ὁπότε μετὰ τὸ κόμμα τὴν α′ θέσιν κατέχει τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων, τὴν β′ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοστῶν κ.τ.λ. Οὕτως ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων 25 ἀκεραίας μονάδας, 3 δέκατα, 8 ἑκατοστὰ καὶ 4 χιλιοστὰ γράφεται

25,384

Ἐὰν δὲ πρὸ τῶν μονάδων τῆς κατωτάτης τάξεως ἐλλείπωσι μονάδες τάξεώς τινος, θέτομεν εἰς τὴν θέσιν αὐτῶν 0, διὰ νὰ τηρηθῇ ἡ ἀξία τῶν ψηφίων· π. χ. ὁ ἀριθμὸς ὁ περιέχων 3 ἀκεραίας μονάδας καὶ 6 χιλιοστὰ γράφεται 3,006. Ὁμοίως ὁ περιέχων 3 δέκατα καὶ 6 χιλιοστὰ γράφεται 0,306.

183. Διὰ νὰ ἀπαγγείλωμεν γεγραμμένον δεκαδικόν, δυνάμεθα νὰ ἀπαγγείλωμεν πρῶτον τὸ ἀκέραιον αὐτοῦ μέρος καὶ εἶτα ἕκαστον δεκαδικὸν ψηφίον μὲ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων, τὰς ὁποίας παριστᾷ· π. χ. ὁ ἀριθμὸς 3,14 ἀπαγγέλλεται

Τρεῖς ἀκέραιαι μονάδες ἢ τρία ἀκέραιος, ἓν δέκατον καὶ τέσσαρα ἑκατοστά.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι 1 δέκατον=10 ἑκατοστά. Ὥστε ὁ προηγούμενος ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀπαγγελθῇ καὶ ὡς ἑξῆς·

3 ἀκέραιος καὶ 14 ἑκατοστά.

Προσέτι καὶ ὡς ἑξῆς·

314 ἑκατοστά.

Διότι 3=300 ἑκατοστά. Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἔχῃ πολλὰ δεκαδικὰ ψηφία, διαιροῦμεν τὸ δεκαδικὸν αὐτοῦ μέρος εἰς τμήματα τριψήφια, ἀπαγγέλλοντες ἕκαστον τμῆμα χωριστά· π. χ. ὁ ἀριθμὸς

3,141′592′65

ἀπαγγέλλεται

3 ἀκέραιος, 141 χιλιοστά, 529 ἑκατομμυριοστὰ καὶ 65 ἑκατοντάκις ἑκατομμυριοστά.

Σημ. Προτιμῶμεν τὰ τριψήφια τμήματα, διὰ νὰ εὑρίσκωμεν εὐκολώτερον τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων ἑκάστου τμήματος.

184. Οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται καὶ ὡς κλάσματα.

Τῳόντι, ἔστω ὁ δεκαδικὸς 3,58· οὗτος, ὡς εἴδομεν, ἰσοδυναμεῖ πρὸς 358 ἑκατοστά, ἤτοι $\frac{358}{100}$.

Ἐν γένει

Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἰσοδυναμεῖ πρὸς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν ἀκέραιον, ὅστις προκύπτει ἀπαλειφομένου τοῦ κόμματος, καὶ παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ἀπὸ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ δεκαδικὰ αὐτοῦ ψηφία.

Διὰ τοῦτο οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται καὶ *δεκαδικὰ κλάσματα*· τὰ δὲ συνήθη κλάσματα πρὸς διάκρισιν λέγονται *κοινά.*

Ἰδιότητες.

185. α΄) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 5,42. Θέτομεν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐτοῦ ὁσαδήποτε μηδενικά, π. χ. τρία, καὶ ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 5,42000 ἴσον πρὸς τὸν δοθέντα, διότι τὰ σημαντικὰ αὐτοῦ ψηφία ἔμειναν τὰ αὐτὰ καὶ ἡ ἀξία ἑκάστου ὡσαύτως ἡ αὐτή. Ἄρα *Δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν μεταβάλλεται, ὁσαδήποτε μηδενικὰ καὶ ἂν θέσωμεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.*

β΄) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 3,5841. Ἐὰν μεταθέσωμεν τὸ κόμμα μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά, ἔχομεν 35,841· ἀλλὰ τότε προφανῶς ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου δεκαπλασιάζεται, ἐπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμός· ὁμοίως, ἐὰν μεταθέσωμεν τὸ κόμμα δύο θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου ἑκατονταπλασιάζεται, ἐπομένως καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς γίνεται 100άκις μείζων.

Ἐν γένει

Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10,100 κ.τ.λ., ἐὰν μεταθέσωμεν πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ κόμμα τόσας θέσεις, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ πολλαπλασιαστής.

Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἱκανὰ δεκαδικὰ ψηφία διὰ τὴν μετάθεσιν τοῦ κόμματος, θέτομεν μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ· π. χ.

$$5,36 \times 1000 = 5360,0 = 5360.$$

γ΄) Ἕπεται ἐκ τῶν προηγουμένων ὅτι

Ἐὰν τὸ κόμμα μετατεθῇ μίαν ἢ δύο κ.τ.λ. θέσεις πρὸς τὰ ἀριστερά, ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 10,100 κ.τ.λ.

π.χ. 625,8 : 10=62,58.

Καὶ ἐνταῦθα ἐν ἀνάγκῃ τίθενται μηδενικὰ εἰς τὴν ἀρχήν· π.χ. 3,58 : 1000=0,00358.

Ἀσκήσεις.

1) Τὸ χρυσοῦν φράγκον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1,085 δραχ. χαρτίνας· πρὸς πόσας δρ. ἰσοδυναμοῦσι 10 ἢ 100 ἢ 1000 χρ. φράγκα;

2) Ἀγρὸς 36,25 βασιλικῶν στρεμμάτων ἐμοιράσθη εἰς 10 ἀνθρώπους· πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;

Σημ. Ἓν βασιλ. στρέμμα=1000 τετραγ. μέτρ.

3) 1000 χρ. φρ. ἠγοράσθησαν ἀντὶ 1085,65 δραχ.· πόσον ἠγοράσθη τὸ ἕν;

4) Ἓν χιλιόγραμμον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 312,5 δράμια. Ὁ δὲ τόννος περιέχει 1000 χιλ. Νὰ τραπῇ ὁ τόννος εἰς δράμια.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

186. Ἡ πρόσθεσις ἐκτελεῖται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, μὲ μόνην τὴν διαφοράν, ὅτι εἰς τὸ ἄθροισμα τίθεται κόμμα εἰς τὴν θέσιν, ἔνθα ἀντιστοιχεῖ τὸ κόμμα τῶν προσθετέων· π. χ.

$$\begin{array}{r l} 35,66 & \\ 8,687 & \text{Προσθετέοι} \\ 0,9 & \\ \hline 45,247 & \text{Ἄθροισμα} \end{array}$$

Ὁ κανὼν ἰσχύει προφανῶς, καὶ ὅταν τινὲς τῶν προσθετέων εἶναι ἀκέραιοι.

Ἀσκήσεις.

1) 3 ἀγγεῖα ἔχουσι χωρητικότητα τὸ α′ 2,35 λίτρας, τὸ β′ 1,75 λίτρ. καὶ τὸ γ′ 4,125 λίτρ. Ἑκάστη δὲ λίτρα χωρεῖ 1 χιλιόγρ. ὕδατος. Πόσα χιλιόγρ. ὕδατος χωροῦσι καὶ τὰ 3 ὁμοῦ;

2) Ἔμπορος εἰσέπραξε τὰ ἑξῆς ποσά· α′ 356,75 δρ., β′ 18,65 δρ., γ′ 1085,45 δρ.· πόσα εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ καὶ πόσον τὸ δέκατον τῶν εἰσπραχθέντων χρημάτων;

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

187. Καὶ ἡ ἀφαίρεσις ἐκτελεῖται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, τιθεμένου ἐν τῇ διαφορᾷ τοῦ κόμματος ἐν ᾗ θέσει ἀντιστοιχεῖ τὸ τοῦ μειωτέου καὶ ἀφαιρετέου· π. χ.

8,45	μετωτέος
5,2537	ἀφαιρετέος
3,1963	διαφορά.

Ὁμοίως

8.	μειωτέος
5,127	ἀφαιρετέος
2,873	διαφορά.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐξ ὑφάσματος ἔχοντος μῆκος 65,40 μέτρ. ἐκόπησαν α′ 3,60 μ., β′ 12,65 μ., γ′ 22,8 μ. Πόσα μ. ὑπολείπονται;

2) Ἐν ἀγγείῳ χωρητικότητος 8,6 λίτρ. περιέχονται 5,25 χιλιόγρ. ὕδατος· πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ῥίψωμεν εἰς αὐτό, ὅπως πληρωθῇ ἐντελῶς;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

188. Ζητεῖται τὸ γινόμενον

$$5,86 \times 3,7$$

Τρέποντες τοὺς παράγοντας εἰς κοινὰ κλάσματα ἔχομεν

$$\frac{586}{100} \times \frac{37}{10} = \frac{21682}{1000} = 21,682$$

Ὁμοίως

$$5,86 \times 37 = \frac{586}{100} \times 37 = \frac{21682}{100} = 216,82$$

Ἄρα

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν, ὧν ὁ εἷς ἢ καὶ ἀμφότεροι εἶναι δεκαδικοί, πολλαπλασιάζομεν αὐτοὺς ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι, εἰς δὲ τὸ γινόμενον χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουσιν ὁμοῦ οἱ παράγοντες.

189. Προφανῶς ὁ προηγούμενος κανὼν ἐφαρμόζεται καὶ πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις.

1) Λόγῳ συντάξεως κρατοῦνται ἐκ τοῦ μισθοῦ τῶν ὑπαλλήλων τὰ 0,09. Ἐὰν ὁ ὑπάλληλος λαμβάνῃ κατὰ μῆνα 325 δρ., πόση εἶναι ἡ μηνιαία κράτησις;

2) Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχοντος βάσιν 85,4 μ. καὶ ὕψος 12,25 μ.;

3) Τί γίνεται τὸ γινόμενον

$$2,3 \times 0,65 \times 3,141,$$

ὅταν εἰς πάντας τοὺς παράγοντας μεταθέσωμεν τὸ κόμμα μίαν θέσιν πρὸς τὰ δεξιά;

4) Δύο πόλεις ἀπέχουσιν ἀπ' ἀλλήλων σιδηροδρομικῶς 450,35 χιλμ. Ἐκ τῆς α' ἀναχωρεῖ ἁμαξοστοιχία μὲ ταχύτητα 25,5 χιλμ. τὴν ὥραν, ταυτοχρόνως δὲ ἐκ τῆς β' ἑτέρα μὲ ταχύτητα 29,35

χμ. τὴν ὥραν. Πόσον θὰ ἀπέχωσιν ἀπ' ἀλλήλων μετὰ 3 ὥρας;

5) Τὸ βάρος σώματος εἰς χιλιόγραμμα παρισταται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$B = \Lambda \times \delta,$$

ἔνθα B δηλοῖ τὸ βάρος, Λ τὸν ὄγκον εἰς λίτρας, καὶ δ τὸ εἰδικὸν βάρος.

6) Πόσα χιλιόγρ. ζυγίζουν 3,5 κυβ. μέτρ. μολύβδου ἔχοντος εἰδικὸν βάρος 11, γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1 κυβ. μ. =1000 λίτρ.;

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

190. Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος ἢ δεκαδικός.

Α΄ περίπτωσις.

Ζητεῖται τὸ πηλίκον

$$5{,}87 : 4.$$

Σκεπτόμενοι ἐντελῶς ὁμοίως, ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους, εὑρίσκομεν τὸ πηλίκον ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{l|l} 5{,}87 & 4 \\ \cline{2-2} 1\,8 & 1{,}46 \\ \;\;27 & \\ \;\;\;3 & \end{array}$$

Ἤτοι

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δεκαδικὸν δι' ἀκεραίου, ἐκτελοῦμεν τὴν πρᾶξιν ὡς ἐὰν ἦτο καὶ ὁ διαιρετέος ἀκέραιος, φροντίζοντες εἰς τὸ πηλίκον νὰ θέσωμεν τὸ κόμμα μετὰ τὴν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου.

Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα τὸ πηλίκον εἶναι 1,46 καὶ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἑκατοστοῦ, ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν τὴν διαίρεσιν τρέποντες τὸ ὑπόλοιπον 3 ἑκατοστὰ εἰς χιλιοστά· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ 3 νὰ θέσωμεν 0 καὶ ἔχομεν 30 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα διαιροῦμεν διὰ 4 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 7 χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 2 χιλιοστά, τὰ ὁποῖα τρέπομεν εἰς 20 δεκάκις χιλιοστά, ταῦτα δὲ διαιροῦντες διὰ 4 εὑρίσκομεν πηλίκον 5 δεκ. χιλιοστὰ καὶ ὑπόλοιπον 0. Ἡ ὅλη πρᾶξις διατάσσεται οὕτω·

```
5,87 | 4
1 8    1,4675
  27
   30
    20
     0
```

Συμβαίνει ὅμως πολλάκις, ὅσον καὶ ἂν προχωρήσωμεν εἰς τὴν διαίρεσιν, οὐδέποτε νὰ εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον 0· π. χ. εἰς τὴν ἑπομένην διαίρεσιν·

```
5,86 | 9
  46   0,6511.....
   10
    10
     1
     .
     .
     .
     .
     .
```

Δυνάμεθα ὅμως προχωροῦντες εἰς τὴν διαίρεσιν νὰ ἔχωμεν τὸ πηλίκον ***κατὰ προσέγγισιν*** ὅσον θέλομεν μεγάλην, δηλ. μὲ λάθος ὅσον θέλομεν μικρόν· π. χ. ἐὰν σταματήσωμεν εἰς τὰ χιλιοστά, θὰ ἔχωμεν πηλίκον 0,651· ὑπολείπεται δὲ πρὸς συμπλήρωσιν τοῦ πηλίκου $\frac{1}{9}$ τοῦ χιλιοστοῦ, ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ χιλιοστοῦ ἀναγκαίως, διότι τὸ 1 ὡς ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου 9. Ἑπομένως τὸ λάθος εἶναι μικρότερον τοῦ χιλιοστοῦ· λέγομεν δὲ τότε ὅτι ἔχομεν τὸ πηλίκον 0,651 ***κατὰ προσέγγισιν χιλιοστοῦ.***

Ὁμοίως, ἐὰν σταματήσωμεν εἰς τὰ δεκάκις χιλιοστά, τὸ λάθος θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ δεκάκις χιλιοστοῦ καὶ ἔχομεν τότε τὸ πηλίκον 0,6511 κατὰ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ ἐξακολούθησις τῆς διαιρέσεως, καθ' ὃν τρόπον εἴπομεν, δύναται νὰ γίνῃ καὶ εἰς τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου δι' ἀκεραίου· π.χ.

$$\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \cline{2-2} 20 & 3,4 \\ 0 & \end{array}$$

Ὁμοίως

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 3,33\ldots\ldots \\ 10 & \\ 1 & \\ \vdots & \end{array}$$

Β′ περίπτωσις.

Ζητεῖται τὸ πηλίκον

$$5,86 : 2,3$$

Πολλαπλασιάζομεν διαιρετέον καὶ διαιρέτην (§ 151) ἐπὶ 10 καὶ ἔχομεν 58,6 : 23· οὕτω δὲ ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην. Γενικῶς

Ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός, ἀπαλείφομεν τὸ κόμμα αὐτοῦ, εἰς δὲ τὸν διαιρετέον μεταθέτομεν τὸ κόμμα τόσας θέσεις πρὸς τὰ δεξιά, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης καὶ ἐπανερχόμεθα οὕτως εἰς τὴν α′ περίπτωσιν.

Π. χ. $5,362 : 0,24 = 536,2 : 24$
$5,3 : 4,225 = 5300 : 4225$
$14 : 2,56 = 1400 : 256$

Σημ. Ἐπειδὴ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ τρέπονται εἰς κοινὰ κλάσματα, ἕπεται ὅτι πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων, περὶ ὧν εἴπομεν ἐν τοῖς ἀκεραίοις καὶ κλάσμασιν, ἀληθεύουσι καὶ ἐνταῦθα.

Ἀσκήσεις.

1) 17 πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται δρ. 27,35. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

2) Τὸ μέτρον ὑφάσματος τιμᾶται δρ. 1,35. Πόσα μ. θὰ ἀγοράσωμεν μὲ δρ. 25,60;

3) Περιφέρεια κύκλου ἔχει μῆκος 28 μέτρ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς;

4) Τὸ ἐμβαδὸν σανίδος εἶναι 0,6 τετρ. μέτρ.· πόσας τοιαύτας σανίδας διὰ τὴν κατασκευὴν πίνακος μήκους 2 μέτρων καὶ πλάτους 0,9 μ. χρειαζόμεθα;

5) Τί γίνεται τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου, ὅταν ἑκατέρα τῶν βάσεων αὐτοῦ διαιρεθῇ διὰ 2, 5;

Τροπὴ κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν.

191. Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{19}{2}$· τοῦτο σημαίνει (§ 113) τὸ πηλίκον 19 : 2. Ἐκτελοῦμεν τὴν διαίρεσιν ταύτην

$$\begin{array}{r|l} 19 & 2 \\ \cline{2-2} 10 & 9,5 \\ 0 & \end{array}$$

καὶ εὑρίσκομεν $\frac{19}{2} = 9,5$· οὕτω δὲ τὸ κοινὸν τοῦτο κλάσμα ἐτράπη εἰς δεκαδικόν.

Ἐὰν ἐν τῇ πράξει τῆς διαιρέσεως δὲν εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον 0, δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὸ ἰσοδύναμον δεκαδικὸν *κατὰ προσέγγισιν* ὅσον θέλομεν μεγάλην.

Οὕτως ἔχομεν

$$\frac{10}{7} = 1,42857$$

κατὰ προσέγγισιν δεκάκις χιλιοστοῦ.

Ὁμοίως

$$\frac{10}{3}=3,333\cdots\cdots$$

Ἀσκήσεις.

1) $\frac{15}{2}$ δρ. νὰ ἀναλυθῇ εἰς δραχμὰς καὶ λεπτά.

2) $\frac{9}{8}$ μετρ. νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἀκέραια μέτρ. καὶ δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις τοῦ μέτρου.

Παρατ. Βλέπομεν ὅτι ἄλλα μὲν κοινὰ κλάσματα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικά, ἄλλα δὲ περιέχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία. Θὰ ἐξετάσωμεν ἤδη, πότε συμβαίνει τὸ ἓν ἢ τὸ ἄλλο.

Θεώρημα.

192. Ἔστω κοινὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς περιέχει μόνον τοὺς πρώτους παράγοντας 2 καὶ 5 μὲ ἴσους ἐκθέτας, τὸ $\frac{75}{2^2\times5^2}$. Ἔχομεν

$$\frac{75}{2^2\times5^2}=\frac{75}{(2\times5)^2}=\frac{75}{10^2}=\frac{75}{100}=0,75.$$

Ἐν γένει τῶν τοιούτων κλασμάτων ὁ παρονομαστὴς εἶναι **10** ἢ 100 ἢ 1000······ καὶ βλέπομεν ὅτι ταῦτα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικά, ἐὰν λάβωμεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωρίσωμεν ἐν αὐτῷ τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ παρονομαστής.

Ἔστω ἤδη τὸ κλάσμα $\frac{123}{2\times5^2}$, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς περιέχει μόνον τοὺς πρώτους παράγοντας 2 καὶ 5, ἀλλὰ μὲ διαφόρους ἐκθέτας· διὰ νὰ καταστήσωμεν ἴσους τοὺς ἐκθέτας, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ 2 καὶ ἔχομεν

$$\frac{123\times2}{2^2\times5^2}=\frac{246}{100}=2,46.$$

Ὁμοίως

$$\frac{3}{5^2}=\frac{3\times2^2}{5^2\times2^2}=\frac{12}{100}=0{,}12.$$

Θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{14}{2^2\times5^2\times7}$, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς περιέχει τὸν πρῶτον παράγοντα 7 διάφορον τοῦ 2 καὶ 5 καὶ τοῦτο τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, διότι ὁ 7 ἐξαφανίζεται δι' ἁπλοποιήσεως· τῳόντι $\frac{14}{2^2\times5^2\times7}=\frac{2}{2^2\times5^2}=0{,}02.$

Ἔστω τέλος τὸ κλάσμα $\frac{3}{5\times7}$, οὗτινος ὁ παρονομαστὴς περιέχει τὸν πρῶτον παράγοντα 7 μὴ ἀπαλειφόμενον δι' ἁπλοποιήσεως καὶ ὅστις ἐπομένως θὰ ὑπάρχῃ, καὶ ὅταν τὸ κλάσμα γίνῃ ἀνάγωγον, ἐὰν δὲν εἶναι τοιοῦτον. Ἂς ὑποτεθῇ λοιπὸν ὅτι τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{5\times7}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· θὰ ἔχωμεν

$$\frac{3}{5\times7}=\frac{A}{10^\nu}$$

ὁπότε (§ 94 καὶ 116) ἔπρεπεν ὁ 5×7 νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 10^ν, ὅπερ ἄτοπον (§ 94), διότι 10^ν δὲν ἔχει ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τοῦ 2 καὶ 5. Ἄρα

Κλάσμα κοινὸν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ δὲν ἔχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τοῦ 2 καὶ 5· καὶ τότε μόνον, ἐὰν τὸ κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον.

Ἀσκήσεις.

1) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{5}{8}$, $\frac{55}{88}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{25}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{24}{75}$, $\frac{1}{3}$ ποῖα τρέπονται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικά;

2) Ἐκ τῶν ἀριθμῶν 0,62 καὶ $\frac{5}{8}$ τίς ὁ μεγαλύτερος;

ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ ΔΕΚΑΔΙΚΑ

193. *Θεώρημα.* Ἔστω τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{4}{7}$, ὅπερ δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν· διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{l|l} 40 & 7 \\ \cline{2-2} \;50 & 0{,}5714285\cdots\cdots \\ \;\;10 & \\ \;\;\;30 & \\ \;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;60 & \\ \;\;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;5\cdots\cdots & \end{array}$$

Εἰς τὸ πηλίκον μετὰ τὸ ψηφίον 8 ἐπανευρίσκομεν τὸ 5, ἄρα θὰ ἐπαναληφθῶσι καὶ πάντα τὰ μετὰ τὸ 5 εὑρεθέντα προηγουμένως ψηφία, οὕτω δὲ ἡ σειρὰ 571428 ὡς εἶναι θὰ ἐπαναλαμβάνηται ἐπ' ἄπειρον. Τὸ τοιοῦτο δὲ θὰ συμβαίνῃ, ὁσάκις τὸ κλάσμα δὲν τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν. Διότι, ὡς βλέπομεν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, πᾶν ὑπόλοιπον εἶναι διάφορον τοῦ 0 καὶ μικρότερον τοῦ διαιρέτου 7· ἐπομένως ὡς ὑπόλοιπα δύνανται νὰ εἶναι μόνον οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4, 5, 6· ὥστε μετὰ ἓξ *τὸ πολὺ* διαιρέσεις *ἀναγκαίως* πρέπει νὰ ἐπανευρεθῇ ἓν τῶν προηγουμένων ὑπολοίπων, ὁπότε ἐπαναρχίζομεν τὰς ἤδη γενομένας διαιρέσεις ἀπὸ τοῦ ἐπαναληφθέντος ὑπολοίπου. Ἄρα

Κλάσμα κοινὸν τρεπόμενον εἰς δεκαδικὸν ἢ παρέχει ὡρισμένα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία ἢ ἄπειρα ἐπαναλαμβανόμενα ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Ὁρισμοί.

194. Τὸ δεκαδικὸν κλάσμα, οὗτινος τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι ἄπειρα ἐπαναλαμβανόμενα ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς τὰ αὐτὰ καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, λέγεται *περιοδικόν*· τὸ δὲ σύνολον τῶν

οὕτως ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων λέγεται *περίοδος*· π.χ. εἰς τὸ 3,14565656..... ἡ περίοδος εἶναι 56.

Ὅταν ἡ περίοδος ἄρχηται ἀμέσως μετὰ τὸ κόμμα, ἔχομεν τὸ **ἁπλοῦν** λεγόμενον περιοδικόν· π. χ.

$$5,626262\cdots\cdot$$

Ὅταν δὲ ἡ περίοδος ἄρχηται οὐχὶ ἀμέσως μετὰ τὸ κόμμα, ἔχομεν τὸ *μικτόν*· π. χ.

$$5,62474747\cdots$$

Τροπὴ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ εἰς κλάσμα κοινόν.

195. Ἔστω τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν 0,2525....., οὗτινος τὸ ἀκέραιον μέρος εἶναι 0.

Θέτομεν $\alpha = 0,252525$· ὅθεν

$$100\alpha = 25,2525.$$

Ἀφαιροῦντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας ἔχομεν

$$99\alpha = 25 - 0,000025.$$

Ἐὰν ὁ α ἀπετελεῖτο ἐκ τεσσάρων περιόδων, θὰ εἴχομεν

$$99\alpha = 25 - 0,00000025,$$

δηλ. δι' ἑκάστην νέαν περίοδον προστιθεμένην εἰς τὸ α ὁ ἀφαιρετέος τοῦ β' μέλους γίνεται ἑκατοντάκις μικρότερος· ἄρα, ἐὰν ὁ α ἀπετελεῖτο ἐκ πασῶν τῶν ἀπειροπληθῶν περιόδων, θὰ εἴχομεν ἀκριβῶς

$$99\alpha = 25 \quad \text{ἢ} \quad \alpha = \frac{25}{99} \quad \text{ἤτοι}$$

$$0,2525\cdots\cdots\cdots = \frac{25}{99}. \quad \text{Ἄρα}$$

Ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχον ἀκέραιον 0 ἰσοῦται πρὸς κλάσμα ἢ προέρχεται ἐκ κλάσματος, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν μίαν περίοδον καὶ παρονομαστὴν ἀκέραιον ἔχοντα πάντα τὰ ψηφία ἴσα τῷ 9 καὶ τόσα, ὅσα ἔχει ἡ περίοδος.

196. Ἐὰν τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχῃ καὶ ἀκεραίας μονάδας, τρέπεται εἰς μικτὸν ἀριθμόν.

Π. χ. $3{,}2525\ldots\ldots = 3\frac{25}{99} = \frac{322}{99}$ κατὰ τὰ προηγούμενα, ὅστις πάλιν τρέπεται εἰς κλάσμα.

197. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἕπεται ὅτι

Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, εἰς ὃ τρέπεται ἁπλοῦν περιοδικόν, δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5.

Σημ. Τὸ ἁπλοῦν περιοδικὸν ἰσοῦται ἀκεραίῳ μόνον, ὅταν πάντα τὰ δεκαδικὰ αὐτοῦ ψηφία εἶναι 9· π. χ.

$$0{,}999\cdots\cdots = 1$$
$$5{,}999\cdots\cdots = 6$$

198. Ἔστω ἤδη τὸ μικτὸν περιοδικὸν

$$5{,}8333\cdots\cdots$$

διὰ μεταθέσεως τοῦ κόμματος εὑρίσκομεν τὸ ἁπλοῦν

$$58{,}333\cdots\cdots,$$

ὅπερ ἰσοῦται τῷ $58\,\frac{3}{9} = \frac{175}{3}$. Ἔχομεν τῳόντι

$$\begin{array}{r|l} 175 & 3 \\ \cline{2-2} 25 & 58{,}33\cdots\cdot \\ 10 & \\ 10 & \\ 1\cdots\cdot & \end{array}$$

Ἐὰν θέλωμεν εἰς τὸ πηλίκον τὸ κόμμα νὰ εὑρίσκηται ἀμέσως μετὰ τὸ 5, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν $17{,}5 : 3$ ἢ $175 : 30$· ἄρα τὸ δοθὲν μικτὸν περιοδικὸν ἰσοῦται τῷ κλάσματι $\frac{175}{30}$. Ἐν γένει

Διὰ νὰ τρέψωμεν μικτὸν περιοδικὸν εἰς κλάσμα κοινόν, τρέπομεν πρῶτον τοῦτο εἰς ἁπλοῦν μεταθέτοντες τὸ κόμμα εἰς τὸ

τέλος τῶν μὴ περιοδικῶν ψηφίων· εὑρίσκομεν ἔπειτα τὸ ἀντιστοιχοῦν κοινὸν κλάσμα προσγράφοντες δεξιὰ τοῦ παρονομαστοῦ τόσα μηδενικά, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία.

199. Εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{175}{30}$ ἰσοῦται τῷ $\frac{58\times9+3}{90}=\frac{58(10-1)+3}{90}=\frac{583-58}{90}$

Τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ 5,833..... τὰ ψηφία 8 καὶ 3 εἶναι διάφορα· ἄρα ἡ διαφορὰ 583—58 δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς 0, καὶ τὸ προηγούμενον, ἐὰν δὲν εἶναι ἀνάγωγον, δὲν ἁπλοποιεῖται διὰ τοῦ 10, ἤτοι καὶ διὰ 2 καὶ διὰ 5. Ἑπομένως

Ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, εἰς ὃ τρέπεται μικτὸν περιοδικόν, περιέχει τοὐλάχιστον τὸν ἕνα τῶν παραγόντων 2 καὶ 5 τοσάκις, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία.

Σημ. Θεωρήσωμεν μικτὸν περιοδικόν, τοῦ ὁποίου τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι πάντα 9·

π.χ. 5,3999...... τοῦτο ἰσοῦται τῷ $\frac{53\times9+9}{90}=\frac{(53+1)9}{10\times9}=5,4$ ἤτοι μὲ συνήθη δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Πορίσματα.

200. α΄) Ἀριθμὸς ἔχων ἄπειρα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία περιοδικὰ ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς ἰσοῦται *πάντοτε* πρὸς *σύμμετρον* ἀριθμόν·

β΄) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος ἀναγώγου δὲν περιέχῃ μήτε τὸν παράγοντα 2 μήτε τὸν 5, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν·

γ΄) Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος ἀναγώγου περιέχῃ μετ' ἄλλων πρώτων παραγόντων καὶ τὸν 2 ἢ 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους, τὸ κλάσμα τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν·

δ΄) Πᾶν περιοδικὸν δεκαδικὸν παράγεται ἔκ τινος κοινοῦ κλάσματος διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· ἐξαιροῦνται *μόνον* ἐκεῖνα, ὧν τὰ δεκαδικὰ ψηφία ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι πάντα 9.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι τὰ κοινὰ κλάσματα, ἐξ ὧν παράγονται τὰ περιοδικὰ

0,5858······
45,6262······
0,46333······
6,12352352······

2) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{20}{35}$, $\frac{7}{21}$ ποῖα τρέπονται εἰς ἁπλᾶ καὶ ποῖα εἰς μικτὰ περιοδικά;

3) Τὸ κοινὸν κλάσμα, πρὸς ὃ ἰσοῦται τὸ περιοδικὸν 0,5454···, εἶναι $\frac{54}{99}$, ἀλλ' ἐὰν θεωρήσωμεν ὡς περίοδον 5454 ἢ 545454 κ.τ.λ. εὑρίσκομεν τὰ κλάσματα

$$\frac{5454}{9999},\ \frac{545454}{999999},$$

πρὸς ἃ ὁμοίως ἰσοῦται τὸ περιοδικόν. Νὰ δειχθῇ ἐκ τῶν προτέρων ἡ ἰσότης τῶν τοιούτων κλασμάτων.

Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

201. Θεωρήσωμεν τὸ δεκαδικὸν

5,121221222······,

τὸ ὁποῖον ἔχει ἄπειρα τὸ πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία διαδεχόμενα ἄλληλα καθ' ὡρισμένον νόμον, ἀλλὰ μὴ περιοδικά.

Τὸ ἄπειρον τοῦτο πλῆθος μονάδων δεκαδικῶν, τὸ ὁποῖον προφανῶς δὲν ὑπερβαίνει τὸν 6, λέγεται ἀριθμὸς *ἀσύμμετρος*. Τοιοῦτοι εἶναι καὶ οἱ ἑπόμενοι·

0,404400440004·····
1,234234423444·····

202. Ὁ ὁρισμὸς τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν δύναται προφανῶς νὰ διατυπωθῇ καὶ οὕτω·

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν πᾶν μέρος τοῦ α′ εἶναι μέρος καὶ τοῦ β′ καὶ ἀντιστρόφως.

Ὁμοίως ὁ ὁρισμὸς τῆς ἀνισότητος οὕτω·

Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἄνισοι, ὅταν ὁ εἷς ἔχῃ πάσας τὰς μονάδας τοῦ ἄλλου καὶ ἄλλας προσέτι. Ὁ α′ λέγεται μεγαλύτερος τοῦ β′. Π. χ.

$$1 = 0,999\cdots\cdots$$
$$0,1 = 0,0999\cdots\cdots$$
$$0,01 = 0,00999\cdots\cdots$$
$$5,999\cdots\cdots > 5,888\cdots\cdots$$

203. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ γεγραμμένοι ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφὴν ἔχωσιν ἴσα πάντα τὰ ὁμοταγῆ ψηφία, προφανῶς εἶναι ἴσοι..

Ἔστωσαν ἤδη οἱ ἀριθμοὶ

$$5,34\cdots\cdots$$
$$5,36\cdots\cdots$$

Τὰ πρῶτα ὁμοταγῆ ψηφία, καθ' ἃ διαφέρουσι τὰ 4 καὶ 6, ἔχουσι διαφορὰν 2. Οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ λοιπὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν, ἀδύνατον οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι νὰ εἶναι ἴσοι, διότι ὁ α′ δὲν ὑπερβαίνει τὸν 5,35. Ἔτι μᾶλλον οἱ ἀριθμοὶ δὲν θὰ ἦσαν ἴσοι, ἐὰν τὰ πρῶτα διάφορα ὁμοταγῆ ψηφία αὐτῶν εἶχον διαφορὰν μείζονα τοῦ 2.

Ἔστωσαν τέλος οἱ ἀριθμοὶ

$$5,34999\cdots\cdots$$
$$5,35$$

ἐν οἷς τὰ πρῶτα διάφορα ὁμοταγῆ ψηφία 4 καὶ 5 ἔχουσι διαφορὰν 1, τὰ δὲ λοιπὰ τοῦ μὲν α′ εἶναι πάντα 9, τοῦ δὲ β′ 0.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι προφανῶς εἶναι ἴσοι, θὰ ἦσαν δὲ ἄνισοι, ἐὰν τοῦ μὲν α′ τὰ λοιπὰ ψηφία δὲν ἦσαν πάντα 9, τοῦ δὲ β′ 0.

204. Ἔστω ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς

$$5,242242224\ldots\ldots$$

Οὗτος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 5 καὶ μικρότερος τοῦ

$$5,9999\ldots\ldots=6,$$

ἄρα πρὸς οὐδένα ἀκέραιον ἰσοῦται. Ἂς ἴδωμεν ἂν ἰσοῦται πρὸς κλάσμα. Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}=5,24224\ldots\ldots$

Τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἂν τρέπηται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν, θὰ ἔχωμεν δύο ἀριθμοὺς ἴσους γεγραμμένους ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφὴν χωρὶς οὔτε πάντα τὰ ὁμοταγῆ ψηφία αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσα, οὔτε τοῦ ἑνὸς τὰ ψηφία ἀπό τινος πάντα 0, τοῦ δὲ ἄλλου πάντα 9.

Ὁμοίως φθάνομεν εἰς ἄτοπον, ἐὰν τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ τρέπηται εἰς περιοδικόν. Ἄρα

Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ εἶναι νέοι ἀριθμοὶ διάφοροι τῶν συμμέτρων, μὴ ὄντες οὔτε ἀκέραιοι οὔτε κλασματικοί.

205. Ὅταν ἔχωμεν νὰ ἐκτελέσωμεν πράξεις ἐπὶ ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, τρέπομεν αὐτοὺς εἰς συμμέτρους λαμβάνοντες ἱκανὰ δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν καὶ ἀπορρίπτοντες τὰ λοιπὰ ἄπειρα· οἱ οὕτω προκύπτοντες σύμμετροι θὰ προσεγγίζωσι τοσούτῳ μᾶλλον πρὸς τοὺς ἀσυμμέτρους, ὅσῳ πλείονα δεκαδικὰ ψηφία λάβωμεν.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν δεκαδικῶν καθόλου.

Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ εἰκοσόφραγκον ἰσοδυναμεῖ πρὸς δραχμὰς 21,70 νὰ τραπῶσι α΄) 156,60 δρ. εἰς φράγκα· β΄) 135,40 φρ. εἰς δραχμάς.

2) Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς διὰ 1, ἑκατέρα τῶν εὐκράτων ζωνῶν εἶναι 0,26, τῶν δὲ κατεψυγμένων 0,04. Πόση εἶναι ἡ διακεκαυμένη ζώνη;

3) Δύο τεμάχια ὑφάσματος διαφόρου ποιότητος ἔχουσι τὸ αὐτὸ μῆκος, ἀλλὰ 3 μέτρα τοῦ α΄ ἀξίζουσιν ὅσον 2 μ. τοῦ β΄, τὰ δὲ

5 μ., ἤτοι 3 τοῦ α′ καὶ 2 τοῦ β′, ἀξίζουσι δραχμὰς 10,50. Πόσον εἶναι τὸ κοινὸν αὐτῶν μῆκος, ἐὰν τὸ β′ ἀξίζῃ 45,20 δρ. περισσότερον τοῦ α′;

4) Μήτηρ καὶ θυγάτηρ ὑφαίνουσιν εἰς τὸ αὐτὸ ἐργοστάσιον· καὶ ἡ μὲν μήτηρ ὑφαίνει καθ' ἑκάστην 5 μέτρα, ἡ δὲ θυγάτηρ 3 μέτρα. Μετὰ 16 ἡμέρας, καθ' ἃς ἡ μήτηρ εἰργάσθη τακτικῶς, ἡ θυγάτηρ, μὴ ἐργασθεῖσα 2 ἡμέρας, ἔλαβε 18,60 δρ. ὀλιγώτερον τῆς μητρός. Πόσον ἐπληρώθη τὸ 1 μ.;

* 5) Τρέποντες τὰ κλάσματα $\frac{5}{7}$ καὶ $\frac{3}{7}$ εἰς δεκαδικὰ εὑρίσκομεν

$$\frac{5}{7}=0,714285714\cdots\cdot\cdot$$

$$\frac{3}{7}=0,428571428\cdots\cdot\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν ὅτι αἱ περίοδοι αὐτῶν ἔχουσιν ἰσάριθμα δεκαδικὰ ψηφία. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τοῦτο θὰ συμβαίνῃ, ὁσάκις λαμβάνομεν δύο ἢ πλείονα κλάσματα ἀνάγωγα καὶ ὁμώνυμα.

* 6) Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\kappa}$ τρέπηται εἰς περιοδικόν, οὗτινος ἡ περίοδος ἔχει $\kappa-1$ ψηφία, τὰ ψηφία ταῦτα ἀνεξαρτήτως τῆς τάξεως αὐτῶν θὰ εἶναι τὰ αὐτά, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς α ἀντικατασταθῇ ὑπὸ οἱουδήποτε ἄλλου ἀκεραίου παρέχοντος κλάσμα τρεπόμενον εἰς περιοδικόν.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΠΕΡΙ ΜΕΤΡΩΝ, ΣΤΑΘΜΩΝ ΚΑΙ ΝΟΜΙΣΜΑΤΩΝ

Μονάδες μήκους.

206. Ἐν Γαλλίᾳ καὶ ἀλλαχοῦ μεταχειρίζονται ὡς μονάδα μήκους τὸ *γαλλικὸν μέτρον*. Ἡ μονὰς αὕτη ἐλήφθη ἐκ τῆς φύσεως· δηλ. ὁ μεσημβρινὸς τῆς γῆς εἶναι 40 ἑκατομμύρια μέτρα. Ἐν Ἑλλάδι τὸ μέτρον καλεῖται καὶ *βασιλικὸς πῆχυς*.

Τὸ μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 *παλάμας*, ἡ παλάμη εἰς 10 *δακτύλους* καὶ ὁ δάκτυλος εἰς 10 *γραμμάς*· ἄρα ἡ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου, ὁ δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ καὶ ἡ γραμμὴ τὸ $\frac{1}{1000}$.

Φανερὸν ὅτι ἐκ τῆς μετρήσεως μήκους διὰ τοῦ μέτρου θὰ προκύψῃ ἐν γένει δεκαδικὸς ἀριθμός.

Π. χ. μῆκος περιέχον 5 μ. 2 παλάμας, 3 δακτύλους καὶ 4 γραμμὰς παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5,234 μ.

207. Διὰ τὴν μέτρησιν μεγάλων διαστημάτων, ὅπως ἀποφύγωμεν τοὺς μεγάλους ἀριθμούς, μεταχειριζόμεθα μεγάλας μονάδας. Τοιαῦται ἐν σχέσει πρὸς τὸ μέτρον εἶναι

Τὸ δεκάμετρον=10 μ.

Τὸ ἑκατόμμετρον=100 μ.

Τὸ χιλιόμετρον ἢ στάδιον=1000 μ.

Τὸ μυριάμετρον=10000 μ.

208. Τὸ μέτρον, ὅπερ εἶναι ἡ βάσις ὅλων αὐτῶν τῶν γαλλικῶν μονάδων καὶ ἐξ οὗ γίνονται αἱ λοιπαὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διαιρέσεως, λέγεται μονὰς *ἀρχική*.

209. Ἐν Τουρκίᾳ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι κυρίως ὁ μικρὸς πῆχυς Κωνσταντινουπόλεως, ὅστις ἰσοῦται πρὸς 0,648 μέτρ. Διαιρεῖται δὲ εἰς 8 ῥούπια.

210 Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι ἡ *ὑάρδα* ἰσοδυναμοῦσα πρὸς 0,914 μέτρ. Διαιρεῖται δὲ εἰς 3 πόδας (φοὺτ) καὶ ὁ ποὺς εἰς 12 δακτύλους (ἴντσας).

1 πῆχυς=0,71 ὑάρδ. περίπου καὶ 1 ὑάρδα=1,41 πήχ.

Τὸ ἀγγλικὸν μίλλιον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1760 ὑάρδ.=0,9144×1760=1609, 33 μέτρ.

211. Ἐν Ῥωσσίᾳ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ μήκους εἶναι τὸ ἀρσὶν=0,7112 μέτρ.

Τὸ βέρστ=1500 ἀρσὶν=1067 μέτρα.

212. Δι' ὅλα τὰ ἔθνη τὸ ναυτικὸν μίλλιον εἶναι 1852 μέτρα.

Τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου διαιροῦμεν εἰς 360 μοίρας, τὴν μοῖραν εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα.

Τόξον 10 μοιρῶν, 20 πρώτων καὶ 30 δευτέρων λεπτῶν σημειοῦται 10^{o}, $20'$, $30''$.

Μία μοῖρα τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς εἶναι 60 ναυτικὰ μίλλια, ἄρα τὸ ναυτικὸν μίλλιον εἶναι τὸ $1'$ τῆς μοίρας τοῦ μεσημβρινοῦ.

* 213. Ἡ ἀρχαία γαλλικὴ μονὰς ἡ *ὀργυιὰ* εἶναι 1,95 μέτρ., διαιρεῖται δὲ εἰς 6 πόδας, ὁ ποὺς εἰς 12 δακτύλους καὶ ὁ δάκτυλος εἰς 12 γραμμάς.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῶσι α') 3,685 μέτρα εἰς παλάμας, β') 5,63 μέτρα εἰς δακτύλους ἢ γραμμάς, γ') 5867,45 μέτρα εἰς δεκάμ. ἢ ἑκατόμ. ἢ χιλιόμετρα.

2) Νὰ τραπῶσι α') 5,25 μέτρ. εἰς πήχεις, β') $8\frac{5}{8}$ πήχ. εἰς μέτρα.

3) 1 χιλιόμετρον νὰ τραπῇ α') εἰς πήχεις, β') εἰς ὑάρδας γ') εἰς ἀρσίν.

4) Νὰ τραπῶσι α') 5,5 μέτρ. εἰς ὑάρδας, β') 15 ὑάρδαι εἰς μέτρα, γ') 8 $\frac{1}{2}$ πήχεις εἰς ὑάρδας, δ') 10 ὑάρδαι εἰς πήχεις.

5) Πόσας ὑάρδας ἔχει 1 ναυτικὸν μίλλιον;

6) Πόσοι δάκτυλοι ἀποτελοῦσιν 1 ἀγγλικὸν πόδα;

7) Μὲ πόσα ῥούπια ἰσοδυναμεῖ ὁ ἀγγλικὸς πούς;

Μονάδες ἐπιφανείας.

214. Ἐν Γαλλίᾳ καὶ ἐκεῖ ἔνθα ἀκολουθοῦσι τὸ δεκαδικὸν μετρικὸν σύστημα (ἐν Γερμανίᾳ, Αὐστρίᾳ κ.λ.) ὡς μονάδα ἀρχικὴν ἔχουσι τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον*, ἤτοι τετράγωνον ἔχον πλευρὰν 1 μ. Ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ εἶναι ἡ τετραγ. παλάμη καὶ ὁ τετρ. δάκτυλος Τὸ τετρ. μέτρον παριστῶμεν διὰ τ. μ.· ἔχομεν δὲ 1 τ. μ.= 100 τ. παλάμαι, 1 τ. παλάμ.=100 τ. δάκτυλοι, 1. τ. μ.= 10000 τ. δάκτυλοι. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν 5,34625 τ.μ. δύναται νὰ ἀπαγγελθῇ *5 τετραγ. μέτρα 34 τετρ. παλάμ. 62 τετρ. δάκτ. καὶ 5 δέκατα τοῦ τετρ. δακτύλου (50 τετρ. γραμμαί)*.

215. Διὰ τὰς μεγάλας ἐπιφανείας ἔχομεν τὰς μονάδας

α') Διὰ τὰς κτηματικὰς γαίας

Τὸ τετραγωνικὸν δεκάμετρον ἢ *ἄρ* (are), ἤτοι τετράγωνον πλευρᾶς 10 μ.· ἄρα

1 ἄρ=100 τ. μ.

Τὸ τετρ. ἑκατόμμετρον ἢ *ἑκτάριον* (hectare)=*10000 τ. μ.*

Τὸ βασιλικὸν στρέμμα ἐν Ἑλλάδι=1000 τ. μ.

β') Διὰ τὰς γεωγραφικὰς ἐκτάσεις

Τὸ *τετρ. χιλιόμετρον* καὶ τὸ *τετρ. μυριάμετρον*· 1 τ. μυριάμετρον=100 τ. χιλιόμετρα.

Μονάδες ὄγκου.

216. Ἐν σχέσει πρὸς τὸ γαλλικὸν μέτρον ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ *κυβικὸν μέτρον*, ἤτοι κύβος ἔχων πλευρὰν 1 μέτρον. Τὸ κυβ. μέτρον παριστῶμεν διὰ τοῦ *κ. μ.*

Ὑποδιαιρέσεις αὐτοῦ εἶναι ἡ κυβικὴ παλάμη, κύβος ἔχων πλευρὰν 1 παλάμης, καὶ ὁ κυβ. δάκτυλος.

Ἔχομεν δὲ

1. κ. μ.=1000 κ. παλάμαι, 1 κ. παλάμ.=1000 κ. δάκτυλοι. Οὕτω 5,02603 κ.μ. παριστᾷ 5 κ.μ., 26 κ. παλάμ. καὶ 30 κυβ. δακτ. Ἡ κυβ. παλάμη λέγεται καὶ *λίτρα* καὶ χρησιμεύει διὰ τὴν καταμέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

217. Ἐν Τουρκίᾳ χρησιμοποιεῖται ὡς μονὰς χωρητικότητος ἡ ὀκᾶ=1,28 λίτρ.

Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ ὄγκου εἶναι ἡ κυβ. ὑάρδα.

1 κ. ὑάρδα=27 κυβ. πόδες, 1 κ. πούς=1728 κ. δάκτυλοι.

Τὸ γαλόνιον διὰ τὰ ὑγρὰ=4,543 λίτρ.

Ἐν Ῥωσσίᾳ ἔχουσι τὸ κυβ. ἀρσὶν=0,358 κ. μ.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσα ἂρ ἢ πόσα ἑκτάρια ἔχει τὸ τ. χιλιόμετρον;

2) 5,62356 τ. μ. νὰ τραπῶσι α′ εἰς τ. παλάμας, β′ εἰς τ. δακτύλους.

3) 56385 τ. δάκτυλοι νὰ τραπῶσι εἰς τ. μέτρα

4) 5,67005 κ. μ. νὰ τραπῶσι α′ εἰς λίτρας, β′ εἰς κ. δακτύλους.

5) Τί μέρος τοῦ κ. μ. εἶναι ἡ κ. ὑάρδα;

6) Πόσας λίτρας χωρεῖ ἡ κυβ. ὑάρδα;

Μονάδες βάρους.

218. Ἐν Γαλλίᾳ καὶ ἀλλαχοῦ ἀρχικὴ μονὰς τοῦ βάρους εἶναι τὸ *γραμμάριον* (gramme), εἶναι δὲ τοῦτο τὸ βάρος ὕδατος ἀπεσταγμένου εἰς θερμοκρ. 4° K, τὸ χωροῦν εἰς ἕνα κ. δάκτυλον.

Ὑποδιαιρέσεις εἶναι

Τὸ *δέκατον* τοῦ γραμμαρίου, τὸ *ἑκατοστὸν* καὶ τὸ *χιλιοστόν*.

Πολλαπλάσια δὲ εἶναι

τὸ *χιλιόγραμμον* (kilogramme)=1000 γραμμάρια.

Ὁ *τόννος*=1000 χιλιόγραμμα.

Μία λίτρα χωρεῖ ἓν χιλιόγραμμον ὕδατος· ἓν δὲ κ. μ. ἕνα τόννον ὕδατος.

218. Ἐν Τουρκίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *ὀκᾶ* διαιρουμένη εἰς 400 *δράμια*.

44 ὀκάδες ἀποτελοῦσιν ἕνα *στατῆρα* (καντάρι), 1 χιλιόγραμμον=312 δράμια=0,78 ὀκάδ.

1 ὀκᾶ=1282 γραμμάρια=1,282 χιλιόγραμμα.

1 δράμιον=3,205 γραμμάρια.

220. Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι ἡ *ἀγγλικὴ λίτρα* ἰσοδυναμοῦσα πρὸς 0,4535 χιλιόγραμμα=141 δράμια.

112 λίτραι=1 *στατὴρ ἀγγλικός*.

221. Ἐν Ῥωσσίᾳ ἀρχικὴ μονὰς ἡ *ῥωσσικὴ λίτρα* ἰσοδυναμοῦσα πρὸς 409,5 γραμμάρια.

40 λίτραι=1 *πούτιον*.

222. Ἐν Γερμανίᾳ ἔχουσι τὸ *πφούντιον* ἰσοδυναμοῦν πρὸς 500 γραμμάρια.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσας ὀκάδας ἔχει ὁ τόννος;

2) Νὰ τραπῶσι α΄) 28 ὀκάδες εἰς χιλιόγραμμα, β΄) 15,3 χιλιόγραμμα εἰς ὀκάδας, γ΄) 141 δράμια εἰς γραμμάρια, δ΄) 25,3 γραμμάρια εἰς δράμια.

3) Πόσας ὀκάδας ἔχει τὸ πούτιον;

4) Πόσα χιλιόγραμμα ἔχει ὁ στατήρ;

5) Πόσας ὀκάδας ὕδατος χωρεῖ δεξαμενὴ ἔχουσα ὄγκον 4,32 κ.μ.;

6) Νὰ τραπῶσιν εἰς ἀγγλικὰς λίτρας α΄ 5,62 χιλιόγραμμα, β΄ 8 ὀκάδες, γ΄ 5 στατῆρες.

Νομισματικαὶ μονάδες.

223. Εἶναι εἰς πολλὴν χρῆσιν ὡς ἀρχικὴ μονὰς τὸ *φράγκον* (franc), τὴν ὁποίαν διὰ συμβάσεως (Λατινικὴ νομισματικὴ σύμβασις) παρεδέχθησαν ἡ Γαλλία, ἡ Ἰταλία, ἡ Ἑλλάς, ἡ Ἑλβετία, τὸ Βέλγιον, διὰ νὰ ἔχωσι νομίσματα ἴσης ἀξίας πρὸς εὐ-

κολίαν τῶν συναλλαγῶν. Τὴν μονάδα ταύτην ἐδέχθησαν καὶ ἄλλα κράτη, ἡ Ῥουμανία, ἡ Βουλγαρία καὶ ἡ Σερβία.

Τὸ φράγκον εἶναι νόμισμα ἀργυροῦν ζυγίζον 5 γραμμάρια, διαιρεῖται δὲ εἰς 100 ἑκατοστά.

Ἀξία εἰς φράγκα		Διάμετρος εἰς γραμμάς	Βάρος εἰς γραμμάρια
Χρυσᾶ	100	35	32,258
	50	28	16,129
	20	21	6,4516
	10	19	3,2258
	5	17	1,6129
Ἀργυρᾶ	5	37	25
	2	27	10
	1	23	5
	0,50	18	2,5
	0,20	15	1
Χάλκινα	0,10	30	10
	0,05	25	5
	0,02	20	2
	0,01	15	1

Ὁ πίναξ οὗτος περιέχει τὰ νομίσματα, ὧν ἡ ἀξία εἶναι ὑποδιαίρεσις ἢ πολλαπλάσιον τοῦ φράγκου μετὰ τῆς διαμέτρου καὶ τοῦ βάρους αὐτῶν.

224. Τὰ ἀργυρᾶ τῶν 2 φρ. καὶ 1 φρ., τῶν 50 καὶ 20 ἑκατοστῶν ἔχουσι βαθμὸν καθαρότητος (τίτλον) 0,835, ἤτοι 0,835 εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, τὰ λοιπὰ εἶναι χαλκός· πάντα δὲ τὰ λοιπὰ χρυσᾶ καὶ ἀργυρᾶ ἔχουσι βαθμὸν καθαρ. 0,900· ἤτοι τὰ 0,900 εἶναι καθαρὸς ἄργυρος ἢ χρυσός, τὰ δὲ λοιπὰ ὁμοίως χαλκός. Τὰ χάλκινα περιέχουσιν 95 μέρη χαλκοῦ, 4 κασσιτέρου καὶ 1 ψευδαργύρου.

225. Ἐν Γερμανίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ *μάρκον* διαιρούμενον εἰς 100 *πφένιγ*.

1 μάρκον=1,235 φρ.

Ἐν Αὐστρουγγαρίᾳ ἔχουσι τὴν *κορώναν* διαιρουμένην εἰς 100 *χέλλερ*.

1 κορώνα=1,05 φρ.

Ἐν Ῥωσσίᾳ τὸ *ρούβλιον* διαιρούμενον εἰς 100 *καπίκια*.

1 ρούβλιον=2,67 φρ.

Ἐν ταῖς Ἡνωμέναις Πολιτείαις τῆς Ἀμερικῆς τὸ *δολλάριον* διαιρούμενον εἰς 100 *ἑκατοστά*.

1 δολλάριον=5,18 φρ.

226. Ἐν Ἀγγλίᾳ ἀρχικὴν μονάδα ἔχουσι τὴν *λίραν στερλίναν* διαιρουμένην εἰς 20 *σελλίνια*.

Τὸ σελλίνιον διαιρεῖται εἰς 12 *πέννας* καὶ ἡ πέννα εἰς 4 *φαρδίνια*.

Ἡ στερλίνα εἶναι νόμισμα χρυσοῦν ζυγίζον 7,988 γραμμάρια καὶ ἔχον βαθμὸν καθαρότητος $\frac{11}{12}$. Τὸ σελλίνιον εἶναι ἀργυροῦν μὲ βαθμὸν καθαρότητος $\frac{37}{40}$. Ἡ πέννα καὶ τὸ φαρδίνιον χαλκᾶ.

1 λίρα στερλίνα=25 φρ.

227. Ἐν Τουρκίᾳ ἀρχικὴ μονὰς εἶναι τὸ *γρόσιον* διαιρούμενον εἰς 40 *παράδες*.

Ἡ *λίρα* εἶναι νόμισμα χρυσοῦν ζυγίζον 7,216 γρ. μὲ βαθμὸν καθαρότητος 0,916, ἰσοδυναμοῦσα πρὸς 100 γρόσια.

Ὑπάρχουσι δὲ καὶ χρυσᾶ νομίσματα τῶν 25, 50, 250 καὶ 500 γροσίων.

Ἀργυρᾶ μὲ βαθμὸν καθαρότητος 0,830 ὑπάρχουσι τῶν $\frac{1}{2}$, 1, 2, 5, 10 καὶ 20 γροσίων.

1 λίρα=22,78 φράγκ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῶσι

α′ 165,45 φρ. εἰς σελλίνια
β′ » » » » γρόσια
γ′ » » » » δολλάρια

2) Νὰ τραπῶσι

α′ 15,5 γρόσ. εἰς φράγκα
β′ » » » » σελλίνια
γ′ » » » » μάρκα

3) Πρὸς πόσα γρόσια ἰσοδυναμεῖ ἡ στερλίνα;

4) Πρὸς πόσα φαρδίνια ἰσοδυναμεῖ α′ τὸ φράγκον, β′ τὸ γρόσιον;

5) 568,45 δολλάρ. νὰ τραπῶσι α′ εἰς στερλίνας, β′ εἰς λίρας τουρκικάς, γ′ εἰς φράγκα.

Μέτρα, σταθμὰ καὶ νομίσματα τῆς Ἑλλάδος.

228. Διὰ τὰ ὑφάσματα ὡς μονάδα τοῦ μήκους μεταχειρίζονται τὸν *τουρκικὸν πῆχυν* καὶ τὸ *γαλλικὸν μέτρον*. Διὰ τὰς ἀποστάσεις τὸ μέτρον καὶ τὸ *χιλιόμετρον*. Διὰ τὰς οἰκοδομὰς καὶ τὰ οἰκόπεδα τὸ μέτρον, συχνότατα δὲ καὶ τὸν *τεκτονικὸν πῆχυν*, ὅστις εἶναι 0,75 τοῦ μέτρου.

Διὰ τὰς κτηματικὰς γαίας τὸ *βασιλικὸν στρέμμα*=1000 τ.μ.

Διὰ τὰ βάρη εἶναι ἐν χρήσει πρὸ πάντων αἱ τουρκικαὶ μονάδες, κατὰ β' λόγον αἱ γαλλικαί.

Διὰ τὰ χρηματικὰ ποσὰ εἶναι ἐν χρήσει αἱ μονάδες τῆς λατινικῆς συμβάσεως. Τὸ φράγκον καλεῖται *δραχμή*, τὸ δὲ ἑκατοστὸν αὐτοῦ *λεπτόν*. Ὑπάρχουσι δὲ καὶ *νικέλινα* τῶν 5, 10 καὶ 20 λεπτῶν περιέχοντα 25 μέρη νικελίου καὶ 75 μέρη χαλκοῦ.

Πλὴν δὲ τῆς μεταλλικῆς δραχμῆς ἔχουσι καὶ τὴν χαρτίνην, τῆς ὁποίας ἡ ἀξία εἶναι μεταβλητή, κατωτέρα ἐν γένει τῆς μεταλλικῆς ἢ *χρυσῆς* δραχμῆς.

Ὑπάρχουσι δὲ προσέτι χαρτονομίσματα τῶν 2, 5, 10, 25 100 καὶ 500 δραχμῶν.

Ἀσκήσεις.

1) Τὸ χρυσοῦν εἰκοσάδρ. τιμᾶται δρ. χαρτίνας 20,50. Νὰ τραπῶσι α' 165,65 δρ. εἰς φρ. χρ., β' 68,5 φρ. χρ. εἰς δραχμάς.

2) Τὸ χρυσοῦν φράγκον ἰσοδυναμεῖ πρὸς 1,03 δρ. Νὰ τραπῶσι

α' 28 δραχ. εἰς σελλίνια
β' » » » γρόσια
γ' » » » ρούβλια
δ' 5 στερλ. εἰς δραχμάς.

3) Νὰ τραπῶσι α' 25 τεκτον. πήχεις εἰς μέτρα, β' 45,6 μέτρα εἰς τεκτ. πήχεις.

4) Τί μέρος τοῦ τ. μ. εἶναι ὁ τετραγωνικὸς τεκτονικὸς πῆχυς;

5) Πόσους τετρ. τεκτον. πήχ. ἔχει τὸ βασιλικὸν στρέμμα;

6) Πόσα βασιλικὰ στρέμματα ἔχει τὸ τετρ. χιλιόμετρον καὶ πόσα τὸ τετρ. μυριάμετρον;

Γενικαὶ ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν μέτρων, σταθμῶν καὶ νομισμάτων.

1) Ἔμπορος ἐπρομηθεύθη ἐκ Μασσαλίας 5865 χιλιόγραμμα καφέ, στοιχίσαντα μέχρι τῆς μεταφορᾶς αὐτῶν εἰς τὸ κατά-

στημά του ἐν Πειραιεῖ φρ. χρ. 12596,5· πόσας δραχμὰς τῷ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ, ἐὰν τὸ εἰκοσόφραγκον τιμᾶται δραχμὰς 20,50;

2) Ἔμπορος ἐν Ἀθήναις ἐπρομηθεύθη ἐκ Τεργέστης 3800 χιλιόγραμμα ὀρύζης ἀγοράσας αὐτὰ ἀντὶ 1505 κορωνῶν· ἐδαπάνησε δὲ προσέτι διὰ ναῦλον 105 κορώνας καὶ διὰ λοιπὰ ἔξοδα, ἐκφόρτωσιν, τελωνεῖον, σιδηρόδρομον κ.τ.λ. 355 δραχμάς. Πόσας δραχμὰς τῷ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ, ἐὰν τὸ εἰκοσόφραγκον τιμᾶται δρ. 20,65.

3) Ἔμπορος ἐν Πειραιεῖ ἐπρομηθεύθη ἐκ Σμύρνης 4165 ὀκάδας σύκων, ἅτινα ἠγόρασε πρὸς 1 ὀθωμ. λίραν τὸν στατῆρα· τὰ δὲ λοιπὰ ἔξοδά του εἶναι 245,65 δραχ. Ἐὰν 1 φράγκον= δραχ. 1,05, πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ 5 ἐπὶ τοῖς ἑκατόν;

5) Ἐν Ἑλλάδι εἰδικῶς διὰ τὴν σταφίδα ἔχουσιν τὴν *ἐνετικὴν λίτραν* ἰσοδυναμοῦσαν πρὸς 150 δράμια καὶ τὴν χιλιάδα τῶν ἐνετικῶν λιτρῶν.

Νὰ τραπῶσι

α΄) 5 χιλιάδες ἐνετικῶν λιτρῶν εἰς στατῆρας.

β΄) 565 ὀκάδες εἰς ἐνετ. λίτρας.

γ΄) 1200 ἐνετ. λίτραι εἰς χιλιόγραμμα.

5) Ἔμπορος ἐν Λονδίνῳ ἐπρομηθεύθη ἐκ Πατρῶν 10 χιλιάδας ἐνετικῶν λιτρῶν σταφίδος πρὸς 112 δραχμὰς χρυσᾶς τὴν χιλιάδα, πληρώσας προσέτι διὰ ναῦλον καὶ λοιπὰ ἔξοδα 10 λίρας στερλίνας· πόσας πέννας τῷ στοιχίζει ἡ ἀγγλικὴ λίτρα;

6) Τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἐλαίου ἔστω 0,912· πόσας ὀκάδας ἐλαίου χωρεῖ ἀγγεῖον ἔχον ὄγκον 0,085 κ. μ.;

7) Ἠγοράσθησαν ἐν Ταϊγανίῳ 15000 πούτια σίτου ἀντὶ 8510 ῥουβλίων· πόσα φρ. χρ. στοιχίζει τὸ χιλιόγραμμον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΣΥΜΜΙΓΕΙΣ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμός.

229. Μετροῦμεν βάρος τι μὲ τὴν ὀκᾶν καὶ εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι 3 στατ. + 5 ὀκ. + 200 δράμ. ἢ συντομώτερον 3 στατ. 5 ὀκ. 200 δράμ.

Ὁ σύνθετος οὗτος ἀριθμὸς λέγεται *συμμιγής*.

Ἐν γένει

Ὅταν τὰ ἐν χρήσει πολλαπλάσια ἢ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος ἔχοντα *ἴδιον* ὄνομα *δὲν* εἶναι *δεκαδικά*, δύναται διὰ τῆς χρήσεως τῆς μονάδος ταύτης πρὸς καταμέτρησιν ποσοῦ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς σύνθετος ἐξ ἄλλων, ὧν αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια ἢ μέρη τῆς ἀρχικῆς μονάδος, ἤτοι συμμιγής. Τοιοῦτοι εἶναι

α') 25 ἡμ. 6 ὧρ.

β') 8 σελ. 5 πέν. 3 φαρδ.

Οἱ συμμιγεῖς ἀριθμοὶ εἶναι πάντοτε συγκεκριμένοι.

Οἱ συγκεκριμένοι 5 πήχεις ἢ $3\ \frac{1}{2}$ ὀκάδ. ἢ 5,5 ῥούπια κ.τ.λ. λέγονται *ἁπλοῖ*.

Χρησιμότης.

230. Διὰ τῶν συμμιγῶν

α') Ἀποφεύγομεν τοὺς μεγάλους ἀριθμούς· π. χ. ἀντὶ 445 ὀκάδ. ἔχομεν 10 στατ. 5 ὀκ.

β') Ἀποφεύγομεν τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς· π. χ. ἀντὶ $5\ \frac{3}{8}$ πήχ. ἔχομεν

5 πήχ. 3 ῥούπ.

Σημ. Ἐὰν ὑπάρχωσι κλάσματα τῆς κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως, συνήθως παραλείπονται.

Παρατήρησις.

Εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ οἱ δεκαδικοὶ συγκεκριμένοι δύνανται νὰ γραφῶσιν ὡς συμμιγεῖς· π. χ. ἀντὶ 5,35 μ. δυνάμεθα νὰ γράψωμεν

5 μ. 3 παλάμ. 5 δάκτ.,

ἀλλὰ προτιμῶμεν τὴν δεκαδικὴν μορφὴν διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν πράξεων.

Μονάδες χρόνου.

231. Εἰς τὰ ἐπὶ τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν προβλήματα συχνότατα εἰσέρχεται ὁ χρόνος.

Ἀρχικὴ μονὰς τοῦ χρόνου εἶναι τὸ *ἡμερονύκτιον*, ὅπερ λέγεται καὶ ἁπλῶς *ἡμέρα*· διαιρεῖται δὲ εἰς 24 *ὥρας*, ἡ ὥρα εἰς 60 *πρῶτα λεπτὰ* καὶ τὸ πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 *δεύτερα*.

Παριστῶμεν δὲ τὰ μὲν πρῶτα λεπτὰ διὰ π., τὰ δὲ δεύτερα διὰ δ· π. χ.

4 ὥρ. 25^{π} 45^{δ}

Διὰ τὰ μεγάλα χρονικὰ διαστήματα λαμβάνεται ὡς μονὰς τὸ *ἔτος*, ὅπερ εἶναι ἢ *κοινὸν* ἔχον 365 ἡμ. ἢ *δίσεκτον* ἔχον 366 ἡμέρας. *Δίσεκτα* εἶναι ἐκεῖνα, ὧν ὁ ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ 4· π. χ. τὰ ἔτη 1900, 1936 κ.λ.

Τὸ ἔτος διαιρεῖται εἰς 12 μῆνας, ὧν γνωρίζομεν τὰ ὀνόματα. Τούτων ἄλλοι μὲν ἔχουσι 30 ἡμέρας καὶ ἄλλοι 31, πλὴν τοῦ Φεβρουαρίου, ὅστις ἔχει 28 μὲν ἡμέρας, ὅταν τὸ ἔτος εἶναι κοινόν, 29 δέ, ὅταν εἶναι δίσεκτον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν, πόσας ἡμέρας ἔχει εἷς μήν, γράφομεν τὴν σειρὰν

1, 2, 3, 4, 5.

Ἔπειτα ἀρχόμενοι ἀπὸ τοῦ Μαρτίου λέγομεν κατὰ σειρὰν τὰ ὀνόματα τῶν μηνῶν θέτοντες συγχρόνως τὴν γραφίδα ἐφ' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τῆς προηγουμένης σειρᾶς, τοὺς ὁποίους ὅταν τυχὸν ἐξαντλήσωμεν, ἀρχόμεθα πάλιν ἀπὸ τοῦ πρώτου.

Ὅσοι μῆνες πίπτουσιν ἐπὶ περιττοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσι 31 ἡμέρας, ὅσοι δὲ ἐπὶ ἀρτίου 30, ἐξαιρουμένου τοῦ Φεβρουαρίου. Διὰ πολὺ μεγάλα χρονικὰ διαστήματα ἔχομεν μονάδας τὸν *αἰῶνα*=100 ἔτη καὶ τὴν *χιλιετηρίδα* 1000 ἔτη.

Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἁπλοῦν ἀριθμόν.

232. α′) Ζητεῖται τὸ χρηματικὸν ποσὸν 5 λίρ. 8 σελ. 3 πέν. 2 φαρδ. νὰ τραπῇ εἰς σελλίνια.

Πρὸς τοῦτο τρέπομεν εἰς σελλίνια τὸ μέρος αὐτοῦ 5 λίρ. 8 σελ. καὶ ἔχομεν

$$5 \text{ λίρ.} = 5 \times 20 = 100 \text{ σελ.}$$

Ἄρα 5 λίρ. 8 σελ.=108 σελ.

Ἔπειτα τρέπομεν τὸ λοιπὸν μέρος τοῦ συμμιγοῦς καθ' ὅμοιον τρόπον εἰς φαρδίνια καὶ ἔχομεν

$$3 \text{ πέν. } 2 \text{ φαρδ.} = 14 \text{ φαρδ.}$$

ἐπειδὴ δὲ 1 σελ.=12 πέν.=48 φαρδ., ἕπεται ὅτι 14 φαρδ.= $\frac{14}{48}$ σελ.· ἄρα τὸ δοθὲν ποσὸν ἰσοδυναμεῖ πρὸς 108 $\frac{14}{48}$ σελ.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|rr}
5 \text{ λίρ. } 8 \text{ σελ.} & 3 \text{ πέν. } 2 \text{ φαρδ.} & \\
\underline{20} & \underline{4} & \\
100 & 12 & 1 \text{ σελ.} = 12 \text{ πέν.} \\
\underline{8} & \underline{2} & \underline{4} \\
108 & 14 & 48 \text{ φαρδ.}
\end{array}$$

β′) Ζητεῖται ὁ συμμιγὴς 3 ἡμ. 5 ὥρ. 40′ νὰ τραπῇ εἰς πρῶτα λεπτά.

Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ συμμιγοῦς 5 λίρ. 8 σελ. ἔχομεν

$$\begin{array}{r l}
3 & \text{ἡμ. } 5 \text{ ὥρ. } 40^{=} \\
24 & \\
\hline
72 & \\
5 & \\
\hline
77 & \\
60 & \\
\hline
4620 & \\
40 & \\
\hline
4660 &
\end{array}$$

ἤτοι ὁ δοθεὶς συμμιγὴς ἐτράπη εἰς 4660 πρῶτα λεπτά.

γ′) Ζητεῖται ὁ συμμιγὴς 2 πόδ. 8 δάκτ. νὰ τραπῇ εἰς ὑάρδας.

Ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τὸ α′ παράδειγμα, διὰ νὰ τρέψωμεν 3 πέν. 2 φαρ. εἰς σελλίνια, καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r l}
2 \text{ πόδ.} & 8 \text{ δάκτ.} \\
12 & 1 \text{ ὑάρδ.} = 3 \text{ πόδ.} \\
\hline
24 & \qquad 12 \\
8 & \qquad = 36 \text{ δάκτ.} \\
\hline
32 &
\end{array}$$

Ὥστε $\quad 2$ πόδ. 8 δάκτ. $= \frac{32}{36}$ ὑάρδ.

Τροπὴ ἀριθμοῦ ἁπλοῦ εἰς συμμιγῆ.

233. Τρεῖς περιπτώσεις διακρίνομεν, καθ' ὅσον ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος, κλασματικὸς ἢ μικτός.

α′) Ζητεῖται νὰ τρέψωμεν εἰς συμμιγῆ 4269^{δ} τῆς ὥρας.

Διαιροῦμεν 4269 διὰ 60, διότι $1^{=} = 60^{\delta}$ καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 71 καὶ ὑπόλοιπον 9· ἄρα $4269\delta = 71^{=}\ 9^{\delta}$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$71^{\pi} = 1$ ὥρ. 11^{π}. Ἄρα $4269^{\delta} = 1$ ὥρ. $11^{\pi}\ 9^{\delta}$.

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l}
4269 & 60 \\ \cline{2-2}
69 & \begin{array}{l|l} 71\pi. & 60 \\ \cline{2-2} 11^{\pi} & 1 \text{ ὥρ.} \end{array} \\
9^{\delta} &
\end{array}$$

β′) Ζητεῖται $\frac{3}{7}$ ὑάρδ. νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ.

Διαιροῦμεν 3 : 7 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 0 ὑάρδ. καὶ ὑπόλοιπον 3 ὑάρδ., τὰς ὁποίας τρέπομεν εἰς 9 πόδ.

Διαιροῦμεν ἔπειτα 9 : 7 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1 πόδα καὶ ὑπόλοιπον 2 πόδας, οὓς τρέπομεν ἔπειτα εἰς 24 δακτ. Τούτους διαιροῦμεν δι' 7 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 3 δακτ. καὶ ὑπόλ. 3 δακτ., οἵτινες δὲν τρέπονται εἰς μονάδας κατωτέρας· ἄρα

$$\frac{3}{7} \text{ ὑάρδ.} = 1 \text{ πόδ. } 3\frac{3}{7} \text{ δακτ.}$$

Διάταξις τῆς πράξεως

$$\begin{array}{r|l}
3 & 7 \\ \cline{2-2}
3 & 0 \text{ ὑάρδ. } 1 \text{ πόδ. } 3 \text{ δακτ.} \\ \cline{1-1}
9 & \\
2 & \\
12 & \\ \cline{1-1}
24 & \\
3 &
\end{array}$$

γ′) Ζητεῖται $86\frac{5}{7}$ σελ. νὰ τραπῇ εἰς συμμιγῆ.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν

α′) 86 σελ. = 4 λίρ. 6 σελ.

β′) $\frac{5}{7}$ σελ. = 8 πέν. $2\frac{2}{7}$ φαρδ. ἤτοι ἐν ὅλῳ

4 λίρ. 6 σελ. 8 πέν. $2\frac{2}{7}$ φαρδ.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῶσι 5 λίρ. 8 σελ. 7 πέν. 2 φαρδ. εἰς φράγκα χρ.

Λύσις. Δυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸ δοθὲν ποσὸν εἰς σελλίνια καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 1,25= διότι 1 σελ.=1,25 φρ.

2) 145 γρόσ. 30 παρ. νὰ τραπῶσιν εἰς φράγκ. χρ.

3) 2 ὀκ. 100 δράμ. νὰ τραπῶσιν εἰς γραμμάρια.

4) 25,35 χιλιόγρ. νὰ τραπῶσιν εἰς ὀκάδας καὶ δράμια.

5) Ὁ χρόνος 8 ὥρ. $20^{\text{π}}$ $30^{\text{δ}}$ νὰ τραπῇ εἰς ὥρας.

6) Ἁμαξοστοιχία διέτρεξεν 25 χιλιόμ. εἰς 8 ὥρ. $20^{\text{π}}$ $30^{\text{δ}}$. Πόσα διέτρεξεν εἰς 1 ὥραν;

7) 20 ὑάρδ. 2 πόδ. 6 δάκτ. νὰ τραπῶσιν εἰς μέτρα.

8) Δύο πόλεις κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ μεσημβρινοῦ, οὗτινος τὸ μεταξὺ αὐτῶν τόξον εἶναι 2^{0} $30'$, $40''$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς ναυτικὰ μίλλια ἢ εἰς χιλιόμετρα ἡ ἐπὶ τοῦ μεσημβρινοῦ ἀπόστασις τῶν πόλεων τούτων ἀπ' ἀλλήλων.

9) Νὰ τραπῶσιν εἰς μέτρα 25 πήχεις 3 ῥούπια.

10) 8 ἄνθρωποι ἐμοιράσθησαν 15 ὀθωμ. λίρας· πόσον τὸ μερίδιον ἑκάστου εἰς λίρας καὶ ὑποδιαιρέσεις αὐτῆς;

11) 25000 φαρδίνια νὰ τραπῶσιν εἰς συμμιγῆ.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

234. Αἱ πράξεις αὗται ἐκτελοῦνται καθ' ὃν τρόπον εἰς τοὺς ἀκεραίους καὶ δεκαδικούς, *μὲ μόνην* τὴν διαφορὰν ὅτι, ἐν ᾧ εἰς ἐκείνους ἑκάστη μονὰς 10άκις λαμβανομένη ἀποτελεῖ τὴν ἀμέσως ἀνωτέραν, ἐνταῦθα αἱ μονάδες σχηματίζονται ἐκ τῶν ἀμέσως κατωτέρων κατὰ ποικίλους τρόπους.

Παραδείγματα.

α')

Προσθετέοι	5 στ.	5 όκ.	200 δρ.
	8	36	250
		9	150
Ἄθροισμα	14 στ.	7	200

β')

11 γρόσ.	35 παρ.	μειωτέος
5	20	ἀφαιρετέος
6 γρόσ.	15 παρ.	διαφορά

γ')

7 ὑάρδ.	2 πόδ.		μειωτέος
1	1	10 δάκτ.	ἀφαιρετέος
6 ὑάρδ.	0 πόδ.	2 δάκτ.	διαφορά.

δ')

Προσθετέοι	6 πήχ.	$6\frac{1}{2}$ ῥούπ.	
	4	$5\frac{2}{3}$	
	11 πήχ.	$4\frac{1}{6}$ ῥούπ.	ἄθροισμα

Ἀσκήσεις.

1) Πρὸς πόσα φράγκα ἰσοδυναμεῖ τὸ ἄθροισμα

5 λίρ.	6 σελ.	10 πέν.	+
	8	2	+
10	5	1 ;	

2) Τρία τεμάχια ὑφάσματος ἔχουσι μῆκος τὸ α' 10 πήχ. 7 ῥούπ., τὸ β' 8 πήχ., τὸ γ' 26 πήχ. 3 ῥούπ. Πόσον μῆκος ἔχουσιν ὅλα ὁμοῦ α') εἰς πήχεις, β') εἰς μέτρα ;

3) Ἐκ τεμαχίου ὑφάσματος μήκους 15 ὑαρδ. 2 ποδ. ἐκόπησαν α' 1 ὑάρδ. 10 δάκτ., β' 1 π. 11 δάκτ. Πόσον ὑπολείπεται;

4) Βαρέλιον κενὸν ζυγίζει 25 όκ. 250 δράμ., πλῆρες δὲ οἴνου 5 στ. 1 όκ. 100 δράμ. Πόσον ζυγίζει ὁ οἶνος ;

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

Α' Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον.

235. Ἐργάτης ὑφαίνει εἰς 1 ἡμ. 11 πήχ. 6 ῥούπ. ὑφάσματος. Πόσον θὰ ὑφάνῃ εἰς 7 ἡμέρας ;

Λύσις. Πρέπει τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 7·

11 πήχ.	6 ῥούπ.
	7
82 πήχ.	2 ῥούπ.

Ὁ πολλαπλασιασμὸς γίνεται ὡς καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους μὲ μόνην τὴν διαφοράν, περὶ ἧς εἴπομεν εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν.

Ἀσκήσεις.

1) Οἰκογένεια χρειάζεται καθ'ἑκάστην 2 ὀκ. 250 δράμ. ἄρτου· πόσον χρειάζεται εἰς 3 ἑβδομάδας ;

2) Ἁμαξοστοιχία χρειάζεται χρόνον $3^{\text{π}}$ $40{,}5^{\delta}$, ἵνα διατρέξῃ 1 χιλιόμετρον. Εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ 45 χιλιόμετρα ;

Β' Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου.

236. *Πρόβλημα*. Εἰς 12 ἀνθρώπους ἐμοιράσθησαν 45 πήχ. 5 ῥούπ. ὑφάσματος. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος ;

Λύσις. Πρέπει νὰ διαιρέσωμεν 45 πήχ. 5 ῥούπ. διὰ 12. Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν χωριστὰ τὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς, ἤτοι τὰς μονάδας αὐτοῦ, ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους καὶ ἑνώνομεν τὰ μερικὰ πηλίκα.

Διάταξις τῆς πράξεως.

45 πήχ. 5 ῥούπ.	12
9	3 πήχ. 6 ῥούπ.
8	
72	
5	
77	
5	

Τὸ ὑπόλοιπον 9 τοῦ 45 διὰ 12 πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 8, διότι 1 πῆχ.=8 ῥούπ. Ἐν γένει ἕκαστον ὑπόλοιπον, πλὴν τοῦ τελευταίου, τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως πολλαπλασιάζοντες αὐτὸ ἐπὶ τὸν ἀριθμόν, ὅστις δεικνύει, πόσαι τοιαῦται μονάδες ἀποτελοῦσι μίαν τῶν μονάδων τοῦ ὑπολοίπου καὶ εἰς τὸ εὑρεθὲν γινόμενον προσθέτομεν καὶ τὰς ἐν τῷ διαιρετέῳ μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸν οὕτω προκύπτοντα ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω μέχρι τῶν μονάδων τῆς κατωτάτης τάξεως.

236. Ἐνταῦθα, ὡς γνωρίζομεν, ἡ διαίρεσις εἶναι *μερισμός*. Ἔστω ἤδη τὸ ἑξῆς πρόβλημα·

Μὲ 12 πήχεις ὑφάσματος κατασκευάζομεν μίαν σινδόνα· πόσας σινδόνας δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ 45 πήχ. καὶ 5 ῥούπ. τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Θὰ κατασκευάσωμεν τόσας σινδόνας, ὁσάκις οἱ 12 πήχ. χωροῦσιν εἰς τοὺς 45 πήχ. 5 ῥούπ. Ἑπομένως ἐνταῦθα ἡ διαίρεσις παρίσταται ὡς *μέτρησις*.

Ἡ δὲ πρᾶξις γίνεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 45\ \text{πήχ.}\ 5\ \text{ρούπ.} & 12 \\ \cline{2-2} 9 & 3\ \text{σινδ.}\ \frac{77}{96} \\ 8 & \\ \cline{1-1} 72 & \\ 5 & \\ \cline{1-1} 77 & \qquad 12\ \text{πήχ.}=96\ \text{ρούπ.} \end{array}$$

Διαιροῦμεν δηλ. 45 διὰ 12 καὶ εὑρίσκομεν 3, ὅπερ παριστᾷ σινδόνας· ὑπολείπονται 9 πήχ.=72 ῥούπ. καὶ 5 ῥούπια τοῦ διαιρετέου ἐν ὅλῳ 77 ῥούπ., ἐπειδὴ δὲ διὰ 1 σινδόνα χρειαζόμεθα 12 πήχ. ἢ 96 ῥούπ., ἕπεται ὅτι ὅλον τὸ πηλίκον εἶναι 3 σινδ. καὶ $\frac{77}{96}$.

Ἠδυνάμεθα νὰ τρέψωμεν τὸν διαιρετέον εἰς ἁπλοῦν ἀριθμὸν ὁμοειδῆ τῷ διαιρέτῃ, ἤτοι νὰ διαιρέσωμεν

$$45\frac{5}{8} : 12.$$

Ἀσκήσεις.

1) Οἰκογένεια καταναλίσκει τὴν ἑβδομάδα 25 ὀκ. 150 δράμ. ἄρτου. Πόσον καταναλίσκει εἰς 1 ἡμέραν;

2) 17 πήχ. ὑφάσματος ἐπωλήθησαν 57 γρόσ. 30 παρ. Πόσον ἐπωλήθη ὁ πῆχυς καὶ πόσον οἱ 9 πήχεις;

Γ΄ Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλάσμα ἢ μικτόν.

237. *Πρόβλημα*. Ἐργάτις ὑφαίνει εἰς 1 ὥρ. 2 πήχ. 2 ῥούπ. ὑφάσματος. Πόσον ὑφαίνει εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας;

Λύσις. Πρέπει νὰ λάβωμεν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ συμμιγοῦς, ἤτοι νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὸν ἐπὶ $\frac{3}{4}$. Προφανῶς θὰ εὕρωμεν τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, ἐὰν λάβωμεν τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 3πλασίου αὐτοῦ, ἤτοι *ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν σύμμιγῆ ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ.*

Οὕτως εὑρίσκομεν

(2 πήχ. 2 ῥούπ.)$\times$3=6 πήχ. 6 ῥούπ.

Ἔπειτα

(6 πήχ. 6 ῥούπ.) : 4=1 πήχ. 5 $^1/_2$ ῥούπ.

Ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι μικτός, ἢ τρέπομεν αὐτὸν εἰς κλάσμα καὶ πράττομεν ὡς ἀνωτέρω ἢ πολλαπλασιάζομεν χωριστὰ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα τοῦ μικτοῦ προσθέτοντες τὰ μερικὰ γινόμενα.

Ἀσκήσεις.

1) Ἡ ὀκᾶ τοῦ ἐλαίου τιμᾶται 5 γρόσ. 25 παρ. Πόσον τιμῶνται $\frac{8}{11}$ τῆς ὀκάδος;

2) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει 1 χιλιόμ. εἰς χρόνον 2^{π} 15^{δ}. Εἰς πόσον χρόνον διατρέχει $5\frac{4}{7}$ χιλιόμ.;

3) Ἐξ ὑφάσματος μήκους 30 μέτρ. 4 παλ. 8 δακτ. ἀπεκόπησαν α′ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ· β′ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ὑπολοίπου· πόσα μέτρα ἔμειναν;

Δ′. Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ.

238. *Πρόβλημα*. Τὰ $\frac{3}{3}$ τοῦ πήχ. ὑφάσματος τιμῶνται 3 γρόσ. 20 παρ. Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Λύσις. Ἡ τιμὴ τοῦ πήχ. πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ $\frac{3}{8}$ δίδει 3 γρόσ. 20 παρ.· ἄρα εἶναι τὸ πηλίκον

$$(3 \text{ γρόσ. } 20 \text{ παρ.}) : \frac{3}{8} = 9 \text{ γρόσ. } 14 \text{ παρ.},$$

ὅπερ εὑρίσκομεν ἀντιστρέφοντες τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος καὶ τρέποντες τὴν διαίρεσιν εἰς πολλαπλασιασμόν.

Διὰ μικτοῦ διαιροῦμεν πάντοτε τρέποντες αὐτὸν εἰς κλάσμα.

Σημ. Εἰς τὰ προηγούμενα ἀνάγεται ἡ περίπτωσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ τῆς διαιρέσεως συμμιγοῦς διὰ δεκαδικοῦ.

Ἀσκήσεις.

1) Ἁμαξοστοιχία διέτρεξεν εἰς 1 ὥρ. 10^{λ} 20^{δ} τὰ $\frac{5}{8}$ μιᾶς γραμμῆς· εἰς πόσον χρόνον θὰ διατρέξῃ τὸ ὑπολειπόμενον μέρος;

2) 5 χιλιόγρ. 160 γραμμάρ. ἐλαίου ἐπωλήθησαν 8 σελ. 10 πέν. Πόσον ἐπωλήθη τὸ χιλιόγραμμον;

Ἠγόρασέ τις 5,25 χιλιόγρ. ἐλαίου πληρώσας 15 γρόσ. 30 παρ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ χιλιόγραμμον, διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 8 γρόσ. 10 παρ.;

Πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ συμμιγῆ.

239. Πρόβλημα α') ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 γρόσ. 25 παρ. Πόσον τιμῶνται 6 πήχεις 5 ῥούπ.

Λύσις. Πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν

$$5 \text{ γρόσ. } 25 \text{ παρ.} \times 6 \text{ πήχ. } 5 \text{ ῥούπ.}$$

Ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως, τρέπομεν τὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς πήχεις καὶ ἔχομεν 5 γρόσ. 25 παρ. $\times 6\frac{5}{8}$ = 37 γρόσ. $10\frac{5}{8}$ παρ.

Τὸ πρόβλημα ὁδηγεῖ, εἰς ποίας μονάδας πρέπει νὰ τρέψωμεν τὸν πολλαπλασιαστήν.

Πρόβλημα β'. Μὲ 1 γρόσ. ἀγοράζομεν 6 πήχ. 5 ῥούπ. ὑφάσματος. Πόσον θὰ ἀγοράσωμεν μὲ 5 γρόσ. 25 παρ.;

Λύσις. 6 πήχ. 5 ῥούπ. $\times$ 5 γρόσ. 25 ῥούπ. = 37 πήχ. $2\frac{1}{8}$ ῥούπ.

Σημ. Εἰς ἀμφότερα τὰ προηγούμενα προβλήματα οἱ παράγοντες εἶναι οἱ αὐτοί. Τὰ γινόμενα ὅμως ἔχουσιν ἰσαρίθμους μόνον τὰς ἀνωτάτας μονάδας, διότι διάφοροι εἶναι αἱ ὑποδιαιρέσεις τοῦ πήχεως καὶ τοῦ γροσίου.

Μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν.

240. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἀκέραιος ἢ συμμιγὴς εἶναι μέγας ἀριθμός, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον εὐκολώτερον ὡς ἑξῆς·

Παράδειγμα α') Ζητεῖται τὸ γινόμενον

$$(3 \text{ λίρ. } 11 \text{ σελ. } 5 \text{ πέν. } 2 \text{ φαρδ.}) \times 528$$

Εὑρίσκομεν α'.

$$3 \text{ λίρ.} \times 528 = 1584 \text{ λίρ.}$$

Ἔπειτα πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου 11 σελ. $\times$ 528 ἀναλύομεν τὰ 11 σελ. εἰς 10 σελ. $= \frac{1}{2}$ λίρ. καὶ 1 σελ. $= \frac{1}{10}$ τῶν 10 σελ. καὶ ἔχομεν

$$10 \text{ σελ.} \times 528 = \frac{1}{2} \text{ λίρ.} \times 528 = 264 \text{ λίρ.}$$

$$1 \text{ σελ.} \times 528 = \frac{1}{10} \times 264 \text{ σελ.} = 26{,}4 \text{ λίρ} = 26 \text{ λίρ. } 8 \text{ σελ.}$$

Ὁμοίως ἀναλύομεν 5 πέν. εἰς 4 πέν. $= \frac{1}{3}$ σελ. καὶ 1 πέν. $= \frac{1}{4}$ τῶν 4 πεν. καὶ ἔχομεν

$$4 \text{ πέν.} \times 528 = \frac{1}{3} \times (26 \text{ λίρ. } 8 \text{ πέν.}) = 8 \text{ λίρ. } 16 \text{ σελ.}$$

$$1 \text{ πέν.} \times 528 = \frac{1}{4} \times (8 \text{ λίρ. } 16 \text{ σελ.}) = 2 \text{ λίρ. } 4 \text{ σελ.}$$

Τέλος 2 φαρδ. $= \frac{1}{2}$ πέν. Ἄρα

$$2 \text{ φαρδ.} \times 528 = \frac{1}{2} \times (2 \text{ λίρ. } 4 \text{ σελ.}) = 1 \text{ λίρ. } 2 \text{ σελ.}$$

Ἑνώνοντες δὲ πάντα ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα ἔχομεν

1886 λίρ. 10 σελ.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 1 σελ., ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{20}$ τῶν 528 λιρ.

Ὁμοίως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῆς 1 πέν., ἠδυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{12}$ τῶν 26 λιρ. 8 σελ.

Ἡ ὅλη πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

		3 λίρ. 11 σελ. 5 πέν. 2 φαρδ.	
		528	
3 λίρ	....	1584	
11 σελ.	10 σελ. $=\frac{1}{2}$ λίρ	264	
	1 σελ. $=\frac{1}{10}$ τῶν 10 σελ.	26	8
5 πέν.	4 πέν. $=\frac{1}{3}$ σελ	8	16
	1 πέν. $=\frac{1}{4}$ τῶν 4 πεν.	2	4
	2 φαρδίνια $=\frac{1}{2}$ πέν	1	2
		1886 λίρ. 10 σελ.	

Σημ. Ἐὰν ὁ συμμιγὴς ἀντὶ 11 σελ. εἶχε 10, πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τῶν 4 πεν. $=\frac{1}{30}$ τῶν 10 σελ. ἀντὶ νὰ ζητήσωμεν τὸ $\frac{1}{30}$ τοῦ γινομένου τῶν 10 σελ. εἶναι εὐκολώτερον νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 1 σελ. καὶ τούτου νὰ λάβωμεν τὸ $\frac{1}{3}$ φροντίζοντες ὅμως εἰς τὸ ὁλικὸν γινόμενον νὰ μὴ περιλάβωμεν τὸ γινόμενον τοῦ 1 σελ., ὅπερ τότε καλεῖται ***βοηθητικὸν γινόμενον***.

Παράδειγμα β'. Ὁ πῆχυς ὑφάσματος τιμᾶται 5 γρόσ. Πόσον τιμῶνται 56 πήχεις καὶ 5 ῥούπια;

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν

5 γρόσ. $\times$ (56 πήχ. 5 ῥούπ.)

Εὑρίσκομεν καὶ ἐνταῦθα τὸ γινόμενον κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν, ὡς φαίνεται ἐν τῇ ἑπομένῃ διατάξει τῆς πράξεως.

		5 γρόσ.	
		56 πήχ.	5 ρούπ.
Ἀξία τῶν 56 πήχ. πρὸς 5 γρόσ	......	280 γρόσ.	
Ἀξία τῶν 5 ρουπ.	4	2	$32\frac{1}{2}$ παρ.
	1	0	$28\frac{1}{8}$
Ὁλικὸν γινόμενον		283 γρόσ.	$20\frac{5}{8}$ παρ.

Παράδειγμα γ'. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἡ ἀξία τοῦ πήχεως ἦτο 5 γρόσ. 25 παρ., ἡ πρᾶξις θὰ ἐγίνετο ὡς φαίνεται ἐν τῇ ἑπομένῃ διατάξει.

			5 γρόσ.	25	παρ.
			56 πήχ.	5	ρούπ.
Ἀξία 56 πήχ.	πρὸς 5 γρόσ	....	280 γρόσ.		
	πρὸς 25 παρ.	20	28		
		5	7		
Ἀξία τῶν 5 ρουπ.	4		2	$32\frac{1}{2}$	παρ.
	1		0	$28\frac{1}{8}$	
Ὁλικὸν γινόμενον	...		318 γρόσ.	$20\frac{5}{8}$	παρ.

241. Καὶ εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ κλάσμα δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ μέθοδος αὐτη, ἐὰν ἀναλύσωμεν τὸ κλάσμα εἰς μέρη τέλεια τῆς μονάδος ἢ ἕκαστον τοῦ προηγουμένου. Π. χ. Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμὸν ἐπὶ $\frac{3}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, λαμβάνομεν α' τὸ ἥμισυ αὐτοῦ, ἔπειτα τὸ τέταρτον ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ἡμίσεος καὶ προσθέτομεν τὰ ἐξαγόμενα ταῦτα.

Ἀσκήσεις.

1) Ἁμαξοστοιχία διατρέχει εἰς 1 ὥρ. 45,5 χιλιόμ. Πόσα διατρέχει εἰς 5 ὥρ. 30$^{\pi}$ 25$^{\delta}$;

2) Πόσον τιμῶνται 15 ὀκ. 250 δρ. ἐλαίου πρὸς 1 δραχ. 65 λεπτ. τὴν ὀκᾶν;

3) Πόσον τιμῶνται 10 ὑάρδ. 8 δάκτ. ὑφάσματος πρὸς 3 σελ. 2 φαρδ. τὴν ὑάρδαν;

Διαίρεσις διὰ συμμιγοῦς.

242. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον ὁ διαιρετέος, ὅστις πρέπει νὰ εἶναι συγκεκριμένος ἀριθμός, εἶναι ὁμοειδὴς ἢ ἑτεροειδὴς τῷ διαιρέτῃ.

Α' περίπτωσις.

Πρόβλημα. Ἡ ὑάρδα ὑφάσματος τιμᾶται 3 σελ. 5 πέν. 3 φαρδ. Πόσας ὑάρδας δυνάμεθα νὰ ἀγοράσωμεν μὲ 2 λίρ. 10 σελ. 8 πέν.;

Λύσις. Ἐπὶ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν πολλαπλασιαζόμενος ὁ α' συμμιγὴς παράγει τὸν β'.

Ἄρα ὁ ζητούμενος εἶναι

(2 λίρ. 10 σελ. 8 πέν.) : (3 σελ. 5 πέν. 3 φαρδ.)

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου τρέπομεν καὶ τοὺς δύο εἰς φαρδίνια καὶ ἔχομεν

2 λίρ. 10 σελ. 8 πέν. = 2432 φαρδ.
3 σελ. 5 πέν. 3 φαρδ. = 167 »

Ἑπομένως ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι

$$\frac{2432}{167} \text{ ὑάρδ.} = 14 \text{ ὑάρδ. } 1 \text{ πόδ. } 8\frac{44}{167} \text{ δάκτ.}$$

Β′ περίπτωσις.

Πρόβλημα. 5 πήχ. 3 ρούπ. ὑφάσματος τιμῶνται 18,50 δρ.· πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;

Λύσις. Πρέπει νὰ διαιρέσωμεν

18,50 δρ. : (5 πήχ. 3 ρούπ.)

Ἐπειδὴ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως, τρέπομεν τὸν διαιρέτην εἰς πήχεις καὶ ἔχομεν

$$18{,}50 \text{ δρ.} : 5\frac{3}{8} = \text{δρ. } 3{,}44.$$

Ἀσκήσεις.

1) Ἀτμομηχανὴ καίει τὴν ὥραν 5 ὀκ. 100 δρχμ. ἀνθράκων· εἰς πόσας ὥρας θὰ καύσῃ 2 στατ. 10 ὀκ.;

2) Μὲ 1 δραχ. ἀγοράζομεν 2 πήχεις ὑφάσματος. Μὲ πόσας δραχμὰς θὰ ἀγοράσωμεν 5 ρούπια;

3) Λυχνία εἰς 2 ὥρ. 20′ ἔκαυσε 1 ὀκ. 240 δράμ. ἐλαίου· πόσον καίει τὴν ὥραν;

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν συμμιγῶν καθόλου.

1) Ἔμπορος ἔφερεν ἐξ Ἀγγλίας 360 ὑάρδ. ὑφάσματος, ὅπερ ἐστοίχισεν 65 λίρ. 15 σελ. Πόσον τῷ ἐστοίχισεν ὁ πῆχυς;

2) Ἔμπορος ἠγόρασε 3 τεμάχια ὑφάσματος τῆς αὐτῆς ποιότητος. Ἐπλήρωσε δὲ διὰ μὲν τὸ α′ ἔχον μῆκος 25 πήχ. 4 ρουπ. τὸ ποσὸν 42,25 δρ., διὰ τὸ β′ ἔχον μῆκος 32 πήχ. δρ. 55,30 καὶ διὰ τὸ γ′ ἔχον μῆκος 18 πήχεων, 5 ρουπ. δρ. 30. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχ. τοῦ ὅλου ὑφάσματος, διὰ νὰ κερδίσῃ ἐν ὅλῳ 12,65 δρ.;

3) Παραγγελιοδόχος λαμβάνει ἐκ τοῦ ἐμπορικοῦ οἴκου, ὃν ἀντιπροσωπεύει, ἀμοιβὴν 8 σελ. 8 πέν. καθ' ἑκάστην ἡμέραν τῆς πε-

ριοδείας του καὶ προσέτι 3 ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν παραγγελιῶν, δαπανᾷ δὲ καθ' ἑκάστην πρὸς συντήρησίν του 7 σελ. 5 πέν. Μετὰ περιοδείαν 75 ἡμερῶν εἶχεν οἰκονομήσει 45 λίρ. 15 σελ. Πόση ἦτο ἡ ἀξία τῶν δι' αὐτοῦ γενομένων παραγγελιῶν;

4) Τόξον κύκλου 35^0 45′ ἔχει μῆκος 5,65 μ.· πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς ὅλης περιφερείας;

5) Ὁ ἥλιος καθ' ἑκάστην εἰς 24 ὥρας γράφει πλήρη περιφέρειαν κύκλου. Ἐὰν ἡμέραν τινὰ εἴς τινα τόπον ἀνέτειλεν 7 ὥρ. 35^{π} π.μ., πόσον εἶναι τὸ τόξον τῆς περιφερείας, ὅπερ κατέγραψεν ὑπεράνω τοῦ ὁρίζοντος μέχρι τῆς μεσημβρίας;

6) Δύο ὑφάσματα τῆς αὐτῆς ποιότητος ἔχουσι πλάτος τὸ α′ 1 πήχ. 2 ῥουπ., τὸ β′ 2 πήχ. Τιμᾶται δὲ τοῦ μὲν α′ ὁ πῆχυς δρ. 5,10, τοῦ δὲ β′ δρ. 8,20. Ποῖον εἶναι εὐθηνότερον;

ΒΙΒΛΙΟΝ Ϛ'.

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΛΟΓΟΙ

243. Ἔστωσαν δύο μεγέθη ὁμοειδῆ, π. χ. δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ἡ Α γίνεται ἐκ τῆς Β, ἐὰν αὕτη ἐπαναληφθῇ τρίς, ληφθῇ δὲ προσέτι τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῆς.

Ἡ εὐθεῖα Α λέγεται *γινόμενον* τῆς Β ἐπὶ 3,1· παριστῶμεν δὲ τὴν σχέσιν ταύτην γράφοντες

$$A=(3,1)B.$$

Ὁ ἀριθμὸς 3,1 λέγεται *λόγος* τῆς Α πρὸς τὴν Β. Ἐν γένει

Λόγος μεγέθους πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, πῶς γίνεται τὸ πρῶτον ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ ἢ ὁ ἀριθμός, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενον τὸ δεύτερον παράγει τὸ πρῶτον.

244. Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι Α καὶ Β ἔχουσαι μῆκος ἡ μὲν Α 10 μ., ἡ δὲ Β 2,5 μ. Εἶναι φανερὸν ὅτι, ὅπως ὁ ἀριθμὸς 10 γίνεται ἐκ τοῦ 2,5 λαμβανομένου 4άκις, οὕτω καὶ ἡ Α γίνεται ἐκ τῆς Β 4άκις λαμβανομένης. Ἄρα

Ὁ λόγος μεγέθους πρὸς ἕτερον ὁμοειδὲς εἶναι τὸ πηλίκον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες παριστῶσι ταῦτα μετρηθέντα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β σημειοῦται Α : Β. Εἶναι δὲ Α ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ λόγου καὶ Β ὁ δεύτερος.

245. Λόγος δύο ἀριθμῶν λέγεται τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου διὰ

τοῦ δευτέρου π. χ. τὸ πηλίκον $5 : 2 = 2\frac{1}{2}$ λέγεται λόγος τοῦ 5 πρὸς τὸν 2. Ἑπομένως καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ὁ λόγος δηλοῖ, πῶς γίνεται ὁ πρῶτος ἀριθμὸς ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τῶν μερῶν αὐτοῦ.

246. ***Ἀντίστροφοι*** λόγοι λέγονται οἱ ἔχοντες τοὺς αὐτοὺς ὅρους, ἀλλὰ κατ' ἀντίστροφον τάξιν· π. χ. οἱ λόγοι

$$5 : 2 \text{ καὶ } 2 : 5 \quad \text{ἢ} \quad \frac{5}{2} \text{ καὶ } \frac{2}{5}.$$

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι

$$\frac{5}{2} \times \frac{2}{5} = 1$$

Ἐκ τῆς § 244 ἕπεται ὅτι, ἐὰν θεωρήσωμεν δύο μεγέθη ὁμοειδῆ Α καὶ Β καὶ ὑποθέσωμεν $A : B = \frac{5}{2}$, τότε $B : A = \frac{2}{5}$. Ἄρα ἐν γένει

Τὸ γινόμενον δύο λόγων ἀντιστρόφων ἰσοῦται τῇ μονάδι.

ΜΕΓΕΘΗ ΕΥΘΕΩΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ

247. Πολλάκις δύο μεγέθη ἢ ποσὰ *διάφορα* ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων· π. χ. ἡ ἀξία τοῦ σίτου καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων αὐτοῦ· ἑκάτερον τῶν ποσῶν τούτων λέγεται *συνάρτησις* τοῦ ἄλλου.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι 1 ὀκᾶ σίτου τιμᾶται 20 λεπτ.· αἱ 2 ὀκάδες θὰ τιμῶνται 20×2 λ., τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὀκ. θὰ τιμᾶται $20 \times \frac{1}{3}$ λ. καὶ ἐν γένει

Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ὀκάδων πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα ἀξία αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ ἢ μεγέθη λέγονται ***εὐθέως ἀνάλογα*** ἢ ἁπλῶς ***ἀνάλογα***.

Τοιαῦτα εἶναι προσέτι

Τὸ μῆκος ὑφάσματος καὶ ἡ ἀξία αὐτοῦ, ἡ χρηματικὴ ἀμοιβὴ τοῦ ὑπαλλήλου καὶ ὁ χρόνος τῆς ὑπηρεσίας αὐτοῦ, ἐφ' ὅσον ὁ μηνιαῖος αὐτοῦ μισθὸς εἶναι σταθερὸς κ.τ.λ.

Ἡ ἀξία τοῦ ἀδάμαντος καὶ τὸ βάρος αὐτοῦ δὲν εἶναι ἀνάλογα, διότι, ἐὰν π. χ. τὸ βάρος του διπλασιασθῇ, ἡ ἀξία του γίνεται οὐχὶ δίς, ἀλλὰ 4άκις μείζων.

248. Ἐὰν εἰς 10 ἀνθρώπους μοιράσωμεν 100 δραχ., θὰ λάβῃ ἕκαστος 10 δρ. Ἐὰν οἱ ἄνθρωποι γίνωσιν 20, ἕκαστος θὰ λάβῃ 5 καὶ ἐν γένει ὅσας φορὰς οἱ ἄνθρωποι γίνωσι περισσότεροι, ἄλλας τόσας φορὰς τὸ μερίδιον ἑκάστου γίνεται μικρότερον.

Τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος, ὅπερ χρειάζεται διὰ τὴν κατασκευὴν ἐνδύματος καὶ τὸ πλάτος αὐτοῦ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, οὕτως, ὥστε, ἐὰν τὸ ἓν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, τὸ ἕτερον διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Τὰ τοιαῦτα μεγέθη λέγονται **ἀντιστρόφως ἀνάλογα** ἢ ἁπλῶς **ἀντίστροφα**.

Τοιαῦτα ποσὰ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος ὁ ἀπαιτούμενος πρὸς ἐκτέλεσιν ὑπ' αὐτῶν ἔργου τινός.

Τὸ ὕψος δοχείου κυλινδρικοῦ χωροῦντος 1 ὀκᾶν ὕδατος καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ δὲν εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, διότι, ἐὰν ἡ διάμετρος διπλασιασθῇ π.χ., τὸ ὕψος δὲν γίνεται δὶς μικρότερον, ἀλλὰ 4άκις.

249. Δύναται μέγεθός τι ἢ ποσὸν νὰ ἐξαρτᾶται ἐκ πολλῶν ἄλλων· π. χ. ὁ ἀπαιτούμενος χρόνος πρὸς οἰκοδομὴν τοίχου ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ἐργασίμων ὡρῶν τῆς ἡμέρας, ἐκ τοῦ ὕψους, τοῦ μήκους καὶ τοῦ πάχους τοῦ τοίχου. Λέγομεν τότε ὅτι τὸ ποσὸν τοῦτο εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον πρὸς ἓν ἐξ αὐτῶν, ὅταν μεταβάλληται μετ' αὐτοῦ ἀναλόγως ἢ ἀντιστρόφως, πάντων τῶν λοιπῶν τηρουμένων ἀμεταβλήτων· ἐνταῦθα π. χ. ὁ χρόνος εἶναι ἀντίστροφος πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν, διότι, ἐὰν μόνον τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν πολλαπλασιασθῇ ἐπί τινα ἀριθμόν, ὁ χρόνος διαιρεῖται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ χρόνος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ μῆκος τοῦ τοίχου κ.τ.λ.

'Ασκήσεις.

1) Ἔχομεν τρεῖς εὐθείας, Α, Β, Γ, εἶναι δὲ

$$Α : Β = 3,14 \qquad Β : Γ = 2,17.$$

Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος Α : Γ.

2) Δύο ποσὰ ἀνάλογα πρὸς τρίτον εἶναι πρὸς ἄλληλα ἀντίστροφα. Π. χ.

Ὅταν ταχυδρόμος διατρέχῃ διάστημά τι, αἱ ὧραι, καθ' ἃς κινεῖται καθ' ἑκάστην, εἶναι ὡς πρὸς τὸ πλῆθος ἀνάλογοι πρὸς τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ διατρέξῃ· ὁμοίως καὶ αἱ ἀπαιτούμεναι ἡμέραι· λοιπὸν αἱ ὧραι καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα.

3) Ἐὰν ποσόν τι εἶναι ἀνάλογον πρὸς ἕτερον καὶ ἀντίστροφον πρὸς τρίτον, τότε τὸ δεύτερον καὶ τὸ τρίτον εἶναι ἀνάλογα. Π.χ. εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα αἱ ὧραι εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὸ διάστημα καὶ ἀντίστροφοι πρὸς τὰς ἡμέρας· λοιπὸν τὸ διάστημα καὶ αἱ ἡμέραι εἶναι ποσὰ ἀνάλογα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

Ὁρισμοί.

250. Ἡ ἰσότης δύο λόγων καλεῖται *ἀναλογία*· π. χ.

$$5 : 2 = 20 : 8.$$

Ἡ ἀναλογία, ὡς βλέπομεν, ἔχει 4 ὅρους, ὧν ὁ α΄ καὶ ὁ δ΄ λέγονται *ἄκροι*, ὁ β΄ καὶ ὁ γ΄ *μέσοι*· προσέτι ὁ α΄ καὶ ὁ γ΄ *ἡγούμενοι*, ὁ β΄ καὶ ὁ δ΄ *ἑπόμενοι*.

Ὅταν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἶναι μεγέθη, συμβαίνει πολλάκις τὰ μεγέθη τοῦ ἑνὸς λόγου νὰ εἶναι ἑτεροειδῆ πρὸς τὰ τοῦ ἑτέρου· π. χ. ὡς εὐθεῖά τις εἶναι τριπλασία ἄλλης, οὕτω καὶ βάρος τι δύναται νὰ εἶναι τριπλάσιον ἄλλου βάρους.

Ἡ ἀναλογία, ἧς οἱ μέσοι εἶναι ἴσοι, λέγεται *συνεχής*· π. χ.

$$8 : 4 = 4 : 2,$$

ὁ δὲ κοινὸς μέσος λέγεται *μέσος ἀνάλογος*.

Ἰδιότητες.

251. α΄. Θεωρήσωμεν τὴν ἀναλογίαν

$$8 : 4 = 6 : 3 \quad ἤ \quad \frac{8}{4} = \frac{6}{3}.$$

Τρέποντες τὰ κλάσματα ταῦτα εἰς ὁμώνυμα ἔχομεν

$$\frac{8 \times 3}{4 \times 3} = \frac{6 \times 4}{3 \times 4} \quad ἄρα$$

$$8 \times 3 = 6 \times 4 \quad ἤτοι$$

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν μέσων.

Ἡ ἰδιότης αὕτη ἀληθεύει, καὶ ὅταν οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας εἶναι μεγέθη, ἀλλὰ μεμετρημένα, οἱ ὅροι δὲ ἑκάστου λόγου μεμετρημένοι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Πόρισμα. Ὅταν ὅρος τις τῆς ἀναλογίας εἶναι ἄγνωστος, δυνάμεθα νὰ τὸν εὕρωμεν· π. χ. ἐὰν ζητῆται ὁ δ΄ ὅρος, ὃν παριστῶμεν διὰ χ, τῆς ἀναλογίας $8 : 4 = 6 : \chi$, ἔχομεν

$$8 \times \chi = 4 \times 6 \quad Ἄρα$$

$$\chi = \frac{4 \times 6}{8} = 3.$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς ἀναλογίας $8 : \chi = 6 : 3$ ἔχομεν

$$\chi = \frac{8 \times 3}{6} = 4$$

* Ὁμοίως ἐκ τῆς $16 : \chi = \chi : 4$ ἔχομεν

$$\chi^2 = 16 \times 4 = 64.$$

Ἐπειδὴ δὲ $8^2 = 64$, ἄρα $\chi = 8$.

β') Θεωρήσωμεν τὴν σειρὰν

$$8,\ 4,\ 6,\ 3, \quad \text{ἔνθα}$$
$$8 \times 3 = 4 \times 6.$$

Διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος διὰ 3×4 καὶ ἔχομεν

$$\frac{8 \times 3}{3 \times 4} = \frac{4 \times 6}{3 \times 4} \quad \text{ἢ}$$

$$8 : 4 = 6 : 3. \quad \text{Ἄρα}$$

Ὅταν τέσσαρες ἀριθμοὶ γεγραμμένοι κατὰ σειρὰν εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων νὰ ἰσῶται τῷ γινομένῳ τῶν μέσων, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καθ' ἣν τάξιν εἶναι γεγραμμένοι συνιστῶσιν ἀναλογίαν.

Πόρισμα. Δυνάμεθα νὰ ἐναλλάξωμεν τοὺς μέσους μιᾶς ἀναλογίας.

Ἐὰν ἔχωμεν ἀναλογίαν ἐπὶ μεγεθῶν, ἵνα ἀληθεύῃ τὸ πόρισμα, πρέπει προφανῶς πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας νὰ εἶναι μεγέθη ὁμοειδῆ.

γ') Θεωρήσωμεν ὁσασδήποτε ἀναλογίας· π. χ.

$$\alpha : \beta = \gamma : \delta$$
$$\varepsilon : \zeta = \eta : \theta$$
$$\iota : \kappa = \lambda : \mu$$

Ἐὰν αἱ ἀναλογίαι αὗται ὑπάρχωσιν ἐπὶ μεγεθῶν, ταῦτα θεωροῦνται μεμετρημένα καὶ παρεστημένα δι' ἀριθμῶν.

Τὰς ἀναλογίας ταύτας γράφομεν ὡς ἑξῆς·

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$$

$$\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\eta}{\theta}$$

$$\frac{\iota}{\kappa}=\frac{\lambda}{\mu}$$

ὅθεν λαμβάνομεν

$$\frac{\alpha\varepsilon\iota}{\beta\zeta\kappa}=\frac{\gamma\eta\lambda}{\delta\theta\mu} \quad \text{ἢ}$$

$\alpha\varepsilon\iota : \beta\zeta\kappa = \gamma\eta\lambda : \delta\theta\mu$. Ἄρα

Τὰ γινόμενα τῶν ὁμοταγῶν ὅρων ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν συνιστῶσιν ἀναλογίαν.

Ἀσκήσεις.

1) Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, οἷον τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.

2) Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἔχει λόγον πρὸς τὸν δεύτερον, οἷον ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων πρὸς τὸν τέταρτον.

3) Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, οἷον εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενόν του.

4) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος τῶν ἀναλογιῶν

α΄) $8 : 5 = 76 : \chi$

β΄) $\frac{2}{3} : \chi = 6 : 5$.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ζ'.

ΜΕΘΟΔΟΙ

252. *Μέθοδος* ἐν τῇ ἀριθμητικῇ λέγεται ὁ τρόπος, δι' οὗ λύονται προβλήματα ὡρισμένου εἴδους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

253. *Πρόβλημα α'*. 18 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 5 δρ.· πόσον τιμῶνται 7 πήχεις;

Λύσις. Ὁ 1 πῆχυς τιμᾶται $\frac{5}{18}$ δρ., ἄρα οἱ 7 πήχεις τιμῶνται $\frac{5}{18}\times 7$.

Τοὺς ἀγνώστους τῶν προβλημάτων παριστῶμεν συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ χ τὴν ἄγνωστον τοῦ προηγουμένου προβλήματος, ἔχομεν

$$\chi=\frac{5}{18}\times 7=1,94 \text{ δρ.}$$

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, εὕρομεν α' τὴν ἀξίαν τοῦ ἑνὸς πήχεως καὶ ἔπειτα τῶν πολλῶν, ἤτοι τῶν 7. Ἡ τοιαύτη ἐργασία λέγεται *ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα*.

Πρόβλημα β'. Χρειάζονται 25 πήχεις ὑφάσματος πλάτους 6 ῥουπ. διὰ τὴν κατασκευὴν φορέματος· πόσους πήχεις θὰ ἐχρειαζόμεθα, ἐὰν τὸ πλάτος ἦτο 5 ῥουπ.;

Λύσις. Καὶ ἐνταῦθα ὁ ἄγνωστος εὑρίσκεται διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς. Ὅταν τὸ πλάτος εἶναι 6 ῥουπ.

χρειαζόμεθα 25 πήχεις, ὅταν εἶναι 1 ῥουπ., χρειαζόμεθα 25×6 πήχεις, διότι τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα· ἄρα, ὅταν τὸ πλάτος εἶναι 5 ῥουπ., χρειαζόμεθα $\frac{25 \times 6}{5}$, ἤτοι

$$χ=\frac{25 \times 6}{5}=30 \text{ πήχεις.}$$

254. Ὁ τρόπος, δι' οὗ ἐλύσαμεν τὰ δύο ταῦτα προβλήματα, λέγεται *ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν* ἢ συντομώτερον *μέθοδος τῶν τριῶν*. Ἐν γένει

Κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν λύονται τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται νὰ μάθωμεν, τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβληθῇ ἄλλο ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον αὐτοῦ.

Λέγεται δὲ οὕτως ἡ μέθοδος αὕτη, διότι δίδονται τρεῖς ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τέταρτος.

Κανὼν πρακτικός.

255. Εἰς τὸ α΄ πρόβλημα διατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὴν ἄγνωστον ὡς ἑξῆς

18 πήχ.	5 δρ.
7	χ

ὡς δὲ ἐμάθομεν, ἔχομεν

$$χ=5 \times \frac{7}{18}.$$

Εἰς τὸ β΄ πρόβλημα διατάσσομεν ὁμοίως

6 ῥουπ. πλάτ.	25 πήχ. μῆκ.
5	χ

ἔχομεν δὲ $χ=25 \times \frac{6}{5}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ὁ κανών·

Γράφομεν εἰς μίαν σειρὰν τὰ ἰσοδύναμα δεδομένα ποσά· ἔπειτα εἰς ἄλλην σειρὰν κάτωθεν τὴν ἄγνωστον καὶ τὸ ἰσοδύνα-

μον αὐτῇ ποσόν, οὕτως ὥστε τὰ ὁμοειδῆ ποσὰ νὰ εἶναι ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν ἄνωθεν τῆς ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἔχομεν, χωρίζοντες δι' ὁριζοντίας γραμμῆς τὰ ὁμοειδῆ δεδομένα καὶ λαμβάνοντες αὐτὸ ἀντεστραμμένον μέν, ὅταν τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ὡς ἔχει δέ, ὅταν εἶναι ἀντίστροφα.

Σημ. Ἡ ἀναγωγὴ εἰς τὴν μονάδα, ἐξ ἧς προέκυψεν ὁ πρακτικὸς κανών, εἶναι *γενικωτέρα* τις μέθοδος, δι' ἧς λύονται καὶ προβλήματα μὴ ὑπαγόμενα εἰς τὴν μέθοδον τῶν τριῶν.

Λύσις διὰ τῶν ἀναλογιῶν.

256. *Πρόβλημα α')* 15 ὀκάδες σίτου τιμῶνται δρ. 3,60· πόσον τιμῶνται 6 ὀκάδες;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ βάρος τοῦ σίτου καὶ ἡ ἀξία του εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, πρέπει οἱ λόγοι 15 : 6 καὶ 3,60 : χ νὰ εἶναι ἴσοι, ἤτοι ὁ ἀριθμός, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ 15 δίδει γινόμενον 6, καὶ ὁ ἀριθμός, ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενος ὁ 3,60 δίδει τὸν χ. Ἄρα

$$15 : 6 = 3{,}60 : \chi \cdot \quad \text{ὅθεν}$$

$$\chi = \frac{6 \times 3{,}60}{15} = \text{δρ. } 1{,}45.$$

Πρόβλημα β') 18 ἐργάται σκάπτουσιν ἄμπελον εἰς 5 ἡμέρας· εἰς πόσας ἡμέρας θὰ τὴν σκάψωσιν 7 ἐργάται;

Λύσις. Ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν καὶ ὁ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα, θὰ εἶναι ἀντίστροφοι καὶ οἱ λόγοι 18 : 7 καὶ 5 : χ, ἤτοι, ἐὰν ὁ 18 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ α δίδῃ 7, ὁ 5 διαιρούμενος δι' α δίδει χ· ἄρα

$$7 : 18 = 5 : \chi \cdot \quad \text{ὅθεν}$$

$$\chi = \frac{5 \times 18}{7} = 13 \text{ ἐργάται.}$$

Παρατήρησις. Ὡς βλέπομεν, καὶ διὰ τῶν ἀναλογιῶν λύονται εὐκόλως τὰ προβλήματα ταῦτα· ἡ προηγουμένως ὅμως ἐκτεθεῖσα μέθοδος, στηριζομένη εἰς τὴν ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα, εἶναι φυσικωτέρα καὶ μᾶλλον εὔληπτος.

Ἀσκήσεις.

1) Πόσον τιμῶνται 118 ᾠὰ πρὸς δρ. 0,65 τὴν δωδεκάδα;

2) Φρουρὰ ἐξ 65 ἀνδρῶν ἔχει τροφὰς δι' 25 ἡμέρας· ἐὰν προστεθῶσι 40 ἄνδρες, ἐπὶ πόσας ἡμέρας θὰ διαρκέσωσιν αἱ τροφαί;

3) Ἔν τινι χώρᾳ εἰς διάστημα ἔτους συνέβησαν γεννήσεις 85672 καὶ θάνατοι 62300· πόσοι θάνατοι ἀναλογοῦσιν εἰς 100 γεννήσεις;

4) Ἀρτοποιὸς ἀνταλλάσσει ἄρτους μὲ δέματα φρυγάνων, ἅτινα τιμῶνται 35 δρ. τὰ ἑκατόν· πόσα δέματα θὰ λάβῃ, ἐὰν δώσῃ 120 ἄρτους τῶν 2 ὀκάδων, ὧν ἑκάστη τιμᾶται 40 λεπτά;

5) Δύο ἄνθρωποι ἠγόρασαν ἀπὸ κοινοῦ τεμάχιον ὑφάσματος μήκους 22 μέτρων ἀντὶ δρ. 128,60, ἐξ ὧν τὰς 62 δρ. ἐπλήρωσεν ὁ α'. Πόσα μέτρα θὰ λάβῃ ὁ α' καὶ πόσα ὁ β';

6) Ἁμαξοστοιχία διατρέχουσα 45 χιλιόμετρα τὴν ὥραν ἐχρειάσθη 7 ὥρ. 45π, ὅπως διατρέξῃ διάστημά τι· πόσα χιλιόμετρα ἔπρεπε νὰ διατρέχῃ τὴν ὥραν, ἵνα διατρέξῃ τὸ αὐτὸ διάστημα εἰς 5 ὥρας;

ΣΥΝΘΕΤΟΣ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ

257. ***Πρόβλημα α')*** Μὲ 25 ὀκάδας νήματος κατασκευάζεται ὕφασμα μήκους 22 πήχεων καὶ πλάτους 2 πήχεων. Πόσας ὀκάδας τοῦ αὐτοῦ νήματος χρειαζόμεθα διὰ τὴν κατασκευὴν ὁμοίου ὑφάσματος μήκους 15 πήχεων καὶ πλάτους 1 πήχεως;

Λύσις. Τὸ ζητούμενον ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος, εἶναι δὲ τὸ ποσὸν τοῦ νήματος ἀνάλογον πρὸς τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος. Ὅταν μόνον τὸ μῆκος μεταβληθῇ καὶ γίνῃ ἀπὸ 22 πήχεων 15 πήχεις, αἱ ὀκάδες κατὰ τὸν κανόνα (§ 255) γίνονται $25\times\frac{15}{22}$. Όταν δ' έπειτα καὶ τὸ πλάτος ἀπὸ 2 πήχεων γίνῃ 1 πῆχυς, αἱ ὀκάδες, αἵτινες θὰ ἦσαν τότε αἱ ζητούμεναι, θὰ ἐγίνοντο

$$\chi=25\times\frac{15}{22}\times\frac{1}{2}=8 \text{ ὀκ. } 209 \text{ δράμ.}$$

Πρόβλημα β') 15 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἑκάστην σκάπτουσιν ἄμπελον εἰς 6 ἡμέρας. Πόσοι ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην θὰ σκάψωσιν αὐτὴν εἰς 5 ἡμέρας;

Λύσις. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐργατῶν εἶναι ἀντίστροφος πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἐργασίμων ὡρῶν τῆς ἡμέρας καὶ τὸ πλῆθος τῶν ἡμερῶν.

Ἐὰν αἱ ἐργάσιμοι ὧραι τῆς ἡμέρας ἀπὸ 8 γίνωσιν 9, τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν γίνεται $15\times\frac{8}{9}$. Ἐὰν δ' ἔπειτα καὶ αἱ ἡμέραι ἀπὸ 6 γίνωσι 5, τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν, ὅπερ θὰ εἶναι τὸ ζητούμενον, θὰ γίνῃ:

$$\chi=15\times\frac{8}{9}\times\frac{6}{5}=16 \text{ ἐργάται.}$$

Τὰ προηγούμενα προβλήματα, ὡς εἴδομεν, ἀναλύονται εἰς ἄλλα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Δι' ὃ ὁ τρόπος, καθ' ὃν ἐλύσαμεν ταῦτα, λέγεται ***σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν***. Ἄρα

Κατὰ τὴν σύνθετον μέθοδον τῶν τριῶν λύομεν τὰ προβλήματα, εἰς ἃ ζητεῖται, τί γίνεται ἓν ποσόν, ὅταν μεταβληθῶσι δύο ἢ πλείονα ἄλλα, πρὸς ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι ἀνάλογον ἢ ἀντίστροφον.

258. Εἰς τὸ α' πρόβλημα διατάσσομεν τὰ ποσὰ ὡς ἑξῆς·

25 ὀκ.	22 πήχ. μήκ.	2 πήχ. πλάτ.
χ	15	1

Εἴδομεν δὲ ὅτι

$$\chi=25\times\frac{15}{22}\times\frac{1}{2}$$

Εἰς τὸ β' διατάσσομεν ὁμοίως

15ἐργ.	8 ὥρ.	6 ἡμ.
χ	9	5

Εἴδομεν δὲ ὅτι

$$χ=15\times\frac{8}{9}\times\frac{6}{5}.$$ Ἄρα

Πρὸς λύσιν τῶν τοιούτων προβλημάτων γράφομεν εἰς δύο σειρὰς τὰ δεδομένα καὶ τὴν ἄγνωστον οὕτως, ὥστε τὰ μὲν ἰσοδύναμα νὰ εἶναι ἐν τῇ αὐτῇ σειρᾷ, τὰ δὲ ὁμοειδῆ ἐν τῇ αὐτῇ στήλῃ· νὰ εὑρίσκηται δὲ ἡ ἄγνωστος ἐν τῇ β' σειρᾷ. Πολλαπλασιάζομεν ἔπειτα τὸν ἄνωθεν τῆς ἀγνώστου ἀριθμὸν ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων, ἅτινα σχηματίζονται χωριζομένων τῶν ὁμοειδῶν ποσῶν δι' ὁριζοντίου γραμμῆς, λαμβάνοντες τὸ κλάσμα ὡς ἔχει ἢ ἀντεστραμμένον, καθ' ὅσον τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα ἢ ἀνάλογα.

259. Καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα δύνανται νὰ λύωνται τὰ τοιαῦτα προβλήματα, ὡς δεικνύομεν ἀμέσως.

Πρόβλημα γ') Ταχυδρόμος βαδίζων 6 ὥρας καθ' ἑκάστην διατρέχει εἰς 16 ἡμέρας 240 χιλιόμετρα. Ἐὰν βαδίζῃ 8 ὥρας καθ' ἑκάστην, εἰς πόσας ἡμέρας θὰ διατρέξῃ 180 χιλιόμετρα;

Λύσις. Ἐὰν βαδίζῃ 1 ὥραν καθ' ἑκάστην, θὰ χρειασθῇ ἡμέρας 16×6, ὅπως διατρέξῃ τὰ 240 χιλιόμετρα· ἄρα, ἐὰν βαδίζῃ 8 ὥρας, θὰ χρειασθῇ ἡμέρας $\frac{16\times6}{8}$.

Ἐπομένως δι' ἓν χιλιόμετρον θὰ χρειασθῇ ἡμέρας $\frac{16\times6}{8\times240}$ καὶ δι' 180 χιλιόμετρα θὰ χρειασθῇ

$$\frac{16\times6\times180}{8\times240}=9.$$

260. Καὶ διὰ τῶν ἀναλογιῶν λύονται τὰ προβλήματα ταῦτα· π. χ. εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ὑποθέτοντες ὅτι, ἐὰν βα-

δίζῃ 8 ὥρας καθ' ἑκάστην, χρειάζεται χ' ἡμέρας διὰ τὰ 240 χιλιόμετρα, ἔχομεν

(1) $$8 : 6 = 16 : \chi',$$

διότι ὧραι καὶ ἡμέραι ἐνταῦθα εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα. Ἐὰν λοιπὸν βαδίζῃ 8 ὥρας καθ' ἑκάστην, εἰς χ' ἡμέρας διατρέχει 240 χιλιόμετρα καὶ εἰς χ ἡμέρας 180 χιλιόμετρα. Ἐπειδὴ δὲ ἡμέραι καὶ χιλιόμετρα εἶναι ποσὰ ἀνάλογα, ἔχομεν

(2) $$240 : 180 = \chi' : \chi$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἀναλογιῶν ἔχομεν (§ 251. γ)

$$8\times 240 : 6\times 180 = 16\times\chi' : \chi'\times\chi \quad \text{ἢ}$$
$$8\times 240 : 6\times 180 = 16 : \chi \quad \text{ὅθεν}$$

$$\chi = \frac{6\times 180\times 16}{8\times 240} = 9 \text{ ἡμ.}$$

Ἀσκήσεις.

1) 25 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἑκάστην ὑφαίνουσιν εἰς 10 ἡμέρας 300 μέτρα ὑφάσματος πλάτους 0,95 μέτρ. Εἰς πόσας ἡμέρας 16 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην θὰ ὑφάνωσι 450 μέτρα πλάτους 1,4 μέτρ.;

2) Ἐργολάβος ὀφείλει νὰ περατώσῃ οἰκοδομὴν εἰς 60 ἡμέρας, πρὸς τοῦτο δὲ χρειάζεται 20 ἐργάτας ἐργαζομένους 8 ὥρας καθ' ἑκάστην. Ἐὰν θέλῃ νὰ τελειώσῃ τὸ ἔργον 20 ἡμέρας ἐνωρίτερον δι' ἐργατῶν ἐργαζομένων 2 ὥρας ἐπὶ πλέον τὴν ἡμέραν, πόσους νέους ἐργάτας πρέπει νὰ προσλάβῃ;

3) Προκειται νὰ σκαφῇ τάφρος μήκους 300 μέτρων. Πρὸς τοῦτο προσλαμβάνονται 8 ἐργάται, οἵτινες ἐργαζόμενοι 9 ὥρας καθ' ἑκάστην σκάπτουσιν εἰς 12 ἡμέρας τὰ 200 μέτρα· εἶτα προστίθενται 4 ἔτι ἐργάται καὶ 3 ὧραι εἰς τὰς ἐργασίμους ὥρας τῆς ἡμέρας. Πόσαι ἡμέραι ἔτι θὰ χρειασθῶσιν, ὅπως τελειώσῃ ἡ ἐκσκαφὴ τῆς τάφρου;

4) Δεξαμενὴ ὀρθογώνιος ἔχουσα βάθος, μῆκος καὶ πλάτος πάντα ἴσα πρὸς 1 μέτρον χωρεῖ 780 ὀκάδας ὕδατος. Πόσας ὀκάδας ἐλαίου ἔχοντος εἰδικὸν βάρος 0,9 χωρεῖ τοιαύτη δεξαμενὴ ἔχουσα βάθος 2 μέτρ. μῆκος 1,8 μέτρ. καὶ πλάτος 1, 4 μέτρ.;

5) Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα νὰ εὑρεθῇ πόσον βάθος πρέπει νὰ ἔχῃ μία τοιαύτη δεξαμενή, διὰ νὰ χωρῇ 10000 ὀκ. τοῦ αὐτοῦ ἐλαίου, ὅταν τὸ μὲν μῆκος αὐτῆς εἶναι 2,5, τὸ δὲ πλάτος 1,6 μέτρ.

6) Δύο τάπητες τῆς αὐτῆς ποιότητος τιμῶνται ὁ μὲν α′ δρ. 100, ὁ δὲ β′ δρ. 120, ἔχουσι δὲ ὁ μὲν α′ μῆκος 8 πήχεων, 5 ῥουπίων καὶ πλάτος 5 πήχεων, 6 ῥουπίων. Ὁ δὲ β′ μῆκος 10 πήχεων καὶ πλάτος 6 πήχεων. Τίς τῶν δύο εἶναι εὐθηνότερος καὶ κατὰ πόσον;

Συνεζευγμένη μέθοδος.

261. *Πρόβλημα α′)* Πρὸς πόσους τόννους ἰσοδυναμοῦσιν 25000 ἑνετικαὶ λίτραι γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1000 ἑνετικαὶ λίτραι ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 375 ὀκάδας, ἡ ὀκᾶ πρὸς 400 δράμια, τὰ 312 δράμια πρὸς 1 χιλιόγραμμον καὶ 1000 χιλιόγραμμα πρὸς 1 τόννον;

Τὸ πρόβλημα συντόμως γράφεται

$$\begin{array}{rcl} \chi \text{ τόν.} &=& 25000 \text{ ἑν. λ.} \\ 1000 \text{ ἑν. λ.} &=& 375 \text{ ὀκ.} \\ 1 \text{ ὀκ.} &=& 400 \text{ δράμ.} \\ 312 \text{ δράμ.} &=& 1 \text{ χιλιόγρ.} \\ 1000 \text{ χιλιόγρ.} &=& 1 \text{ τόν.} \end{array}$$

Λύσις. Εὑρίσκομεν α′ πρὸς πόσους τόν. ἰσοδυναμεῖ 1 χιλιόγρ. λύοντες τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

1000 χιλιόγρ. ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 1 τόννον· πρὸς πόσους τόννους ἰσοδυναμεῖ 1 χιλιόγραμμον;

Εὑρίσκομεν οὕτως ὅτι

$$1 \text{ χιλιόγρ.} = 1 \times \frac{1}{1000} \text{ τόν.}$$

Ὁμοίως γνωρίζοντες ἤδη ὅτι 1 χιλιόγραμμον ἢ 312 δράμια ἰσοδυναμοῦσι πρὸς $1 \times \frac{1}{1000}$ τόν. εὑρίσκομεν ὅτι

$$400 \text{ δράμ. ἢ } 1 \text{ ὀκ.} = 1 \times \frac{1}{1000} \times \frac{400}{312} \text{ τόν.}$$

Ὁμοίως ὅτι

$$375 \text{ ὀκ. ἢ } 1000 \text{ έν. λ.} = 1 \times \frac{1}{1000} \times \frac{400}{312} \times \frac{375}{1} \text{ τόν.}$$

καὶ τέλος ὅτι

$$25000 \text{ έν. λ.} = 1 \times \frac{1}{1000} \times \frac{400}{312} \times \frac{375}{1} \times \frac{25000}{1000} \text{ τόν. ἢ}$$

$$\chi = \frac{1 \times 1 \times 400 \times 375 \times 25000}{1000 \times 312 \times 1 \times 1000} = 12{,}019 \text{ τόν.}$$

Πρόβλημα β') Ἔμπορος ἐν Τεργέστῃ ἐπρομηθεύθη σταφίδα ἐκ Πατρῶν ἀγοράσας αὐτὴν πρὸς 120 δρ. τὴν χιλιάδα (ἐν. λιτρῶν) καὶ δαπανήσας διὰ ναῦλον καὶ φόρους 30 τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς. Πόσας κορώνας τῷ στοιχίζει τὸ χιλιόγραμμον ἐν Τεργέστῃ, ἐὰν 19 κορ. = 21 δραχ.;

Λύσις. Διατάσσομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

χ κορ.	=	1 χιλιόγρ.
1 χιλιόγρ.	=	312 δράμ.
150 δράμ.	=	1 ἐν. λιτ.
1000 ἐν. λ.	=	120 δραχ.
21 δραχ.	=	19 κορ.
πρὸ τῶν ἐξόδων 100 κορ.	=	130 κορ. μετὰ τὰ ἔξοδα.

Εἶτα ἐργαζόμεθα ὡς καὶ εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα καὶ ἔχομεν

$$\chi = \frac{130 \times 19 \times 120 \times 1 \times 312}{100 \times 21 \times 1000 \times 150} = 0{,}293 \text{ κορ. ἢ } 29{,}3 \text{ χέλλερ.}$$

262. Καὶ τὰ προβλήματα ταῦτα ἀναλύονται εἰς ἄλλα προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἡ δὲ μέθοδος, δι' ἧς ταῦτα λύονται, δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς σύνθετος μέθοδος τῶν

τριῶν, καίτοι ἐνταῦθα ἄλλως γίνεται ἡ διάταξις τῶν δεδομένων καὶ τῆς ἀγνώστου· ἐν τούτοις φέρει ἴδιον ὄνομα, καλουμένη *συνεζευγμένη μέθοδος*. Σκοπὸν δὲ ἔχει νὰ τρέψῃ ποσὸν εἴδους τινὸς εἰς ποσὸν διαφόρου εἴδους.

263. Ἐκ τῆς λύσεως τῶν προηγουμένων προβλημάτων ἕπεται ὁ κανών·

Γράφομεν τὸν ἄγνωστον καὶ δεξιὰ αὐτοῦ τὸ ἰσοδύναμον αὐτῷ ποσόν· κάτωθεν δὲ γράφομεν ὑπ' ἄλληλα τὰ ζεύγη τῶν ἰσοδυνάμων ποσῶν, οὕτως ὥστε ἑκάστη σειρὰ νὰ ἀρχίζῃ μὲ τὸ εἶδος, εἰς ὃ τελειώνει ἡ προηγουμένη. Ἐὰν τὰ δεδομένα εἶναι ἐπαρκῆ, τότε τὸ τελευταῖον ποσὸν θὰ εἶναι ὁμοειδὲς τῷ ἀγνώστῳ. Εἶτα σχηματίζομεν τὸ γινόμενον πάντων τῶν πρὸς τὰ δεξιὰ ἀριθμῶν καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ τοῦ γινομένου πάντων τῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ ὑπὸ τὸν ἄγνωστον ἀριθμῶν, ἔχομεν δὲ τότε τὸ ζητούμενον.

Σημ. Χρῆσις τῆς μεθόδου ταύτης γίνεται κυρίως εἰς τὰς μετὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ συναλλαγάς.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ τραπῶσι 36,60 δρ. εἰς γρόσια ἀγοραῖα Σμύρνης δεδομένου ὅτι τὸ χρυσοῦν εἰκοσόφραγκον ἔχει τρέχουσαν ἀξίαν ἐν Ἑλλάδι μὲν δρ. 20,50, ἐν Σμύρνῃ δὲ γρόσ. 157.

2) Νὰ τραπῶσιν 85,60 δρ. εἰς ῥούβλια δεδομένου ὅτι 20,50 δραχ.=20 φρ. χρ. καὶ 130 φρ. χρ.=33 ῥούβλ.

3) Ἔμπορος ἐν Ἑλλάδι ἐπρομηθεύθη ἐκ Μασσαλίας 1600 μέτρα ὑφάσματος ἀγοράσας αὐτὸ πρὸς 2 φρ. χρ. τὸ μέτρον, ἐδαπάνησε δὲ διὰ ναῦλον καὶ φόρους 25 τοῖς ἑκατόν· ἐὰν ἐν Ἑλλάδι 20 φρ. χρ.=20,50, ἀντὶ πόσων δραχμῶν πρέπει νὰ πωλῇ τὸν πῆχυν, διὰ νὰ κερδίσῃ 10 τοῖς ἑκατόν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΚΟΥ

Ὁρισμοί.

264. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος, ὅπερ ἀπολαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.

Τὸ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται *κεφάλαιον*.

Ἐπιτόκιον δὲ λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 νομισματικῶν μονάδων· π. χ. τῶν 100 δρ. εἰς ἓν ἔτος. Ἐκφράζομεν δὲ αὐτὸ συνήθως λέγοντες **πρὸς τόσον τοῖς ἑκατόν**, π. χ. πρὸς 5 τοῖς ἑκατόν, ὅπερ γράφομεν συντόμως 5 %.

Ὁ τόκος εἶναι *ἁπλοῦς* ἢ *σύνθετος*. *Ἁπλοῦς* λέγεται, ὅταν καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου τὸ κεφάλαιον μένει σταθερόν· *σύνθετος* δέ, ὅταν εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ἢ ἄλλου χρονικοῦ διαστήματος ὁ τόκος προστίθηται εἰς τὸ κεφάλαιον, ὅπερ οὕτως ηὐξημένον τοκίζεται διὰ τὸ ἑπόμενον χρονικὸν διάστημα. Π. χ. ἐάν τις δανείσῃ 100 δρ. πρὸς 10 % μὲ ἁπλοῦν τόκον, θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ 1 ἔτος δρ. 110 (κεφ. καὶ τόκον), μετὰ 2 ἔτη δρ 120, μετὰ 3 ἔτη δρ. 130 κ.τ.λ. Ἐὰν ὅμως ὁ τόκος κατ' ἔτος προστίθηται εἰς τὸ κεφάλαιον, θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ ἓν ἔτος πάλιν δρ. 110, ἀλλὰ τὸ κεφάλαιον τοῦ β' ἔτους εἶναι δρ. 110 καὶ ὁ τόκος αὐτοῦ δρ. 11, ἄρα μετὰ 2 ἔτη θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ δρ. 121· ὁμοίως μετὰ 3 ἔτη δρ. 133,10 κ.τ.λ. Ἐνταῦθα θὰ εἴπωμεν μόνον περὶ ἁπλοῦ τόκου.

Γραμμάτιον λέγεται ἡ γραπτὴ ὑπόσχεσις τοῦ δανειζομένου περὶ πληρωμῆς τοῦ χρέους του ἐντὸς ὡρισμένης προθεσμίας. *Μέλλουσα* δὲ ἀξία τοῦ γραμματίου τὸ ἄθροισμα τοῦ τόκου καὶ τοῦ κεφαλαίου.

Λύσις τῶν προβλημάτων τόκου.

265. Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις· α′) ὅταν ὁ τόκος θεωρῆται μεμονωμένος· β′) ὅταν θεωρῆται ἡνωμένος μετὰ τοῦ κεφαλαίου.

Α′ περίπτωσις.

Εἰς τὰ προβλήματα ταῦτα εἰσέρχονται 4 ποσά, τὸ κεφάλαιον, ὁ τόκος, τὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁ χρόνος· παριστῶμεν δὲ αὐτὰ συντόμως τὸ α′ διὰ κ., τὸ β′ διὰ τ., τὸ γ′ δι' ε. καὶ τὸ δ′ διὰ χ.

Διακρίνομεν δὲ 4 εἴδη προβλημάτων, καθ' ὅσον ζητεῖται ἓν τούτων δεδομένων τῶν λοιπῶν τριῶν. Ὁ τ. προφανῶς εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ κ., τὸ ε. καὶ τὸν χ. Τὸ κ. ὅμως καὶ ὁ χ. εἶναι ἀντίστροφα. Δι' ὃ τὰ προβλήματα ταῦτα λύονται διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

Πρόβλημα α′) Πόσον τ. φέρουσιν 650 δρχ. εἰς 5 ἔτη πρὸς 10 %;

Λύσις. Τὸ πρόβλημα δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν ὡς ἑξῆς·

100 δρ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τ. 10 δρ.· αἱ 650 δρ. εἰς 5 ἔτη πόσον τ. φέρουσι;

Κατὰ τὸν κανόνα (§ 258) ἔχομεν

$$\tau. = \frac{650 \times 10 \times 5}{100} = 325 \text{ δρ.}$$

Εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο φθάνομεν καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα ὡς ἑξῆς·

Αἱ 100 δρ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τόκον 10 δρ., ἄρα ἡ 1 δρ. εἰς 1 ἔτος φέρει δρ. $\frac{10}{100}$, αἱ δὲ 650 δρ. φέρουσιν

$$650 \times \frac{10}{100} \text{ καὶ εἰς 5 ἔτη } \frac{650 \times 10 \times 5}{100}.$$

Γενικῶς θὰ ἔχωμεν

$$\tau = \frac{\kappa . \varepsilon . \chi}{100},$$

ὅταν ὁ χ λογίζηται εἰς ἔτη. Ἐὰν εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα ὁ χρόνος ἦτο οὐχὶ 5 ἔτη, ἀλλὰ 5 μῆνες, ὁ τ. θὰ ἦτο 12άκις μικρότερος, ἤτοι

$$\frac{650\times10\times5}{1200},$$

ἐὰν δὲ ὁ χ. ἦτο 5 ἡμέραι, ὁ τ. θὰ ἦτο

$$\frac{650\times10\times5}{36000},$$

τοῦ ἔτους ὑπολογιζομένου ἐνταῦθα εἰς 360 ἡμέρας. Ἄρα

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου πολλαπλασιάζομεν τὰ τρία δεδομένα ποσὰ κ., ε., χ. καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, μῆνες ἢ ἡμέραι.

Πρόβλημα β') Πόσαι δραχ. εἰς 3 ἔτη πρὸς 9 % φέρουσι τ. 60 δραχ.;

Λύσις. Ἐκφράζομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

100 δρ. εἰς 1 ἔτος φέρουσι τ. 9 δρ.· πόσαι δρ. εἰς 3 ἔτη φέρουσιν 60 δρ.;

Κατὰ τὸν αὐτὸν κανόνα (§ 258) ἔχομεν

$$κ=\frac{60\times100}{9\times3}=222{,}22 \text{ δρ.}$$

Εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον φθάνομεν καὶ διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα. Γενικῶς, ὁσάκις ὁ χρόνος λογίζεται εἰς ἔτη, ἔχομεν

$$κ=\frac{100.τ}{ε.χ}.$$

Ἐὰν ὁ χ. ἦτο 3 μῆνες, τὸ κ. θὰ ἦτο 12άκις μεῖζον, ἤτοι

$$\frac{60\times1200}{9\times3},$$

ἐὰν δὲ 3 ἡμέραι, θὰ ἦτο

$$\frac{60\times36000}{9\times3}.$$

Ἄρα

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ κ. πολλαπλασιάζομεν τὸν τ. ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, μῆνες ἢ ἡμέραι, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ χ. ἐπὶ τὸ ε.

Πρόβλημα γ') Εἰς πόσον χ. 360 δρ. πρὸς 10 % φέρουσι τόκον δρ. 72;

Λύσις. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὰ προηγούμενα προβλήματα ἔχομεν

$$χ=\frac{72\times100}{360\times10}=2 \text{ ἔτη·}$$

καὶ γενικῶς, ὁσάκις ζητοῦμεν ἔτη, θὰ ἔχωμεν

$$χ=\frac{100.τ}{κ.ε}.$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν ἐζητοῦμεν μῆνας, θὰ εἴχομεν

$$\frac{72\times1200}{360\times10}.$$

ἐὰν δὲ ἡμέρας,

$$\frac{72\times36000}{360\times10}.$$

Ἄρα

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ. πολλαπλασιάζομεν τὸν τ. ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ζητοῦμεν ἔτη, μῆνας ἢ ἡμέρας, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κ. ἐπὶ τὸ ε.

Πρόβλημα δ') Πρὸς ποῖον ε. 650 δραχ. εἰς 5 ἔτη φέρουσι τ. 45 δρ.;

Λύσις. Ἐκφράζομεν τὸ πρόβλημα ὡς ἑξῆς·

650 δρ. εἰς 5 ἔτη φέρουσι τ. 45 δρ.· αἱ 100 δρ. εἰς 1 ἔτος πόσον τ. φέρουσιν;

Καὶ εὑρίσκομεν

$$ε=\frac{45\times100}{650\times5}=δρ.\ 1{,}38$$

καὶ γενικῶς, ὁσάκις ὁ χ. εἶναι ἔτη,

$$ε=\frac{100.τ}{κ.χ}.$$

Ἀντὶ 100 θὰ ἔχωμεν 1200, ἐὰν ὁ χ. ἦτο μῆνες, καὶ 36000, ἐὰν ἡμέραι. Ἄρα

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ε. πολλαπλασιάζομεν τὸν τ. ἐπὶ 100 ἢ 1200 ἢ 36000, καθ' ὅσον ὁ χρόνος εἶναι ἔτη, μῆνες ἢ ἡμέραι, καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ γινομένου τοῦ κ. ἐπὶ τὸν χ.

Β' περίπτωσις.

266. Καὶ ἐνταῦθα διακρίνομεν 4 εἴδη προβλημάτων, καθ' ὅσον ζητεῖται ἡ μέλλουσα ἀξία ἢ τὸ κ. ἢ ὁ χ. ἢ τὸ ε.

Πρόβλημα α') Ἐδάνεισέ τις 550 δρ. δι' 6 ἔτη πρὸς 10 %. Πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ ἐν ὅλῳ (τ. καὶ κ.) εἰς τὸ τέλος τῶν 6 ἐτῶν;

Λύσις. Εὑρίσκομεν τὸν τ.=330 δραχ.· ἄρα ἡ μέλλουσα ἀξία εἶναι

$$550+330=880 \text{ δρ.}$$

Πρόβλημα β') Εἰς πόσον χ. 640 δρ. τοκιζόμεναι πρὸς 8 % γίνονται δρ. 1000;

Λύσις. Ὁ τ. εἶναι 1000—640=360 δρ.· ἐπομένως τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς·

Εἰς πόσον χ. 640 δρ. πρὸς 8 % φέρουσι τ. δρ. 360;

Καὶ εὑρίσκομεν χ.=7 ἔτη, 11 ἡμ. Καθ' ὅμοιον τρόπον λύομεν καὶ τὸ ἑπόμενον

Πρόβλημα γ') Πρὸς ποῖον ε. 2500 δραχμαὶ γίνονται εἰς 5 ἔτη 2860 δρ.;

Πρόβλημα δ') Πόσον κ. εἰς 9 μῆνας πρὸς 6 % γίνεται 1000 δρ.;

Λύσις. Ὁ τ. τοῦ κ. εἶναι $\frac{\kappa.9\times 6}{1200}$· ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\kappa+\frac{54\kappa}{1200}=1000.$$

Ὅθεν κ.=δρ. 956,93.

ΣΤΑΘΕΡΟΙ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΑΙ ΚΑΙ ΔΙΑΙΡΕΤΑΙ.

ΤΟΚΑΡΙΘΜΟΙ

267. Ἕνεκα τῆς μεγάλης χρήσεως τῶν προβλημάτων τοῦ τόκου ἐπενοήθησαν σύντομοι μέθοδοι πρὸς λύσιν αὐτῶν δι' ὡρισμένα ἐπιτόκια. Αἱ μέθοδοι αὗται ἐξαρτῶνται ἐκ τῶν κανόνων, οὓς ἐγνωρίσαμεν.

Πρόβλημα. Πόσον τ. φέρουσι 600 δρ. εἰς 8 ἡμ. πρὸς 9 %;

Λύσις. Ὡς γνωρίζομεν, τ.$=\frac{600\times8\times9}{36000}=\frac{600\times8}{36000:9}=\frac{600\times8}{4000}$. Ἐντεῦθεν βλέπομεν ὅτι τοῦ χρόνου λογιζομένου εἰς ἡμέρας, ὁσάκις τὸ ε. εἶναι 9, πρὸς εὕρεσιν τοῦ τ. πολλαπλασιάζομεν τὸ κ. ἐπὶ τὰς ἡμέρας καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ 4000.

Ὁ ἀριθμὸς 4000 λέγεται *σταθερὸς διαιρέτης*.

Ἐὰν τὸ ε. εἶναι 12, ὁ σταθερὸς διαιρέτης εἶναι

$$36000 : 12 = 3000.$$

Τὸ γινόμενον τοῦ κ. ἐπὶ τὰς ἡμέρας λέγεται *τοκάριθμος*. Ἄρα *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ τ. διαιροῦμεν τὸν ἀντιστοιχοῦντα τοκάριθμον διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος σταθεροῦ διαιρέτου.*

Σημ. Ἡ μέθοδος αὕτη χρησιμοποιεῖται, ὅταν ὁ χ. λογίζηται εἰς ἡμέρας.

Οἱ σταθεροὶ διαιρέται χρησιμοποιοῦνται ὡς *σταθεροὶ πολλαπλασιασταί*, ὅταν ὁ τ. εἶναι δεδομένος, ζητεῖται δὲ τὸ κ. ἢ ὁ χ. Τῳόντι παριστῶντες διὰ Δ τὸν ἀντίστοιχον σταθερὸν διαιρέτην ἔχομεν

$$\kappa=\frac{\tau.36000}{\varepsilon.\chi.}=\frac{(36000:\varepsilon.).\tau.}{\chi.}=\frac{\Delta.\tau.}{\chi.}\,.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\Delta.\tau.}{\kappa.}.$$

Πίναξ σταθερῶν διαιρετῶν.

ε	Δ	ε	Δ
1	36000	4,5	8000
1,5	24000	5	7200
2	18000	6	6000
3	12000	9	4000
4	9000	12	3000

ΑΝΑΓΩΓΗ ΠΟΛΛΩΝ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ ΕΙΣ ΕΝ

268. *Πρόβλημα α')* Ἐδάνεισέ τις 500 δρ. πρὸς 8 %, 400 δρ. πρὸς 6 % καὶ 1000 δρ. πρὸς 10 %· πρὸς ποῖον ε. ἔπρεπε νὰ δανείσῃ καὶ τὰ τρία ποσὰ ὁμοῦ, ὥστε νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἐτήσιον τ.;

Λύσις. Ἐκ τῶν τριῶν δανείων ἔχει ἐτήσιον τ. δρ. 164· ἐπομένως τὸ ζητούμενον ε. εἶναι

$$\frac{164 \times 100}{1900 \times 1} = 8,63,$$

ἔνθα $1900 = 500 + 400 + 1000$.

Πρόβλημα β') Ἔχοντες τὰ δεδομένα τοῦ προηγουμένου προβλήματος ζητοῦμεν πόσας δρ. ἔπρεπε νὰ δανείσῃ πρὸς 9 %, ἵνα ἔχῃ τὸν αὐτὸν ἐτήσιον τ.

Λύσις. $x = \frac{164 \times 100}{9 \times 1} = 1822,22$ δρ.

'Ασκήσεις.

1) Πόσον τ. φέρουσι 1565,85 δρ. πρὸς 12 $^0/_0$ α' εἰς 5 ἔτη, β' εἰς 8 μῆνας, γ' εἰς 8 ἡμ., δ' εἰς 5 ἔτη καὶ 4 μῆνας;

2) Ποῖον κ. εἰς 5 μῆν. πρὸς 5,5 $^0/_0$ φέρει τ. 160,5 δρ.;

3) Πρὸς ποῖον ε. 265,5 δρ. εἰς 5 ἔτη καὶ 8 μῆνας φέρουσι τ. δρ. 14,5;

4) Εἰς πόσον χ. 450 δρ. πρὸς 8,45 $^0/_0$ φέρουσι τ. δρ. 60,60;

5) Εἰς πόσον χ. διπλασιάζεται ἓν κ. τοκιζόμενον πρὸς 9 $^0/_0$;

6) Πόσον κ. ἐπὶ 10 ἔτη πρὸς 10 $^0/_0$ γίνεται δρ. 10000;

7) Εἰς πόσον χ. 250,6 δρ. πρὸς 12 $^0/_0$ γίνονται 1000;

8) Πρὸς ποῖον ε. 1000 δρ. εἰς 8 ἔτη καὶ 9 μῆνας γίνονται 800,40;

9) Δανείζει τις τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς κ. πρὸς 6 $^0/_0$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ πρὸς 9 $^0/_0$. Ἔχει δὲ ἐκ τῶν δύο ἐτήσιον τ. δρ. 62· πόσον εἶναι ὅλον τὸ κ.;

Λύσις. Τὸ κεφάλαιον εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{2\chi}{3}\times\frac{6}{100}+\frac{\chi}{3}\times\frac{9}{100}=62.$$

10) Ἐκ τοῦ κ., ὅπερ ἔχει τις, δανείζει τὰ $\frac{3}{5}$ πρὸς 10 $^0/_0$, τὰ δὲ λοιπὰ πρὸς 8 $^0/_0$, λαμβάνει δὲ μετὰ 1 ἔτος τόκους καὶ κεφάλαια ὁμοῦ δρ. 1080. Πόσον κ. εἶχεν;

11) Ἐτόκισέ τις τὰ χρήματά του ἐπὶ 5 ἔτη καὶ 4 μῆνας πρὸς 10 $^0/_0$. Ἔπειτα ἀποσύρας αὐτὰ μετὰ τοῦ τ. ἐτόκισεν ὅλα ὁμοῦ πρὸς 9 $^0/_0$ καὶ ἔχει ἐτήσιον τ. δρ. 1150. Πόσον ἦτο τὸ ἀρχικὸν κ.;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΥΦΑΙΡΕΣΕΩΣ

269. *Ὑφαίρεσις* λέγεται ἡ ποσότης, καθ' ἣν ἐκπίπτει ἡ ἀξία γραμματίου ἐξαργυρουμένου πρὸ τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας.

Ἐν Ἑλλάδι ὁ ἐξαργυρώνων τὸ γραμμάτιον ὑπολογίζει τὸν τόκον τῆς μελλούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς ἐξαργυρώσεως μέχρι τῆς ἡμέρας τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου ἐπὶ τῇ βάσει συμφωνηθέντος ε. καὶ τὸν τ. τοῦτον κρατεῖ ὡς ὑφαίρεσιν· τὸ δὲ ὑπόλοιπον, καλούμενον *παροῦσαν* ἀξίαν τοῦ γραμματίου, δίδει εἰς τὸν κάτοχον αὐτοῦ. Ἄρα τὰ προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως, ὡς αὕτη γίνεται ἐν Ἑλλάδι, εἶναι προβλήματα τόκου· μόνον ἀντὶ τῆς λέξεως *τόκος* θὰ λέγωμεν *ὑφαίρεσιν*.

270. *Πρόβλημα α')* Γραμμάτιον 580 δρ. ἐξαργυροῦται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως πρὸς 5 $^0/_0$. Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεσις;

Λύσις. Αὕτη εἶναι ὁ τ. τῶν 580 δρ. εἰς 4 μῆνας πρὸς 5 $^0/_0$, ἤτοι

$$\frac{580\times4\times5}{1200}=\delta\rho.\ 9{,}66,$$

ἡ δὲ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου εἶναι

$$580-9{,}66=\delta\rho.\ 570{,}34.$$

Ὁμοίως ὡς προβλήματα τόκου λύονται καὶ τὰ ἑξῆς·

Πρόβλημα β') Πρὸς πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐγένετο ἡ ἐξαργύρωσις γραμματίου 600 δρ. ἐξαργυρωθέντος 12 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ὑφαίρεσιν 6 δρ.;

Πρόβλημα γ') Γραμμάτιον 550 δρ. ἐξηργυρώθη μὲ ὑφαίρεσιν 28 δρ. πρὸς 5 $^0/_0$. Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του ἐγένετο ἡ ἐξαργύρωσις;

Πρόβλημα δ') Ἐπὶ γραμματίου ἐξαργυρωθέντος 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0/_0$ ἐγένετο κράτησις 40 δρ.· πόσον ἦτο τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου;

271. Συνήθως ὁ ἐξαργυρώνων τὸ γραμμάτιον κρατεῖ πλὴν τοῦ τόκου, ὃν εἴπομεν, καὶ ποσόν τι λόγῳ προμηθείας, ἥτις ὁρίζεται ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου πρὸς τόσον τοῖς ἑκατὸν ἀνεξαρτήτως τοῦ χρόνου.

Πρόβλημα. Γραμμάτιον 480 δρ. ἐξαργυροῦται 2 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ὑφαίρεσιν πρὸς 6 % καὶ προμήθειαν 0,5 %. Πόση ἡ ὁλικὴ κράτησις;

Λύσις. Ὑφαίρ.=δρ. 4,80

$$\text{προμήθ.}=\frac{480\times 0{,}5}{100}=2{,}40$$

Ὁλικὴ κράτ.=δρ. 7,20

ΥΦΑΙΡΕΣΙΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΗ

272. Εἰς τὸ α′ πρόβλημα τοῦ ἐδαφ. 270 ὁ ἐξαργυρώνων τὸ γραμμάτιον τῶν 580 δρ. μετρεῖ εἰς τὸν φέροντα αὐτὸ δρ. 570,34, κρατεῖ ὅμως τὸν τόκον τῶν 580 δρ., ὅπερ ἄδικον. Ἐν Εὐρώπῃ ὅμως συνηθίζεται δικαιότερον νὰ κρατῶσι τὸν τόκον τῆς παρούσης ἀξίας, λέγεται δὲ ἡ τοιαύτη ὑφαίρεσις *ἐσωτερική*, ἡ δὲ προηγουμένως ἐκτεθεῖσα *ἐξωτερική*.

Πρόβλημα. Γραμμάτιον 580 δρ. ἐξαργυροῦται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 5 %· πόση ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

Λύσις. Ἔστω υ ἡ ζητουμένη ὑφαίρεσις· ἡ παροῦσα ἀξία εἶναι 580—υ· ἐπειδὴ δὲ υ εἶναι ὁ τόκος τοῦ 580—υ, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{(580-\upsilon)\times 4\times 5}{1200}=\upsilon.$$

Ὅθεν υ=δρ. 9,50.

Ἡ ἐξωτ. ὑφ. εἶναι δρ. 9,66, μείζων τῆς ἐσωτ. κατὰ δρ. 0,16.

Ἡ παροῦσα ἀξία εἶναι δρ. 580—9,50=δρ. 570,50. Ἠδυνάμεθα ὅμως καὶ ἀπ᾽ εὐθείας νὰ ζητήσωμεν αὐτήν. Τῷ ὄντι, ἐὰν παραστήσωμεν αὐτὴν διὰ π, ἡ ἐσωτ. ὑφ. θὰ εἶναι 580—π. Ἐπειδὴ δὲ 580—π εἶναι ὁ τόκος τοῦ π, ἔχομεν

$$\frac{4 \times 5\pi}{1200} = 580 - \pi,$$

ὅθεν π=δρ. 570,50.

273. Τὰ προβλήματα, ἐν οἷς εἶναι δεδομένη ἡ ἐσωτ. ὑφ., ζητεῖται δὲ ἡ παροῦσα ἢ ἡ μέλλουσα ἀξία τοῦ γραμματίου ἢ ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιον τῆς ἐξαργυρώσεως, ἀνάγονται εἰς προβλήματα τόκου.

Ἀσκήσεις.

1) Γραμμάτιον 560 δρ. ἐξαργυροῦται 3 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 6 $^0/_0$, ὑφαίρεσιν ἐξωτερικὴν καὶ προμήθειαν 0,5 $^0/_0$· πόση ἡ ὁλικὴ κράτησις;

2) Νὰ λυθῇ τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ὅταν ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ἐσωτερική.

3) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως τοῦ αὐτοῦ γραμματίου εἶναι ἀκριβῶς ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

4) Ποία εἶναι ἡ μέλλουσα ἀξία γραμματίου, ὅπερ ἐξαργυροῦται 5 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 4 $^0/_0$ ἀντὶ δρ. 1000 (παροῦσα ἀξία) μὲ ὑφαίρεσιν ἐξωτερικήν;

5) Πόσον χρόνον πρὸ τῆς λήξεώς του ἐξαργυροῦται γραμμάτιον 650 δραχ. πρὸς 9 $^0/_0$ μὲ ὑφαίρεσιν ἐσωτερικὴν δρ. 28,60;

6) Γραμμάτιον 360 δρ. ἐξαργυροῦται 6 μῆνας πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ δρ. 345,5 μὲ ὑφ. ἐσωτ. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ προεξόφλησις;

7) Ποία ἡ μέλλουσα ἀξία γραμματίου, ὅπερ προεξοφλεῖται 4 μῆνας πρὸ τῆς λήξεως μὲ ὑφαίρεσιν ἐσωτερικὴν πρὸς 6 $^0/_0$ καὶ παροῦσαν ἀξίαν 1500 δρ.;

8) Ἔμπορος ἐπρομηθεύθη σῖτον, ἀντὶ δὲ χρημάτων δίδει γραμμάτιον 750 δρ. πληρωτέων μετὰ 8 μῆνας, τὸ ποσὸν δὲ

τοῦτο τοῦ γραμματίου περιλαμβάνει τὴν ἀξίαν τοῦ σίτου καὶ τὸν τόκον αὐτῆς ἐπὶ 8 μῆνας πρὸς 8 %. Μετὰ 6 μῆνας ὁ ἔμπορος ἐξοφλεῖ τὸ γραμμάτιον, ὁ δὲ πωλητὴς χαρίζει αὐτῷ τὸν τόκον τῶν δύο ὑπολειπομένων μηνῶν. Πόσας δρ. λαμβάνει ὁ πωλητής;

Λύσις. Εὑρίσκομεν α΄ τὴν παροῦσαν ἀξίαν τοῦ γραμματίου, β΄ τὸν τόκον αὐτῆς ἐπὶ 6 μῆνας καὶ προσθέτομεν ταῦτα.

ΠΕΡΙ ΚΟΙΝΗΣ ΛΗΞΕΩΣ

274. *Πρόβλημα α΄)* Ἔχει τις 3 γραμμάτια, τὸ α΄ 1000 δρ. πληρωτέων μετὰ 40 ἡμέρας, τὸ β΄ 600 δρ. πληρωτέων μετὰ 60 ἡμέρας καὶ τὸ γ΄ 800 δρ. πληρωτέων μετὰ 80 ἡμέρας· θέλει δὲ νὰ τὰ ἀντικαταστήσῃ δι᾽ ἑνὸς καὶ μόνου γραμματίου πληρωτέου μετὰ 50 ἡμέρας. Ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον τῆς προεξοφλήσεως εἶναι 6 %, ποῖον τὸ ποσὸν τοῦ ἑνιαίου γραμματίου;

Λύσις. Δύο περιπτώσεις θεωροῦμεν, καθ᾽ ὅσον ἡ προεξόφλησις γίνεται κατὰ τὴν ἐξωτερικὴν ἢ ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν.

Α΄ περίπτωσις.

Εὑρίσκομεν τὴν παροῦσαν ἀξίαν ἑκάστου γραμματίου, ἥτις εἶναι τοῦ α΄ δρ. 993,34, τοῦ β΄ δρ. 594 καὶ τοῦ γ΄ δρ. 789,34. Ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ἑνιαίου γραμματίου εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν = δρ. 2376,68.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τὴν μέλλουσαν ἀξίαν, ἤτοι τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου, παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν τὸ ποσὸν γραμματίου λήγοντος μετὰ 50 ἡμέρας εἶναι δρ. 100, ἡ παροῦσα αὐτοῦ ἀξία εἶναι

$$100 - \frac{100 \times 6 \times 50}{36000} = \text{δρ. } 99{,}17.$$

Ἑπομένως τὸ ζητούμενον εἶναι

$$\frac{100 \times 2376{,}68}{99{,}17} = 2396{,}57 \text{ δρ.}$$

Β' περίπτωσις.

Κατὰ τοὺς κανόνας τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ α' γραμματίου εἶναι δρ. 993,44, τοῦ β' δρ. 594,05 καὶ τοῦ γ' δρ. 789,50. Ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ ἑνιαίου γραμματίου εἶναι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν=δρ. 2377· ἄρα ἡ μέλλουσα εἶναι

$$2377+\frac{2377\times6\times50}{36000}=\text{δρ. } 2396{,}80.$$

275. *Πρόβλημα β')* Ἔχομεν 2 γραμμάτια, τὸ α' 1000 δρ. λῆγον μετὰ 60 ἡμέρας, τὸ β' 600 δρ. λῆγον μετὰ 80 ἡμέρας. Ἐὰν θέλωμεν νὰ τὰ ἀντικαταστήσωμεν δι' ἑνὸς μόνου γραμματίου 1600 δρ., ὁ δὲ τόκος τῆς προεξοφλήσεως εἶναι 6 %, μετὰ πόσον χρόνον θὰ λήγῃ τοῦτο;

Λύσις. α') Κατὰ τὴν ἐξωτερικὴν ὑφαίρεσιν παροῦσα ἀξία τοῦ ἑνιαίου γραμματίου=δρ. 1582, ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις=δρ. 18· ἄρα

$$\text{χρόνος}=\frac{18\times36000}{1600\times6}=68 \text{ ἡμ.}$$

* β') Κατὰ τὴν ἐσωτερικὴν ὑφαίρεσιν παροῦσα ἀξία τοῦ ἑνιαίου γραμματίου=δρ. 1582,21, ἐσωτ. ὑφ.=δρ. 17,79· ἄρα

$$\text{χρόνος}=\frac{17{,}79\times36000}{1582{,}21\times6}=68 \text{ ἡμ.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΟΣΟΣΤΩΝ

276. Εἴδομεν ὅτι ὁ τόκος καὶ ἡ ὑφαίρεσις ὑπολογίζονται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ἐπιτοκίου, ἤτοι τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν. Ὑπάρχουσιν ὅμως καὶ πολλαὶ ἄλλαι περιπτώσεις, ἰδίως εἰς τὸ ἐμπόριον, καθ' ἃς τὸ ζητούμενον ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν. Π. χ. ἔμπορος ἐπρομηθεύθη παρὰ παραγγελιοδόχου

καφὲν ἀξίας 2500 δρ.· πόσα θὰ τῷ πληρώσῃ ὁμοῦ μὲ τὴν προμήθειάν του, ἥτις εἶναι 3 %;

Τοιαῦτα εἶναι τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα λύει ἡ μέθοδος τῶν ποσοστῶν. Ἐνίοτε τὸ ζητούμενον ποσὸν ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τόσον τοῖς χιλίοις· π. χ. 3 τοῖς χιλίοις, ὅπερ γράφεται 3 ‰ ἢ τόσον ἐπὶ οἱουδήποτε ὡρισμένου ποσοῦ· ἐπειδὴ ὅμως συνήθως σχεδὸν πάντοτε ὑπολογίζεται ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν, ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται καὶ *μέθοδος τοῦ τόσον τοῖς ἑκατόν*.

Προβλήματα.

α') Θεωρήσωμεν τὸ πρόβλημα, ὅπερ προηγουμένως παρουσιάσαμεν ὡς παράδειγμα τῶν προβλημάτων τῆς μεθόδου ταύτης. Τοῦτο δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς·

Διὰ καφὲ 100 δρ. ὁ ἔμπορος θὰ πληρώσῃ 103 δρ.· πόσα θὰ πληρώσῃ διὰ καφὲν 2500 δρ.;

Ὁπότε βλέπομεν ὅτι ἔχομεν πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν·

100 δρ.	103 δρ.
2500	χ

Ἄρα

$$\chi = \frac{103 \times 2500}{100} = \delta\rho.\ 2575,$$

ἢ καὶ ἄλλως

$$\chi = 2500 + 2500 \times 0{,}03 = 2500 + 75 = 2575\ \delta\rho.$$

β') Ἔμπορος ἐπρομηθεύθη ὕφασμα παρὰ παραγγελιοδόχου πληρώσας δρ. 4550 ὡς ἀξίαν ὑφάσματος καὶ προμήθειαν 2 % ὁμοῦ. Πόση ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος;

Λύσις. Εἶναι πρόβλημα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

102 δρ.	100 δρ.
4550	χ

$$\chi = \delta\rho.\ 4460{,}78.$$

277. *Ἀπόβαρον* (ντάρα) λέγεται ἡ ἐλάττωσις, ἥτις γίνεται ἐπὶ ζυγισθέντος βάρους ἐμπορευμάτων πρὸς εὕρεσιν τοῦ καθαροῦ βάρους· ἐκτιμᾶται δὲ αὕτη πολλάκις μὲ τὸ τόσον τοῖς ἑκατόν.

Πρόβλημα γ') Τὸ ὁλικὸν βάρος φορτίου ἐμπορεύματος εἶναι 3260 ὀκάδ., τὸ δὲ ἀπόβαρον ὁρίζεται εἰς 4 %· πόσον τὸ καθαρὸν βάρος;

Λύσις. Ὁλικὸν βάρος=3260 ὀκ. Ἀπόβαρον=$3260 \times 0,04=$ ὀκ. 130,4=130 ὀκάδ. 160 δρ.· καθ. βάρ.=3129 ὀκάδ. 240 δρ.

Πρόβλημα δ') Ἔμπορος ἀποστέλλει 35000 ὀκάδας ἐλαίου εἰς βαρέλια, ὧν τὸ ἀπόβαρον λογίζεται 8 %. Πόσον εἶναι τὸ βάρος τοῦ φορτίου;

Λύσις. 92 ὀκ. ἐλαίου ἔχουσιν ὡς φορτίον βάρ. 100· ἄρα αἱ 35000 θὰ ἔχωσι

$$\chi = \frac{35000 \times 100}{92} = 38043 \text{ ὀκ. καὶ } 191 \text{ δράμ.}$$

Πρόβλημα ε') Εἰσπράκτωρ τοῦ δημοσίου δικαιοῦται νὰ λαμβάνῃ 4 % ἐπὶ τῶν ὑπ' αὐτοῦ εἰσπραττομένων χρημάτων. Πόσα θὰ λάβῃ ἐπὶ εἰσπράξεων δρ. 4260,5;

Λύσις. $\chi = 4260,5 \times 0,04 =$ δρ. 170,42.

Πρόβλημα ϛ') Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα νὰ ζητηθῇ προσέτι, πόσα πρέπει νὰ εἰσπράττῃ κατὰ μῆνα, διὰ νὰ λαμβάνῃ 250 δρ.

Λύσις. $\chi = \frac{250 \times 100}{4} =$ δρ. 6250.

Ἀσκήσεις.

1) Ἔμπορος ἀγοράσας ὕφασμα ἀντὶ 2560,60 δρ. τὸ μετεπώλησεν ἀντὶ δρ. 3000· πόσον τοῖς ἑκατὸν ἐκέρδισεν;

2) Ἔμπορος ἀγοράσας σῖτον ἀντὶ 1560,65 δρ. μετεπώλησεν αὐτὸν μὲ ζημίαν 8 %· πόσον τὸν μετεπώλησεν;

3) Ἔμπορος πωλήσας καφὲν ἐζημιώθη 20 %, ἡ δὲ ὁλικὴ ζημία εἶναι 867 δρ. Πόσον τῷ ἐστοίχιζεν ὁ καφές;

4) Μὲ τὰ δεδομένα τοῦ προηγουμένου προβλήματος νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐπωλήθη ὁ καφές.

5) Συνήθως τὰ ἐργοστάσια ἐπὶ τῆς ἀξίας τῶν προϊόντων των ποιοῦσιν ἔκπτωσιν τόσον τοῖς ἑκατόν· π. χ. 5 $^0/_0$.

Ἔμπορος προμηθεύεται ἔκ τινος ἐργοστασίου σόδαν ἀξίας 529,45 δρ., ἀλλὰ μὲ ἔκπτωσιν 4,5 $^0/_0$· πόσα θὰ πληρώσῃ ;

6) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν του ἀντὶ 16500 δρ. καὶ ἀσφαλίστρων 5 $^0/_{00}$ ἐτησίως. Πόσα θὰ πληρώνῃ τὸ ἔτος ;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΜΕΡΙΣΜΟΣ ΕΙΣ ΜΕΡΗ ΑΝΑΛΟΓΑ

278. *Πρόβλημα α΄)* Νὰ μοιρασθῶσι 48 δρ. εἰς 3 ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὅσας δρ. λάβῃ ὁ α΄, τόσα δίδραχμα νὰ λάβῃ ὁ β΄ καὶ τόσα πεντάδραχμα ὁ γ΄.

Λύσις. Ἐὰν τὸ μοιραζόμενον ποσὸν ἀπετελεῖτο ἀπὸ 1 δρ. 1 δίδρ. καὶ 1 πεντάδρ., ἤτοι 8 δρ., θὰ ἐλάμβανον ὁ α΄ 1 δρ., ὁ β΄ 2 δρ. καὶ ὁ γ΄ 5 δρ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ μερίδια εἶναι προφανῶς ἀνάλογα πρὸς τὸ μοιραζόμενον ποσόν, δυνάμεθα νὰ τὰ εὕρωμεν διὰ τῆς μεθόδου τῶν τριῶν ὡς ἑξῆς.

Μερίδιον τοῦ α΄. Ὅταν τὸ μοιραζόμενον ποσὸν εἶναι 8 δρ., ὁ α΄ λαμβάνει 1 δρ.· ὅταν εἶναι 48 δρ., θὰ λάβῃ

$$1 \times \frac{48}{8} = 6 \text{ δρ.}$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν

$$\textit{Μερίδιον τοῦ } \beta' = 2 \times \frac{48}{8} = 12 \text{ δρ.}$$

$$\text{»} \quad \text{»} \quad \gamma' = 5 \times \frac{48}{8} = 30 \text{ δρ.}$$

Ὁρισμοί.

Τὰ μέρη, εἰς ἃ προηγουμένως ἐμοιράσαμεν τὸ ποσὸν 48 δρ., λέγονται *ἀνάλογα* πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 5· βλέπομεν δὲ ὅτι σχηματίζονται ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\frac{48}{8}$, ἤτοι 6.

Ἐν γένει

Δύο ἢ πλείονες ἀριθμοὶ λέγονται ἀνάλογοι πρὸς ἄλλους ἰσαρίθμους, ὅταν γίνωνται ἐξ αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ἄρα

Νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα δύο ἢ πλειόνων δεδομένων ἀριθμῶν σημαίνει νὰ τὸν μερίσωμεν εἰς τόσα μέρη, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι, νὰ γίνωνται δὲ ἐξ αὐτῶν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Ἐκ τῆς λύσεως δὲ τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἕπεται ὅτι

279. *Διὰ νὰ μερίσωμεν ἀριθμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν, προσθέτομεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους καὶ διὰ τοῦ ἀθροίσματος διαιροῦμεν τὰ γινόμενα ἑκάστου τούτων ἐπὶ τὸν μεριστέον ἀριθμόν.*

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Μ τὸν μεριστέον ἀριθμόν, δι' α, β, γ τοὺς ἀριθμούς, ἀναλόγως τῶν ὁποίων πρόκειται νὰ γίνῃ ὁ μερισμός, τὰ δὲ μέρη κατὰ σειρὰν διὰ χ, ψ, ω, ἔχομεν τοὺς τύπους

$$\chi=\frac{\mathrm{M}\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$\psi=\frac{\mathrm{M}\beta}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$\omega=\frac{\mathrm{M}\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Τοὺς τύπους τούτους δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν καὶ ἀπ' εὐθείας. Τῳόντι, ἐὰν εἴχομεν

$$\mathrm{M}=\alpha+\beta+\gamma,$$

τὸ πρῶτον μέρος θὰ ἦτο προφανῶς α, τὸ δεύτερον β καὶ τὸ τρίτον γ.

Ἐὰν εἴχομεν $M=2(\alpha+\beta+\gamma)$, τὰ ζητούμενα μέρη θὰ ἦσαν διπλάσια, ἤτοι 2α, 2β, 2γ κ.τ.λ. Ἤτοι ὁ M καὶ τὰ μέρη αὐτοῦ εἶναι εὐθέως ἀνάλογα. Ἄρα πρὸς εὕρεσιν τοῦ πρώτου μέρους χ ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ ἑξῆς πρόβλημα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

«Ὅταν ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι $\alpha+\beta+\gamma$, τὸ α' μέρος εἶναι α· ὅταν εἶναι M ὁ μεριστέος, πόσον;»

Εὑρίσκομεν οὕτω·

$$\chi=\frac{M\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν καὶ τὰ λοιπὰ μέρη.

280. Ἐκ τῶν προηγουμένων τύπων ἕπεται ὅτι τὰ ζητούμενα μέρη δὲν μεταβάλλονται, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἀναλόγως τῶν ὁποίων γίνεται ὁ μερισμός, πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

Τοῦτο δὲ συνεπάγεται πολλάκις *ἁπλοποίησιν* εἰς τὰς πράξεις, ὡς φαίνεται εἰς τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

Πρόβλημα β') Νὰ μερισθῇ ὁ 100 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 80 καὶ 40.

Λύσις. Διαιροῦμεν τοὺς ἀριθμοὺς 80 καὶ 40 διὰ 40 καὶ εὑρίσκομεν πηλίκα 2 καὶ 1, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζοντες τὸν 100 ἔχομεν

$$\chi=\frac{100\times2}{3}=66,66,$$

$$\psi=\frac{100\times1}{3}=33,33.$$

Σημ. Τὰ μέρη προστιθέμενα πρέπει νὰ ἀποτελῶσι τὸν μεριστέον ἀριθμόν, τοῦτο δὲ ἀποτελεῖ τὴν *βάσανον* τῆς πράξεως.

Πρόβλημα γ') Νὰ μερισθῇ ὁ 12 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{4}$.

Λύσις. Τρέπομεν τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ εὑρίσκομεν

$\frac{4}{12}$ καὶ $\frac{3}{12}$· ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα ἐπὶ 12 καὶ ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς 4 καὶ 3, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζομεν τὸν 12.

Ἀσκήσεις.

1) Νὰ μοιρασθῶσι 1250 δρ. εἰς 3 ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε τὰ μερίδια τοῦ α′ καὶ τοῦ β′ νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 3, τὰ δὲ μερίδια τοῦ β′ καὶ τοῦ γ′ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 6.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν τὰ μερίδια κατὰ σειρὰν διὰ χ, ψ, ω, ἔχομεν

$$\frac{\chi}{\psi}=\frac{2}{3}, \text{ ὅθεν } \chi=\psi\,\frac{2}{3}$$

$$\frac{\omega}{\psi}=\frac{6}{5} \text{ ὅθεν } \omega=\psi\,\frac{6}{5}.$$

Ἄρα, ἐὰν $\psi=1$, τότε $\chi=\frac{2}{3}$ καὶ $\omega=\frac{6}{5}$ καὶ ὁ μερισμὸς θὰ γίνῃ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν

$$\frac{2}{3},\ 1,\ \frac{6}{5}.$$

2) Νὰ μερισθῇ ὁ 1000 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4, ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀντιστρόφους τούτων ἀριθμοὺς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.

3) Πατὴρ ἀφίνει κληρονομίαν εἰς τὰ 3 τέκνα του 1500 δρ. Διατάσσει δὲ νὰ λάβῃ ἕκαστον τέκνον του κατ' ἀναλογίαν τόσῳ μεῖζον μερίδιον, ὅσῳ μικροτέρα εἶναι ἡ ἡλικία του. Ἔχουσι δὲ ἡλικίαν τὸ α′ 10 ἐτῶν, τὸ β′ 14 ἐτῶν καὶ τὸ γ′ 25 ἐτῶν. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστον;

4) Νὰ μερισθῶσιν 120 δρ. εἰς 3 ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὁ β′ νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ α′ καὶ ὁ γ′ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ β′.

*5) Νὰ μοιρασθῶσιν 100 δρ. εἰς 3 ἀνθρώπους οὕτως, ὥστε ὁ β′ νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ α′ καὶ 1 δρ. περιπλέον, ὁ δὲ γ′ τὸ ἥμισυ τοῦ μεριδίου τοῦ β′ καὶ 1 δρ. περιπλέον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

281. *Προβλήματα ἑταιρείας* ὀνομάζομεν τὰ προβλήματα, ἐν οἷς πρόκειται νὰ μοιρασθῇ κέρδος ἢ ζημία εἰς ἀνθρώπους, οἵτινες ἀπετέλεσαν ἑταιρείαν πρὸς χρηματολογικὴν ἐπιχείρησιν.

Πρόβλημα α′) Τρεῖς ἄνθρωποι συνεταιρίσθησαν διά τινα ἐμπορικὴν ἐπιχείρησιν καὶ κατέβαλον ὁ α′ 600 δρ., ὁ β′ 300 δρ. καὶ ὁ γ′ 200 δρ. Ἐκέρδισαν δὲ ἐκ ταύτης 150 δρ. Πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

Λύσις. Ἐὰν κ εἶναι τὸ κέρδος μιᾶς δραχμῆς, τότε ὁ μὲν α′ θὰ λάβῃ δρ. 600 κ., ὁ δὲ β′ δρ. 300 κ. καὶ ὁ γ′ δρ. 200 κ. Ἄρα τὰ μερίδια εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 600, 300, 200 καὶ ἐπομένως θὰ λάβωσι (§ 279),

$$\text{ὁ α}'\quad \frac{150\times 6}{11}=\text{δρ. } 81{,}81$$

$$\text{ὁ β}'\quad \frac{150\times 3}{11}=\text{δρ. } 40{,}90$$

$$\text{ὁ γ}'\quad \frac{150\times 2}{11}=\text{δρ. } 27{,}27$$

Πρόβλημα β′) Ἔμπορος ἀνέλαβεν ἐπιχείρησιν μὲ δρ. 4486. Μετὰ 16 μῆνας προσλαμβάνει συνεταῖρον καταβάλλοντα τὸ αὐτὸ ποσόν· 4 μῆνας μετὰ ταῦτα προσλαμβάνει καὶ ἕτερον καταβάλλοντα καὶ τοῦτον τὸ αὐτὸ ποσόν. Τρία δὲ ἔτη ἀπὸ τῆς ἐνάρξεως τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρέθη ὅτι ἐζημιώθησαν δρ. 450· πόση ζημία ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον;

Λύσις. Αἱ καταβολαὶ εἶναι ἴσαι, εἶναι ὅμως διάφοροι οἱ χρόνοι, καθ' οὓς τὰ χρήματα ἑκάστου ἔμειναν εἰς τὴν ἐπιχείρησιν· οὕτω τοῦ μὲν α′ ὁ χρόνος εἶναι 36 μῆνες, τοῦ β′ 20 καὶ τοῦ γ′ 16 μῆνες.

Ἐὰν κ εἶναι τὸ κέρδος ἑκάστης καταβολῆς εἰς 1 μῆνα, τὰ μερίδια κατὰ σειρὰν εἶναι

$$36κ, \quad 20κ, \quad 16κ$$

ἤτοι ἀνάλογα τῶν χρόνων. Ἄρα θὰ λάβωσιν

$$ὁ\ α' \quad \frac{450\times9}{18}=δρ.\ 225$$

$$ὁ\ β' \quad \frac{450\times5}{18}=δρ.\ 125$$

$$ὁ\ γ' \quad \frac{450\times4}{18}=δρ.\ 100.$$

Πρόβλημα γ′) Ἔμπορος ἀνέλαβεν ἐπιχείρησιν μὲ 2000 δρ.· μετὰ 2 μῆνας προσλαμβάνει συνεταῖρον καταβάλλοντα 4000 δρ. Μετὰ 10 δὲ μῆνας ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τῆς ἐπιχειρήσεως εὑρέθη ὅτι ἐκέρδισαν 480 δρ.· πόσας θὰ λάβῃ ἑκάτερος;

Λύσις. Ἐνταῦθα εἶναι διάφοροι καὶ αἱ καταβολαὶ καὶ οἱ χρόνοι· ἤτοι ὁ α′ κατέβαλε δρ. 2000 διὰ 10 μῆνας καὶ ὁ β′ 4000 δρ. δι' 8 μῆνας.

Ἐὰν κ εἶναι τὸ κέρδος μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα μῆνα, τὰ μερίδια αὐτῶν θὰ εἶναι κατὰ σειρὰν

$$κ\times2000\times10, \quad κ\times4000\times8,$$

ἤτοι ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα

$$2000\times10, \quad 4000\times8$$

ἢ (δι' ἁπλοποιήσεως) πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5, 8. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι θὰ λάβωσιν

ὁ α′ δρ. 184,61
ὁ β′ δρ. 295,38.

Ἀσκήσεις.

1) Τρεῖς συνεταῖροι κατέβαλον συγχρόνως χρήματα διά τινα ἐπιχείρησιν. Τούτων δὲ ὁ β′ κατέβαλε τὸ $\frac{1}{2}$ τῶν τοῦ α′ καὶ ὁ γ′ τὰ $\frac{3}{4}$ τῶν τοῦ β′. Ἐκέρδισαν δὲ 180 δρ. Ἐὰν τὸ κέρδος εἶναι 15 % ἐπὶ τοῦ ὅλου κεφαλαίου, πόσον κέρδος ἀναλογεῖ εἰς ἕκαστον καὶ ποῖον τὸ κεφάλαιον τῆς ἐπιχειρήσεως;

2) Ἔμπορος ἀρχίζει ἐπιχείρησιν μὲ 8000 δρ.· μετὰ 5 μῆνας προσλαμβάνει συνεταῖρον καταβάλλοντα 5000 δρ., 20 ἡμέρας μετὰ ταῦτα προσλαμβάνει καὶ γ′ καταβάλλοντα 1500 δρ. Ἡ ἐπιχείρησις διήρκεσε 2 ἔτη καὶ 6 μῆνας καὶ ἔφερε κέρδος 3060 δρ. Ἐὰν ὁ α′ λόγῳ πρωτοβουλίας λάβῃ ἀμοιβὴν 3 % ἐπὶ τοῦ ὁλικοῦ κέρδους, πόσα θὰ λάβῃ ἕκαστος;

3) Ἔμπορος ἀρχίζει ἐπιχείρησιν τὴν 10ην Ἰανουαρίου 1907 μὲ 6800 δρ.· τὴν 5ην Ἀπριλίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους προσλαμβάνει συνεταῖρον καταβάλλοντα 8800 δρ. Ἡ ἐπιχείρησις ἔληξε τὴν 5ην Μαΐου 1908 μὲ ζημίαν 4800 δρ. Πόση ζημία ἀναλογεῖ εἰς ἑκάτερον;

* 4) Δύο συνεταῖροι κατέβαλον διά τινα ἐπιχείρησιν ὁ α′ 60000 δρ. τὴν 1ην Φεβρουαρίου καὶ ὁ β′ 26000 δρ. τὴν 1 Μαΐου τοῦ αὐτοῦ ἔτους. Ἐκ τῶν καταβληθέντων ὅμως χρημάτων ἀπέσυραν ὁ μὲν α′ δρ. 2500 τὴν 1ην Ἀπριλίου, ὁ δὲ β′ δρ. 8000 τὴν 1ην Αὐγούστου τοῦ αὐτοῦ ἔτους. Πρόκειται δὲ τὴν 1ην Ἰανουαρίου τοῦ ἑπομένου ἔτους νὰ μοιρασθῶσι τὸ κέρδος των 10600 δρ. Πόσα θὰ λάβῃ ἑκάτερος;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ϛ'.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΙΞΕΩΣ

Διακρίνομεν δύο εἰδῶν προβλήματα.

Α' Εἶδος.

282. Προβλήματα τοῦ α' εἴδους εἶναι ἐκεῖνα, ἐν οἷς δίδονται αἱ ποσότητες διαφόρων πραγμάτων καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου, ζητεῖται δέ, ἐὰν ἀναμίξωμεν ταῦτα, ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος.

Πρόβλημα. Ἔμπορος ἀνέμιξεν οἴνους 3 εἰδῶν ὡς ἑξῆς. Ἔλαβεν 120 ὀκ. ἐκ τοῦ α', οὗτινος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 40 λεπτά, 80 ὀκ. ἐκ τοῦ β', οὗτινος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 30 λ., καὶ 500 ὀκ. ἐκ τοῦ γ', οὗτινος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 25 λ. Πόσον θὰ ἀξίζῃ ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

Λύσις. Εὑρίσκομεν· α') τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ α' εἴδους, ἥτις εἶναι 40 λεπ.$\times$120=4800 λ.=48 δρ.

β') τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ β' εἴδους, ἥτις εἶναι 30 λ.$\times$80=24 δρ.

γ') τὴν ἀξίαν τῆς ποσότητος τοῦ γ' εἴδους, ἥτις εἶναι 125 δρ.

Ἔπειτα εὑρίσκομεν διὰ προσθέσεως τούτων τὴν ὅλην ἀξίαν τοῦ μίγματος δρ. 197. Εὑρίσκομεν προσέτι καὶ τὸ βάρος τοῦ ὅλου μίγματος 700 ὀκ. Ἑπομένως ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ἀξίζει 197 : 700=δρ. 0,28 ἢ λεπτὰ 28.

Διάταξις τῶν πράξεων.

$$
\begin{array}{rrr|l}
40\times120= & 48\,00 & & \\
30\times\ 80= & 24\,00 & & \\
25\times500= & 125\,00 & & \\
\hline
700 & 197'00 & & 7'00 \\
 & 57 & & 28 \\
 & 1 & &
\end{array}
$$

Β′ Εἶδος.

283. Ἐνταῦθα θεωροῦμεν προβλήματα, ἐν οἷς δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο ἢ πλειόνων πραγμάτων, ζητεῖται δὲ πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους, ἵνα σχηματίσωμεν μῖγμα μὲ ὡρισμένην τιμὴν τῆς μονάδος αὐτοῦ.

Πρόβλημα α′) Ἔμπορος ἔχει 2 εἰδῶν ἀλεύρου· τοῦ α′ εἴδους ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 65 λεπτ. καὶ τοῦ β′ 40 λεπτά. Πόσας ὀκ. πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ τὸ α′ καὶ πόσας ἀπὸ τὸ β′ εἶδος, ἵνα σχηματίσῃ μῖγμα 400 ὀκ., οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ ἀξίζῃ 50 λεπτά ;

Λύσις. Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ α′ εἴδους ἀξίζει χωριστὰ μὲν 65 λεπτά, ἐν τῷ μίγματι δὲ 50 λ., ἄρα φέρει ζημίαν 15 λ.· ἑκάστη δὲ ὀκᾶ τοῦ β′ εἴδους φέρει κέρδος 10 λ. Ἐὰν λοιπὸν ὁ ἔμπορος λάβῃ 10 ὀκ. ἐκ τοῦ α′ εἴδους καὶ 15 ἐκ τοῦ β′, θὰ ἔχῃ ἐκ μὲν τοῦ α′ ζημίαν 10×15 λ., ἐκ δὲ τοῦ β′ κέρδος 15×10 λ. Ἐπειδὴ δὲ $10 \times 15 = 15 \times 10$, ἕπεται ὅτι ἡ ζημία ἰσοῦται τῷ κέρδει, ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος θὰ εἶναι 50 λ. Ἄρα

Διὰ μῖγμα 25 ὀκ. πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α′ εἴδους 10 ὀκ., ἐκ δὲ τοῦ β′ 15 ὀκ. Ὅθεν ἕπεται ὅτι διὰ 1 ὀκ. μίγματος πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α′ $\frac{10}{25}$, ἐκ δὲ τοῦ β′ $\frac{15}{25}$. Ἐπειδὴ ὅμως θέλει νὰ σχηματίσῃ μῖγμα ὀκ. 400, πρέπει νὰ λάβῃ ἐκ μὲν τοῦ α′ εἴδους

$$\frac{400 \times 10}{25} = 160 \text{ ὀκ.},$$

ἐκ δὲ τοῦ β′ εἴδους

$$\frac{400 \times 15}{25} = 240 \text{ ὀκ.}$$

Σημ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ δι' ἐξισώσεως ὡς ἑξῆς. Ἔστω χ τὸ ποσόν, ὅπερ θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ α′ εἴδους εἰς ὀκ.· τότε τὸ ποσόν, ὅπερ θὰ λάβῃ ἐκ τοῦ β′, εἶναι $400-\chi$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὀκᾶ τοῦ μὲν α′ εἴδους τιμᾶται 65 λ., τοῦ β′ 40 λ. καὶ τοῦ μίγματος 50 λ., θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$65\chi+(400-\chi)40=400\times 50, \text{ ἐξ ἧς } \chi=160 \text{ ὀκ.}$$

$$\text{Ἄρα } 400-\chi=240 \text{ ὀκ.}$$

284. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ λόγος

$$10:15 \text{ ἢ ὁ ἴσος πρὸς αὐτὸν } 2:3$$

εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀναμιγνυομένων ποσοτήτων, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ μίγματος. Πολλάκις δὲ εἰς τοιαῦτα προβλήματα μένει ἀόριστον τὸ ποσὸν τοῦ μίγματος, ζητεῖται δὲ ἁπλῶς ὁ λόγος τῶν ἀναμιγνυομένων ποσῶν. Π. χ.

Πρόβλημα β′) Κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ ἀναμίξωμεν καφὲν τιμώμενον δρ. 2,80 τὴν ὀκᾶν μὲ κριθὴν πρὸς δρ. 0,30, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος νὰ ἀξίζῃ 1 δρ.;

Λύσις. Ἑκάστη ὀκᾶ τοῦ καφὲ ἐν τῷ μίγματι χάνει δρ. 1,80, τῆς δὲ κριθῆς κερδίζει 0,70 δρ. Ἄρα δι᾽ οὓς λόγους εἴπομεν προηγουμένως ὁ λόγος τῆς ποσότητος τοῦ καφὲ πρὸς τὴν τῆς κριθῆς πρέπει νὰ εἶναι

$$0{,}70:1{,}80=7:18.$$

285. ***Πρόβλημα γ′)*** Ἔχομεν 4 εἴδη οἴνου τιμώμενα κατ᾽ ὀκᾶν τὸ α′ 80 λεπτά, τὸ β′ 65 λ., τὸ γ′ 40 λ. καὶ τὸ δ′ 25 λ. Ἀναλόγως τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἀνάμιξις αὐτῶν, ὥστε ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος νὰ ἀξίζῃ 50 λεπτά;

Λύσις. Σχηματίζομεν μερικὰ μίγματα περιλαμβάνοντα ἕκαστον δύο μόνον εἴδη οἴνου, ἓν ἀξίας ἀνωτέρας τῶν 50 λ. καὶ ἓν κατωτέρας.

α′ μερικὸν μῖγμα. Λαμβάνομεν οἶνον τοῦ α′ καὶ τοῦ δ′ εἴδους καὶ εὑρίσκομεν ὡς προηγουμένως, ὅτι ταῦτα πρέπει νὰ ἀναμιχθῶσι κατὰ τὸν λόγον

$$25:30, \text{ ἤτοι } 5:6$$

β' *μερικὸν μῖγμα*. Λαμβάνομεν οἶνον τοῦ β' καὶ τοῦ γ' εἴδους καὶ εὑρίσκομεν ὅτι ταῦτα πρέπει νὰ ἀναμιχθῶσι κατὰ τὸν λόγον

10 : 15 ἤτοι 2 : 3

Ἑπομένως τὰ 4 εἴδη πρέπει νὰ ἀναμιχθῶσι κατὰ ποσὰ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5, 2, 3, 6.

Ἐὰν δὲ δοθῇ τὸ ποσὸν τοῦ μίγματος, τοῦτο θὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀνωτέρω ἀριθμούς.

Σημ. Τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ὡς καὶ πάντα τὰ τοιαῦτα, ἐπιδέχεται ποικίλας λύσεις. Π. χ. δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μερικὰ μίγματα λαμβάνοντες οἶνον 1) ἐκ τοῦ α' καὶ τοῦ γ' εἴδους, 2) ἐκ τοῦ β' καὶ τοῦ δ', ὁπότε κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρίσκομεν, ὅτι αἱ μιγνυόμεναι ποσότητες εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς

1, 5, 3, 3.

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἄλλας λύσεις σχηματίζοντες μίγματα ἐκ μιᾶς ὀκάδος ἑκάστου εἴδους. Π. χ., ἐὰν λάβωμεν ἀνὰ μίαν ὀκᾶν ἐκ τῶν τριῶν πρώτων εἰδῶν, ἔχομεν μῖγμα, οὗτινος ἡ ὀκᾶ ἀξίζει 61,66 λ. Εἶτα ζητοῦμεν, ἀναλόγως τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἀναμίξωμεν τὸ μῖγμα τοῦτο μετὰ τοῦ δ' εἴδους, καὶ εὑρίσκομεν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν

1250, 583. Ἄρα

τὰ 4 εἴδη πρέπει νὰ μιχθῶσιν ἀναλόγως των ἀριθμῶν

416,66, 416,66, 416,66 583,

ἔνθα 416,60=1250 : 3

Ἀσκήσεις.

1) Ἀρτοποιὸς ἠγόρασε 2 στατῆρας ἀλεύρου πρὸς 18 δρ. τὸν στατῆρα, 5 στατῆρας, 10 ὀκ. πρὸς 20 δρ. τὸν στατῆρα καὶ 10 στατῆρας, 15 ὀκ., 200 δρ. πρὸς 19,40 τὸν στατῆρα· εἶτα ἀνέμιξε πάντα ταῦτα. Πόσον τῷ στοιχίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

2) Τρία εἴδη οἴνων πωλοῦνται τὸ α′ πρὸς 60 λ. τὴν ὀκᾶν, τὸ β′ πρὸς 45 λ. καὶ τὸ γ′ πρὸς 55 λ. Ἐὰν ἀναμιχθῶσιν ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 10, ποία θὰ εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;

3) Ἀναλόγως τίνων ἀριθμῶν πρέπει νὰ ἀναμιχθῶσιν οἶνος τιμώμενος πρὸς 65 λ. τὴν ὀκᾶν μὲ οἶνον τιμώμενον πρὸς 50 λ., διὰ νὰ σχηματισθῇ μῖγμα, οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 58 λεπτά;

4) Ἔχομεν 4 ποιότητας ἐλαίου τιμωμένας κατ' ὀκᾶν τὴν α′ 110 λεπτά, τὴν β′ 85 λ., τὴν γ′ 90 λ. καὶ τὴν δ′ 125 λ. Θέλομεν δὲ ἐξ αὐτῶν νὰ σχηματίσωμεν μῖγμα, οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 1 δρ.· πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστης ποιότητος;

5) Μὲ πόσας ὀκάδας ἐλαίου τιμωμένου πρὸς δρ. 1,20 τὴν ὀκᾶν, πρέπει νὰ ἀναμίξωμεν 45 ὀκάδας ἐλαίου τιμωμένου πρὸς δρ. 1,45 τὴν ὀκᾶν, ἵνα ἀποτελέσωμεν μῖγμα, οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται δρ. 1,32;

ΚΡΑΜΑΤΑ

286. ***Βαθμὸς καθαρότητος*** κράματος μεταλλικοῦ λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων, πόση ἐπὶ τοῖς χιλίοις εἶναι ἡ ποσότης τοῦ ἐν αὐτῷ περιεχομένου εὐγενοῦς μετάλλου.

Εἰς τὰ προβλήματα τῆς μίξεως ὑπάγονται καὶ ἐκεῖνα, ἐν οἷς ζητεῖται ὁ βαθμὸς καθαρότητος κράματος μεταλλικοῦ παραγομένου διὰ συγχωνεύσεως μετάλλων ἐχόντων διάφορον βαθμὸν καθαρότητος· ὁμοίως καὶ τὰ προβλήματα, ἐν οἷς ζητεῖται πόσον πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκάστου εἴδους μετάλλων ἐχόντων διάφορον βαθμὸν καθαρότητος πρὸς σχηματισμὸν κράματος, οὗτινος δίδεται ἡ ποσότης καὶ ὁ βαθμὸς καθαρότητος ἢ μόνον ὁ βαθμὸς καθαρότητος.

Πρόβλημα α′) Συγχωνεύομεν 200 δράμια ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,850 μὲ 60 δράμια ἀργύρου βαθμοῦ καθαρότητος 0,950. Ποῖος ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος;

Λύσις. Ἓν δράμιον τοῦ α′ εἴδους ἔχει καθαρὸν ἄργυρον 0,850 δράμ.· ἄρα τὰ 200 δράμια περιέχουσι

$$0{,}850 \times 200 = 170 \text{ δράμ.}$$

Ὁμοίως 1 δράμιον τοῦ β′ εἴδους περιέχει καθαρὸν ἄργυρον 0,950 καὶ τὰ 60 δράμια περιέχουσι

$$0{,}950 \times 60 = 57 \text{ δράμ.}$$

Ἑπομένως τὸ ὅλον κρᾶμα ζυγίζον 260 δράμια περιέχει 227 δράμια καθαροῦ ἀργύρου καὶ τὸ 1 δράμιον θὰ περιέχῃ·

$$\frac{227}{260} = 0{,}873 \text{ δράμ.}$$

Ἄρα ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ κράματος εἶναι 0,873.

Σημ. Ὁ βαθμὸς καθαρότητος τοῦ μεταλλικοῦ κράματος λέγεται καὶ *τίτλος* αὐτοῦ· παριστῶμεν δὲ αὐτὸν συντόμως διὰ τοῦ τ.

Πρόβλημα β′) Ἔχομεν δύο εἴδη ἀργύρου ἔχοντα τὸ α′ τ=0,900, τὸ β′ τ=0,860. Πόσα δράμια πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου εἴδους πρὸς σχηματισμὸν κράματος 100 δραμίων ἔχοντος τ=0,890;

Λύσις. Ἕκαστον δράμιον τοῦ α′ εἴδους ἀποβάλλει ἐν τῷ κράματι ἐκ τοῦ τ. αὐτοῦ 0,010, ἕκαστον δὲ δράμιον τοῦ β′ εἴδους κερδίζει 0,030· ὥστε, ἐὰν λάβωμεν ἐκ τοῦ α′ εἴδους 0,030 δράμια, θὰ ἔχωμεν ἀπώλειαν

$$0{,}030 \times 0{,}010\cdot$$

ἐὰν δὲ λάβωμεν ἐκ τοῦ β′ 0,010 δράμια, θὰ ἔχωμεν κέρδος

$$0{,}010 \times 0{,}030,$$

ἤτοι ἴσον τῇ ζημίᾳ. Τὰ γινόμενα δὲ ταῦτα θὰ εἶναι ἴσα, καὶ ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ 0,030 καὶ 0,010 πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ 100, ἤτοι τὸ κρᾶμα θὰ ἔχῃ τίτλον 0,890, ἐὰν λάβωμεν 3 δράμια ἐκ τοῦ α′ καὶ 1 δράμιον ἐκ τοῦ β′ εἴδους. Ἐπειδὴ δὲ θέλομεν νὰ σχηματίσωμεν κρᾶμα 100 δραμίων, ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ λάβωμεν ἐκ τοῦ α′ εἴδους 75 δράμια, ἐκ δὲ τοῦ β′ 25.

Σημ. Ἐὰν ἀφίνετο ἀόριστον τὸ ποσὸν τοῦ κράματος, ἡ λύσις θὰ ἦτο ὅτι ὁ λόγος τῶν μιγνυομένων ποσοτήτων εἶναι 3 : 1.

Ἀσκήσεις.

1) Χρυσοχόος συνέτηξεν 6 ἀργυρᾶ πεντόδραχμα μὲ 18 ἀργυρᾶ μονόδραχμα. Ποῖος ὁ τ. τοῦ κράματος; (ἰδὲ σελ. 151).

2) Πρὸς κατασκευὴν τυπογραφικῶν στοιχείων συντήκονται 20 μέρη ἀντιμονίου, 80 μέρη μολύβδου καὶ 5 μέρη χαλκοῦ. Τιμῶνται δὲ κατ' ὀκᾶν τὸ μὲν ἀντιμόνιον δραχ. 4,60, ὁ μόλυβδος δραχ. 1,15 καὶ ὁ χαλκὸς δραχ. 4,55. Τὰ λοιπὰ ἔξοδα διὰ τὴν κατασκευὴν τῶν στοιχείων τούτων εἶναι δραχμαὶ 0,65 κατ' ὀκᾶν. Πόσον στοιχίζει ἡ κατασκευὴ μιᾶς ὀκᾶς αὐτῶν;

3) Δύο εἴδη χρυσοῦ ἔχουσι τ. τὸ α′ 0,900, τὸ β′ 0,960. Πόσα γραμμάρια πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου εἴδους πρὸς σχηματισμὸν κράματος 35 γραμμαρίων ἔχοντος τ.=0,915;

4) Πρόκειται ἐξ ἀργυρῶν μονοδράχμων καὶ πεντοδράχμων νὰ κατασκευάσωμεν 12 κοχλιάρια ζυγίζοντα ἕκαστον 15 δράμια καὶ ἔχοντα τ.=0,875. Πόσα κέρματα πρέπει νὰ λάβωμεν ἐξ ἑκατέρου εἴδους;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ′.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΜΕΣΟΥ ΟΡΟΥ

287. *Πρόβλημα.* Ἐργάτης ἐργασθεὶς ἐπὶ 5 ἡμέρας ἔλαβε τὴν α′ ἡμέραν δρ. 2,40· τὴν β′ ἡμ. δρ. 1,80· τὴν γ′ ἡμ. δρ. 2· τὴν δ′ ἡμέραν δρ. 2,20 καὶ τὴν ε′ δρ. 3. Πόσα ἔλαβεν ἡμέραν παρ' ἡμέραν, ἤτοι πόσον θὰ ἦτο τὸ ἡμερομίσθιόν του, ἐὰν ὅλα ἦσαν ἴσα;

Λύσις. Ὁ ἐργάτης ἔλαβεν ἐν ὅλῳ δρ.

$$2,40+1,80+2+2,20+3=11,40.$$

Ἑπομένως, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν δρ. 11,40 : 5· ὁπότε εὑρίσκομεν δρ. 2,28.

288. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦ προηγουμένου προβλήματος λέγεται *μέσος ὅρος* τῶν ἡμερομισθίων. Ἐν γένει

Καλεῖται *μέσος ὅρος* ποσῶν ὁμοειδῶν, ὁ ἀριθμός, ὅστις θὰ παρίστα ἕκαστον τούτων, ἐὰν πάντα ἐγίνοντο ἴσα, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

289. Βλέπομεν δέ, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ μέσου ὅρου, προσθέτομεν τὰ δεδομένα ποσὰ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν διαιροῦμεν διὰ τοῦ πλήθους αὐτῶν.

290. ***Χρῆσις***. Εἰς πλείστας περιστάσεις χρησιμοποιεῖται ἡ εὕρεσις τοῦ μέσου ὅρου. Π. χ.

Ὅταν θέλωμεν νὰ μάθωμεν τὴν μέσην ἐτησίαν εἴσπραξιν ἑνὸς τελωνείου. Ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν μέσην θερμοκρασίαν τῆς ἡμέρας ἢ τοῦ ἔτους ἔν τινι τόπῳ. Ὁμοίως, ὅπως εὕρωμεν ἀκριβέστερον τὸν ἀριθμόν, ὅστις παριστᾷ μῆκός τι, τὸ ὁποῖον μετροῦντες ἀπ' εὐθείας δι' ἐπιθέσεως τῆς μονάδος εὑρίσκομεν διαφόρους ἀριθμούς. Π. χ. μετρήσαντες τὸ μῆκος αἰθούσης δι' ἐπιθέσεως τοῦ μέτρου, τρὶς κατ' ἐπανάληψιν, εὕρομεν τὰ ἑξῆς μήκη·

α'. 5,35 μ.
β'. 5,32 μ.
γ'. 5,33 μ.

Τότε, ὅπως πλησιάσωμεν περισσότερον πρὸς τὴν ἀλήθειαν, λαμβάνομεν τὸν μέσον ὅρον καὶ εὑρίσκομεν

μ. 5,33.

Ἀσκήσεις.

1) Τελωνεῖον κατὰ 3 συναπτὰ ἔτη εἰσέπραξε τὸ α' ἔτος δρ. 39356,85· τὸ β' δρ. 36000,95 καὶ τὸ γ' δρ. 48685,50. Πόση ὑπῆρξεν ἡ μέση ἐτησία εἴσπραξις;

2) Πόση ὑπῆρξεν ἡ μέση θερμοκρασία ἑνὸς ἡμερονυκτίου, καθ' ὃ ἡ μὲν μεγίστη ἦτο $15^{0},5$, ἡ δὲ ἐλαχίστη $8^{0},6$;

3) Εἰσπράκτωρ ταμείου ἔχει τακτικὸν μηνιαῖον μισθὸν δρ. 120. Λαμβάνει ὅμως καὶ ποσοστὰ ἐπὶ τῶν εἰσπραττομένων, τὰ ὁποῖα κατὰ τοὺς 6 μῆνας, καθ' οὓς ὑπηρέτησεν, ἦσαν κατὰ σειρὰν δρ. 25, δρ. 35,60, δρ. 40, δρ. 18,50, δρ. 20 καὶ δρ. 30,80. Πόση ὑπῆρξεν ἐν ὅλῳ ἡ μέση μηνιαία του μισθοδοσία;

ΒΙΒΛΙΟΝ Η΄.

ΠΕΡΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ

Ὁρισμοί.

291. *Τετράγωνον* ἢ *δευτέρα δύναμις* ἀριθμοῦ λέγεται, ὡς γνωρίζομεν (§ 61), τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐφ' ἑαυτόν· π.χ. τὸ τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι $5\times5=25$· τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{4}$ εἶναι $\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$. Ὁ ἀριθμὸς 5 λέγεται *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ 25. Ὁμοίως ὁ $\frac{3}{4}$ *τετραγωνικὴ ῥίζα* τοῦ $\frac{9}{16}$.

Ἐν γένει·

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου οὗτος εἶναι τετράγωνον, σημειοῦται δὲ αὕτη διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt{\ }$, *ὅπερ καλεῖται ῥιζικόν, τιθεμένου ὑπ' αὐτὸ τοῦ ἀριθμοῦ, οὗ σημειοῦμεν τὴν ῥίζαν.* Π. χ.

$$\sqrt{25}=5.$$

ΓΝΩΡΙΣΜΑΤΑ ΤΕΛΕΙΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

292. *Θεώρημα α΄)* Ὁ ἀριθμὸς 20 οὐδενὸς ἀκεραίου εἶναι τετράγωνον· ἂς ἴδωμεν, ἂν εἶναι τετράγωνον κλάσματος. Ἔστω

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=20 \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}=20 \qquad (1)$$

Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ἀνάγωγον, διότι, καὶ ἂν δὲν εἶναι, καθιστῶμεν αὐτὸ τοιοῦτο διὰ τῆς ἁπλοποιήσεως, ὁπότε (§ 78) καὶ τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ θὰ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ νὰ διαιρῆται ἀκριβῶς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἄτοπος. Ἄρα

Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου, δὲν εἶναι οὐδὲ κλάσματος· ἑπομένως οὐδενὸς ἀριθμοῦ.

Τέλειον τετράγωνον λέγεται πᾶς ἀριθμός, ὅστις ἔχει ὡς τετραγωνικὴν ῥίζαν ἄλλον ἀριθμόν. Τοιοῦτοι π. χ. εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$25,\ 100,\ \frac{4}{9},\ \frac{9}{16}\ \text{κ. λ.}$$

Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἕπεται ὅτι, διὰ νὰ διακρίνωμεν, ἂν ἀριθμὸς ἀκέραιος εἶναι ἢ ὄχι τέλειον τετράγωνον, ἀρκεῖ νὰ γνωρίσωμεν, ἂν εἶναι ἢ ὄχι τετράγωνον ἄλλου ἀκεραίου.

Ἐκ τούτου προκύπτουσι τὰ ἑπόμενα γνωρίσματα·

1) ***Ἀριθμὸς ἀκέραιος εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὅταν*** (§ 93) ***πάντες οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων αὐτοῦ παραγόντων εἶναι ἄρτιοι καὶ τότε μόνον.***

Π. χ. ὁ ἀριθμὸς $144=2^4\times3^2$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $2^2\times3=12$. Ὁ ἀριθμὸς $72=2^3\times3^2$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Εἰς τὸν κανόνα τοῦτον ὑπάγεται καὶ ὁ ἑξῆς·

Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς διαιρεῖται διά τινος πρώτου ἀριθμοῦ, χωρὶς νὰ διαιρῆται καὶ διὰ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· π. χ. ὁ 123, ὅστις διαιρεῖται διὰ τοῦ 3, ἀλλ' οὐχὶ καὶ διὰ τοῦ $3^2=9$.

2) Ἐὰν ἀριθμὸς ἀκέραιος λήγῃ εἰς μηδενικά, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ λήγει εἰς διπλάσιον ἀριθμὸν μηδενικῶν. Ἄρα

Ἀριθμὸς ἀκέραιος λήγων εἰς περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

3) Τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν κατὰ σειρὰν εἶναι

$$1,\quad 4,\quad 9,\quad 16,\quad 25,\quad 36,\quad 49,\quad 64,\quad 81\cdot$$

παρατηροῦμεν δέ, ὅτι οὐδὲν τούτων λήγει εἰς 2, 3, 7 ἢ 8. Ἐκ δὲ τοῦ κανόνος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων προκύπτει, ὅτι τὸ τετράγωνον ἀκεραίου λήγει εἰς τὸ αὐτὸ ψηφίον, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τελευταίου αὐτοῦ ψηφίου. Ἄρα

Ἀκέραιος λήγων εἰς ἓν τῶν ψηφίων 2, 3, 7 ἢ 8 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

293. *Θεώρημα β'*. Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα προφανῶς δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Ἑπομένως, ἐὰν ὑπάρχῃ, θὰ εἶναι κλάσμα καὶ ἔστω αὐτὴ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπερ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ἀνάγωγον. Θὰ ἔχωμεν

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2=\frac{\mu^2}{\nu^2}=\frac{\alpha}{\beta},$$

ἀλλὰ κατὰ τὴν § 116 πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$\mu^2=\alpha \quad \text{καὶ} \quad \nu^2=\beta.$$

Ἄρα

Κλάσμα ἀνάγωγον τότε μόνον εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι τέλεια τετράγωνα. Ἡ δὲ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα εἶναι κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστὴν τὴν τοῦ παρονομαστοῦ.

Π. χ. Τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· τὸ κλάσμα ὅμως $\frac{9}{16}$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{4}$.

Σημ. Κλάσμα μὴ ἀνάγωγον δύναται νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον, χωρὶς οἱ ὅροι αὐτοῦ νὰ εἶναι τοιοῦτοι· π.χ. τὸ $\frac{18}{34}$ εἶναι τετράγωνον τοῦ $\frac{3}{4}$.

Ἀσκήσεις.

1) Ἡ ἀξία τοῦ ἀδάμαντος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ βάρους αὐτοῦ. Π. χ., ἐὰν τὸ βάρος αὐτοῦ γίνῃ τρὶς μεῖζον, ἡ ἀξία αὐτοῦ γίνεται 9άκις μείζων. Πόσον τιμᾶται ἀδάμας βάρους 0,125 γραμμ., ἐὰν 1 γραμμ. τιμᾶται 2457 δρ.;

2) Τίνες ἐκ τῶν ἀριθμῶν 5644, 5625, 1566, 1521, 3600, 18000 εἶναι τέλεια τετράγωνα;

3) Ἐκ τῶν κλασμάτων $\frac{25}{81}$, $\frac{25}{62}$, $\frac{42}{49}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{160}{250}$, $\frac{9}{27}$, $\frac{127}{381}$, $\frac{144}{225}$ ποῖα εἶναι τέλεια τετράγωνα;

4) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι τέλειον τετράγωνον, καὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

5) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν ἀριθμός τις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, καὶ τὸ τέταρτον αὐτοῦ θὰ εἶναι ὁμοίως ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

Τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν.

294. Ὁ ἀριθμὸς 20 δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· τὸ μεγαλύτερον δὲ ἀκέραιον τετράγωνον, το ὁποῖον περιέχεται ἐν αὐτῷ, εἶναι $16=4^2$. Ὁ ἀριθμὸς 4 λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 20 *κατὰ προσέγγισιν μονάδος*. Γενικῶς

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον περιέχεται εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Οὕτως ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{24}=4\\ \sqrt{60}=7\\ \sqrt{50}=7\\ \sqrt{10}=3\end{array}\right\}\text{ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.}$$

Θεωρήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 10. Τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{31}{10}$, ὅπερ εἶναι 9,61, χωρεῖ εἰς αὐτόν, ἀλλὰ τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{32}{10}$, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 10,24, δὲν χωρεῖ. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{31}{10}$ λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 10 *κατὰ προσέγγισιν δεκάτου*. Ἐν γένει

Τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ λέγεται τὸ μέγιστον κλάσμα ἐκ τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν ν καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα περιέχονται εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.

Τετράγωνον ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν.

295. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀριθμῶν χρησιμεύει, ὡς θὰ ἴδωμεν, τὸ ἑπόμενον θεώρημα.

Θεώρημα. Θεωρήσωμεν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$· ἔχομεν

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)\times(\alpha+\beta)=\alpha\times\alpha+\alpha\times\beta+\alpha\times\beta+\beta\times\beta$$
$$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἄρα

Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου, τοῦ διπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ τοῦ τετραγώνου τοῦ δευτέρου. Π. χ.

$$(2+3)^2=4+12+9=25.$$

Πόρισμα 1ον. Τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ ἀποτελουμένου ἀπὸ δεκάδας καὶ μονάδας, σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων, τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν δεκάδων ἐπὶ τὰς μονάδας καὶ ἐκ τοῦ τετραγώνου τῶν μονάδων. Π. χ.

$$25^2=(20+5)^2=400+200+25=625.$$

Πόρισμα 2ον. Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν διαφερόντων κατὰ 1 ἰσοῦται τῷ διπλασίῳ τοῦ μικροτέρου ηὐξημένῳ κατὰ 1. Τῳόντι

$$(\alpha+1)^2-\alpha^2=\alpha^2+2\alpha+1-\alpha^2=2\alpha+1.$$
$$5^2-4^2=9=4\times2+1.$$

296. *Χρῆσις.* Διὰ τοῦ πορίσματος τούτου δυνάμεθα εὐκολώτατα νὰ σχηματίζωμεν τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων κατὰ σειρὰν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς. Π.χ., ἀφοῦ εὕρωμεν ὅτι $25^2=625$, διὰ νὰ εὑ-

φωμεν τὸ 26^2 ἀρκεῖ εἰς τὸ 625 νὰ προσθέσωμεν $25\times2+1=51$.

Οὕτως ἔχομεν

$$26^2=676\cdot \qquad \text{ὁμοίως}$$

$$27^2=676+53=729 \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Ἀσκήσεις.

1) Διὰ τοῦ προηγουμένου πορίσματος νὰ σχηματισθῇ πίναξ τῶν τετραγώνων τῶν ἀκεραίων ἀπὸ τοῦ 10 μέχρι τοῦ 22.

2) Δεδομένου ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ἀδάμαντος εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ βάρους αὐτοῦ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀξία αὐτοῦ ἐλαττοῦται, ἐὰν χωρισθῇ εἰς δύο τεμάχια.

3) Ἂς ὑποτεθῇ ὅτι τὸ καράτιον (4 κόκκοι) ἀδάμαντος τιμᾶται 500 δρ. Πόσον τιμᾶται τοιοῦτος ἀδάμας ζυγίζων 15 καράτια καὶ κατὰ πόσον θὰ ἐλαττωθῇ ἡ ἀξία του, ὅταν χωρισθῇ εἰς δύο τεμάχια ζυγίζοντα τὸ μὲν 10 καράτια, τὸ δὲ 5;

* 4) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἔκπτωσις τῆς ἀξίας ἀδάμαντος χωριζομένου εἰς δύο τεμάχια εἶναι μεγίστη, ὅταν τὰ τεμάχια ταῦτα ἔχωσι τὸ αὐτὸ βάρος.

Ἡ ἀπόδειξις στηρίζεται εἰς τὸ ὅτι, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἔχωσιν ἄθροισμα σταθερόν, π. χ. 10, τὸ γινόμενον αὐτῶν ἔχει τὴν μεγαλυτέραν τιμήν, ὅταν εἶναι ἴσοι, ἤτοι 5 καὶ 5.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ καλεῖται ἡ εὕρεσις αὐτῆς. Ἤδη δὲ θὰ ἐξετάσωμεν πῶς εὑρίσκεται αὕτη.

Α' Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀκεραίων ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

297. Ἐὰν ὁ ἀκέραιος εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα ἡ ἀκριβὴς (ἐὰν εἶναι τέλειον τετράγωνον) ἢ ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 10, ἤτοι ἀριθμὸς

μονοψήφιος καὶ δυνάμεθα νὰ τὴν εὕρωμεν ἀπὸ στόματος ἐνθυμούμενοι τὰ γινόμενα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν· π. χ.

$$\sqrt{9}=3 \text{ ἀκριβῶς},$$

$$\sqrt{72}=8 \text{ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.}$$

Ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι μικρότερος τοῦ 100, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα δὲν θὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ 10 καὶ θὰ περιέχῃ ἑπομένως δεκάδας, πλὴν δὲ ἐξαιρετικῶν τινων περιπτώσεων δὲν δυνάμεθα τότε νὰ τὴν εὕρωμεν ἀπὸ στόματος, ἀλλ' εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ πρᾶξις, τὴν ὁποίαν θὰ γνωρίσωμεν ἤδη.

Ὑπόλοιπον τῆς πράξεως λέγομεν τὴν ὑπεροχὴν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀπὸ τοῦ μεγίστου ἐν αὐτῷ ἀκεραίου τετραγώνου· π. χ. διὰ τὸν ἀριθμὸν 78 ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶναι $78-64=14$.

298. Ζητήσωμεν ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 3865. Ἔστω δ ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων καὶ μ ὁ τῶν μονάδων αὐτῆς, υ δὲ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως· θὰ ἔχωμεν

$$3865=(\delta\times 10+\mu)^2+\upsilon$$

ἢ κατὰ τὸ ἐδάφιον 295

$$3865=\delta^2\times 100+2\times\delta\times\mu\times 10+\mu^2+\upsilon \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς περιέχει τὸν ἀριθμὸν $\delta^2\times 100$, ἀλλ' οὐχὶ καὶ τὸν $(\delta+1)^2\times 100$, διότι τότε ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ θὰ περιεῖχε δεκάδας περισσοτέρας τῶν δ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δ^2 ἑκατοντάδες μόνον εἰς τὰς 38 ἑκατοντάδας τοῦ ἀριθμοῦ δύνανται νὰ περιέχωνται, ἕπεται, ὅτι δ^2 εἶναι τὸ μέγιστον ἀκέραιον τετράγωνον τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν 38, ἤτοι

$$\delta^2=36 \text{ καὶ } \delta=6.$$

Ἤδη θὰ ζητήσωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων μ. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) τὸ $\delta^2\times 100=3600$ καὶ ἔχομεν

$$265=2\times\delta\times\mu\times 10+\mu^2+\upsilon \qquad (2)$$

Πᾶσαι αἱ δεκάδες τοῦ β′ μέρους εἶναι 26. Ἄρα

$$26 \geqq 2 \times \delta \times \mu \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{26}{2 \times \delta} = \frac{26}{12} \geqq \mu.$$

Ἑπομένως τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ πηλίκου $\frac{26}{12}$, ἤτοι 2, θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς ῥίζης.

Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν τὸν 2, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν αὐτὸν δεξιὰ τοῦ 6 καὶ νὰ παρατηρήσωμεν, ἂν τοῦ προκύπτοντος ἀριθμοῦ 62 τὸ τετράγωνον χωρεῖ εἰς τὸν 3865· εὑρίσκομεν τωόντι ὅτι $62^2 = 3844$ χωρεῖ· ἐπομένως ὁ 2 δὲν ὑπερβαίνει τὸ μ καὶ ἡ ζητουμένη ῥίζα εἶναι 62.

Ἡ δοκιμὴ ὅμως τοῦ 2 δύναται νὰ γίνῃ καὶ ὡς ἑξῆς. Ἔχομεν

$$62^2 = (60+2)^2 = 3600 + 120 \times 2 + 2 \times 2.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ ἀφῃρέσαμεν ἤδη 3600 καὶ εὕρομεν ὑπόλοιπον 265, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν, ἂν ἀπὸ τὸ 265 ἀφαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς

$$120 \times 2 + 2 \times 2 = 122 \times 2.$$

Ἐὰν τὸ γινόμενον τοῦτο δὲν ἀφῃρεῖτο ἀπὸ τὸ 265, ἠθέλομεν δοκιμάσει τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ἡ ἀφαίρεσις γίνῃ δυνατή.

Ἡ ὅλη πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{r|l} 3865 & 62 \\ \cline{2-2} 36 & \;\;122 \\ \cline{1-1} 265 & \;\;\;\;\;\;2 \\ \cline{2-2} 244 & \;\;244 \\ \cline{1-1} 21 & \end{array}$$

21 εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως.

Ζητήσωμεν ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 386527. Κατὰ τὰ προηγούμενα ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου τετραγώνου τοῦ περιεχομένου εἰς τὰς ἑκατοντάδας αὐτοῦ, ἤτοι ὁ 62· πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων γράφομεν δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς προηγουμένης πράξεως τὸν ἀριθμὸν 27 καὶ ἔχομεν τὸν ἀριθμὸν 2127, τοῦ ὁποίου τὰς δεκάδας 212 διαιροῦμεν διὰ τοῦ $62 \times 2 = 124$ καὶ εὑρίσκομεν πηλίκον 1, τὸ ὁποῖον δοκιμάζομεν, ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα καὶ εὑρίσκομεν ὅτι αὐτὸ πράγματι εἶναι τὸ ζητούμενον καὶ ἑπομένως ἡ ζητουμένη τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι 621.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς·

38′65′27	621	
36	122	1241
26′5	2	1
24 4	244	1241
212′7		
124 1		
88 6		

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν κανόνα·

299. *Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 100, χωρίζομεν αὐτὸν εἰς τμήματα διψήφια ἀρχόμενοι ἐκ δεξιῶν, ὁπότε τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμῆμα δύναται νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιον. Ἔπειτα ἐκτελοῦμεν κατὰ σειρὰν τὰς ἑπομένας πράξεις.*

α′) Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ α′ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος καὶ ἔχομεν οὕτω τὸ α′ ψηφίον τῆς ῥίζης. Γράφομεν τὸ ψηφίον τοῦτο πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, τὸν ὁποῖον χωρίζομεν ἀπὸ τοῦ ψηφίου τούτου διὰ καθέτου γραμμῆς.

β′) Ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ α′ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήματος τὸ *τετράγωνον τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου καὶ καταβιβάζομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ ὑπολοίπου τὸ β′ τμῆμα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ.*

γ′) Τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸ καταβιβασθὲν τμῆμα, χωρίζομεν τὰς δεκάδας, τῶν ὁποίων τὸν ἀριθμὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ α′ ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ β′ ψηφίου τῆς ῥίζης.

δ′) Διὰ νὰ τὸ δοκιμάσωμεν, τὸ γράφομεν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης καὶ τὸν προκύπτοντα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζομεν ἐπ' αὐτὸ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον, τὸ δὲ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου διῃρέσαμεν τὰς δεκάδας. Ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις εἶναι δυνατή, δεχόμεθα τὸ δοκιμαζόμενον ὡς β′ ψηφίον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης καὶ τὸ γράφομεν δεξιὰ τοῦ α′ ψηφίου αὐτῆς· ἄλλως δοκιμάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸν κατὰ μονάδα μικρότερον ἀριθμὸν καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἀριθμόν, διὰ τὸν ὁποῖον ἡ ἀφαίρεσις αὕτη νὰ εἶναι δυνατή.

ε′) Πρὸς τὰ δεξιὰ τῆς διαφορᾶς ταύτης καταβιβάζομεν τὸ γ′ τμῆμα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ καὶ σχηματίζομεν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰς δεκάδας διαιροῦμεν διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης. Τὸ πηλίκον δοκιμάζομεν, ὡς εἴπομεν προηγουμένως, καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις οὗ καταβιβάσωμεν καὶ τὸ τελευταῖον τμῆμα τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ, ὁπότε θὰ εὕρωμεν τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ῥίζης.

Παρατηρήσεις.

300. 1) Ἐκ τοῦ προηγουμένου κανόνος βλέπομεν ὅτι ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα θὰ ἔχῃ τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι τὰ τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζομεν τὸν ἀριθμόν· ἑπομένως, ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἀκέραιος ἔχῃ 2ν ψηφία, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα θὰ ἔχῃ ν ψηφία· ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἔχῃ $2\nu+1$ ψηφία, ἡ τετραγωνικὴ αὐτοῦ ῥίζα θὰ ἔχῃ $\nu+1$ ψηφία.

2) Ἐὰν εἴς τινα τῶν γινομένων διαιρέσεων τὸ πηλίκον ὑπερβαίνῃ τὸν 9, θὰ δοκιμάζωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς μονοψηφίους 9, 8, 7 κ.τ.λ.· π. χ.

$$\begin{array}{r|l} 3'87 & 19 \\ \cline{2-2} 2\,87 & \;\;29 \\ 2\,61 & \;\;\;\;9 \\ \cline{1-1}\cline{2-2} 26 & 261 \end{array}$$

3) Ἐὰν εἴς τινα τῶν διαιρέσεων τὸ πηλίκον εἶναι 0, γίνεται ἀμέσως δεκτὸν ὡς ψηφίον τῆς ῥίζης· π. χ.

$$\begin{array}{r|l} 9'3\,2 & 3 \\ \cline{2-2} 3'2 & 60 \end{array}$$

4) Κατὰ τὸ ἐδάφιον 296 τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης· διότι, ἂν θεωρήσωμεν τὸ προηγούμενον παράδειγμα, ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ 30^2 καὶ 31^2 εἶναι

$$2\times30+1=61,$$

τὸ δὲ ὑπόλοιπον, ἐπειδὴ πρέπει νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ 61, δὲν δύναται νὰ ὑπερβαίνῃ τὸ 60.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν δεκαδικῶν.

301. Ἔστω ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 58,3425. Τὸ μέγιστον ἐν αὐτῷ περιεχόμενον ἀκέραιον τετράγωνον εἶναι προφανῶς τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν ἀκέραιον 58, εἶναι δὲ τοῦτο τὸ $49=7^2$. Ἄρα

$$\sqrt{58,3425}=7 \text{ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.}$$

Γενικῶς

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα δεκαδικοῦ κατὰ ***προσέγγισιν μονάδος*** *εἶναι ἡ τοῦ ἀκεραίου αὐτοῦ μέρους.*

Δυνάμεθα ὅμως κατὰ μείζονα προσέγγισιν ἢ καὶ ἀκριβῶς (ἐὰν εἶναι τέλειον τετράγωνον) νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ.

Θεωρήσωμεν π. χ. τὸν προηγούμενον ἀριθμὸν 58,3425· ἀπαλείφομεν τὸ κόμμα καὶ εὑρίσκομεν κατὰ τὸν κανόνα

$\sqrt{583425}=763$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἤτοι $\begin{matrix} 763^2 \\ 764^2 \end{matrix} \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 583425.$

Διαιροῦντες δὲ τὰ μέλη τῶν ἀνισοτήτων διὰ 10000 ἔχομεν

$$7,63^2 < 58,3425 < 7,64^2.$$

Ἑπομένως

$7,63 = \sqrt{58,3425}$ κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Ἡ θεωρία αὐτὴ ὑποθέτει ὅτι τὸ πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων εἶναι ἄρτιον· ἐὰν δὲ εἶναι περιττόν, δυνάμεθα διὰ προσθήκης ἑνὸς μηδενικοῦ εἰς τὸ τέλος νὰ καταστήσωμεν αὐτὸ ἄρτιον καὶ εἶτα νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω· π. χ.

$\sqrt{3,4} = \sqrt{3,40} = 1,8$ κατὰ προσέγγισιν 0,1.

Ἐκ τούτων ἕπεται

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν δεκαδικοῦ κατὰ προσέγγισιν κλασματικῆς δεκαδικῆς μονάδος, παρατηροῦμεν, ἂν ἔχει ἄρτιον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων καί, ἐὰν δὲν ἔχῃ, γράφομεν ἓν μηδενικὸν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ. Ἔπειτα ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν αὐτοῦ, ὡς ἐὰν ἦτο ἀκέραιος, μὴ προσέχοντες δηλ. εἰς τὸ κόμμα, καὶ εἰς ταύτην χωρίζομεν δεκαδικὰ ψηφία δὶς ὀλιγώτερα ἢ ὅσα ἀρτίου πλήθους ἔχει ὁ ἀριθμός. Ἡ οὕτως εὑρισκομένη τετραγωνικὴ ῥίζα εἶναι κατὰ προσέγγισιν μονάδος δεκαδικῆς τῆς κατωτάτης ἐν αὐτῇ τάξεως, ἐκτὸς ἐὰν εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον 0, ὁπότε εἶναι ἀκριβής.

Ὁ κανὼν οὗτος ἐφαρμόζεται καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους θεωρουμένους ὡς δεκαδικούς· π. χ.

$$\sqrt{5}=\sqrt{5{,}0000}=2{,}23 \text{ κατὰ προσέγγισιν } 0{,}01.$$

Ἤτοι θέλοντες νὰ εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 5 κατὰ προσέγγισιν 0,01 θέτομεν ὡς δεκαδικὰ ψηφία αὐτοῦ 4 μηδενικά, ἤτοι διπλάσια τῶν ὅσα ἔχει ὁ 0,01, καὶ ἐργαζόμεθα ἔπειτα κατὰ τὸν κανόνα.

Καὶ δεκαδικοῦ δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε θέλομεν κλασματικῆς δεκαδικῆς μονάδος. Π. χ., ἐὰν θέλωμεν τὴν τετρ. ῥίζαν 5,4 κατὰ προσέγγισιν 0,01, γράφομεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ 3 μηδενικὰ καὶ ἔχομεν

$$\sqrt{5{,}4}=\sqrt{5{,}4000}=2{,}32 \text{ κατὰ προσέγγισιν } 0{,}01.$$

Ἐὰν ὁ δεκαδικὸς ἔχῃ περισσότερα τῶν ὅσα χρειαζόμεθα δεκαδικὰ ψηφία, παραλείπομεν τὰ πλεονάζοντα. Π. χ.

$$\sqrt{3{,}1415926}=\sqrt{3{,}1415}=1{,}77 \text{ κατὰ προσέγγισιν } 0{,}01.$$

Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

302. Θεωρήσωμεν πρῶτον κλάσματα, τῶν ὁποίων ὁ παρονομαστὴς εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Παράδειγμα α΄) Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{9}{16}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς 16 εἶναι 4^2· ἐνταῦθα καὶ ὁ ἀριθμητὴς 9 εἶναι 3^2. Ἑπομένως

$$\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4} \text{ ἀκριβῶς.}$$

Καὶ τῷόντι

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}.$$

Ἄρα

Ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι τέλεια τετράγωνα, εὑρίσκομεν ἀκριβῶς τὴν τετρ. ῥίζαν αὐτοῦ ἐξάγοντες τὴν τετρ. ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν ὅρων.

Παράδειγμα β') Ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{7}{16}$, τοῦ ὁποίου μόνον ὁ παρονομαστὴς εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἔχομεν

$$\sqrt{7}=2 \text{ κατὰ προσέγγισιν μονάδος·}$$

ἑπομένως

$$\left(\frac{2}{4}\right)^2 < \frac{7}{16} < \left(\frac{3}{4}\right)^2, \text{ ἤτοι}$$

$$\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{2}{4} \text{ κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{4}.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 7 κατὰ μείζονα προσέγγισιν, π. χ. 0,1, εὑρίσκομεν

$$\sqrt{7}=2,6 \quad \text{καὶ}$$

$$\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{2,6}{4} \text{ κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{4} \text{ τοῦ } 0,1 \text{ ἢ } \frac{1}{40}.$$

Ἄρα

Ὅταν μόνον ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ μὲν παρονομαστοῦ ἀκριβῶς, τοῦ δὲ ἀριθμητοῦ κατὰ προσέγγισιν ἀκεραίας ἢ κλασματικῆς δεκαδικῆς μονάδος ἔχομεν τὴν ζητουμένην τετραγωνικὴν ῥίζαν κατὰ προσέγγισιν μιᾶς τῶν μονάδων αὐτῆς ἢ δεκαδικοῦ μέρους μιᾶς τῶν μονάδων τούτων.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ κλάσμα $\frac{7}{12}$, τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστὴς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον· ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ 12, ὁ παρονομαστὴς γίνεται τέλειον τετράγωνον καὶ ἐπανερχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν. Οὕτως ἔχομεν·

$$\sqrt{\frac{7}{12}}=\sqrt{\frac{84}{12^2}}=\frac{9}{12} \text{ κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{12},$$

$$\text{ἢ}=\frac{9,1}{12} \text{ κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{12} \text{ τοῦ } 0,1 \text{ ἢ } \frac{1}{120}.$$

303. Ἔστω ἤδη ἀριθμὸς οἱοσδήποτε α. Ἔχομεν

$$\alpha=\frac{\alpha\times\nu^2}{\nu^2}.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι

$$\sqrt{\alpha\times\nu^2}=\beta \text{ ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.}$$

Τότε κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\sqrt{\alpha}=\frac{\beta}{\nu} \text{ κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{\nu}.$$

Ἄρα

Παντὸς ἀριθμοῦ ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ *εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον ἐπὶ* ν^2· *τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ταύτην διαιροῦμεν διὰ ν.* Π. χ.

$$\sqrt{2}=\sqrt{\frac{2\times5^2}{5^2}}=\sqrt{\frac{50}{25}}=\frac{7}{5} \text{ κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{5}.$$

Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀριθμοῦ μικτοῦ κατὰ προσέγγισιν εὑρίσκεται ἐφαρμοζομένων τῶν προηγουμένων κανόνων.

Π. χ. $\sqrt{10\,\frac{3}{4}}=3$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος,

$$\sqrt{10\,\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{43}{4}}=\frac{6}{2} \text{ κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{4}.$$

᾿Ασκήσεις.

1) Νὰ εὑρεθῶσι

$$\sqrt{64},\quad \sqrt{14400},\quad \sqrt{368291},\quad \sqrt{1889}$$

ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

2) Νὰ εὑρεθῶσι

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{10},\quad \sqrt{3,25},\quad \sqrt{0,365}$$

ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν 0,1.

3) Νὰ εὑρεθῶσιν ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$

$$\sqrt{\frac{9}{100}},\ \sqrt{\frac{5}{8}},\ \sqrt{12\,\frac{5}{6}},\ \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

4) Νὰ εὑρεθῶσι κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{8}$

$$\sqrt{8},\quad \sqrt{8\,\frac{3}{4}},\quad \sqrt{3,5},\quad \sqrt{527}$$

5) Τὸ βασιλικὸν στρέμμα ἐν Ἑλλάδι εἶναι 1000 τ. μ. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου;

6) ᾿Ορθογωνίου παραλληλογράμμου τὸ μῆκος εἶναι 12,5 μ., τὸ δὲ πλάτος 5,6· πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἰσοδυνάμου τετραγώνου;

7) Εἰς πλῆθος ἀνθρώπων διενεμήθησαν 1296 ᾠά, ἔλαβε δὲ ἕκαστος τόσα ᾠά, ὅσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι καὶ πόσα ἔλαβεν ἕκαστος;

8) Μαθητὴς ἐκτελεῖ 20 βήματα, ἵνα διατρέξῃ τὸ μῆκος τῆς αἰθούσης τῆς τάξεώς του καὶ 14,5 βήματα, ἵνα διατρέξῃ τὸ πλάτος. Πόσα βήματα χρειάζεται, ἵνα διατρέξῃ τὴν διαγώνιον;

Λύσις. Πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν ὅτι ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Ἀσκήσεις ἐν γένει ἐπὶ τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης.

1) Ποσάκις γίνεται μεῖζον τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ὅταν ἡ πλευρὰ αὐτοῦ γίνῃ 8άκις μείζων;

2) Τετραγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 5,5 μ.· πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ διπλάσιον αὐτοῦ ἔχοντος ἐμβαδὸν τετραγώνου;

* 3) Ἐὰν ἐξάγοντες τὴν τετρ. ῥίζαν ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος, εὑρίσκωμεν ὑπόλοιπον μὴ ὑπερβαῖνον τὴν εὑρεθεῖσαν τετρ. ῥίζαν, αὕτη εἶναι συνάμα καὶ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{2}$.

4) Ἡ τετρ. ῥίζα τοῦ $\frac{5}{6}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{6}$ εἶναι αὐτὸς ὁ $\frac{5}{6}$· Νὰ δειχθῇ γενικῶς ὅτι

$$\sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa}}=\frac{\kappa-1}{\kappa} \text{ κατὰ προσέγγισιν } \frac{1}{\kappa}.$$

5) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι 29· τίνες οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι;

6) Ἐὰν ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀκεραίων εἶναι ἄρτιος ἀριθμός, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι διαφέρουσι περισσότερον τῆς μονάδος.

7) Τεμάχιον ἀδάμαντος ἀξίζει δρ. 8672· πόσον εἶναι τὸ βάρος αὐτοῦ, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ καρατίου (4 κόκκοι ἢ $\frac{1}{5}$ τοῦ γραμ.) εἶναι 500 δραχμαί;

ΤΕΛΟΣ

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

Σελ. 3. § 2. Ἀντὶ *συγκεκριμένῳ* γράφε =*συγκρινομένῳ*.

Σελ. 7. § 15. Ἀντὶ *νὰ κατέχῃ τὴν πρώτην θέσιν* γράφε *νὰ κατέχῃ τὴν πρώτην θέσιν ἐκ δεξιῶν*.

Σελ. 35. § 53. Ἀντὶ *εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 1* γράφε *εὑρίσκομεν ὑπόλοιπόν τι*.

Σελ. 57. § 84. Ἀντὶ *ἕπεται κατὰ τὸ θεώρημα ὅτι* γράφε *ἕπεται κατὰ τὸ θεώρημα § 76 ὅτι*.

Σελ. 79. § 108. Ἀντὶ *π.χ.* $5+\frac{3}{4}$, · · · γράφε *π.χ.* $5+\frac{3}{4}$, *ὅπερ γράφεται συντομώτερον* $5\frac{3}{4}$.

Σελ. 87. § 120. Ἀριθμητὴς τοῦ γ'. κλάσματος=7.

Σελ. 98. § 141. Ἀντὶ *ἐκ τοῦ κανόνος τῆς § 133* γράφε *ἐκ τοῦ κανόνος τῆς § 134*.

Σελ. 105. § 153. *παριστῶντες διὰ π τὸ πηλίκον α : β*=παραλειπτέον ὡς περιττόν.

Σελ. 109. § 158. Ἄσκησις 2).=ἰδὲ σελ. 132 ἄσκησ. 5).

Σελ. 114. § 168. Ἀντὶ *ἕπεται ἐντεῦθεν καὶ ἐκ τῆς § 144* γράφε *ἕπεται ἐντεῦθεν καὶ ἐκ τῆς § 145*.

Σελ. 120. § 175. Ἀντὶ *ἡ ἐξίσωσις ὅμως δὲν* γράφε *ἡ ἐξίσωσις ὅμως αὕτη δὲν*

Σελ. 141. § 198. Ἀντὶ *καὶ τὸ προηγούμενον* γράφε *καὶ τὸ προηγούμενον κλάσμα*.

Σελ. 166. § 238 Ἀντὶ τὰ $\frac{3}{3}$ γράφε τὰ $\frac{3}{8}$.

Σελ. 167. § 239. Πρόβλ. ϐ'. ἀντὶ $\times 5$ *γρόσ. 25 ῥούπ.* γράφε $\times 5$ *γρόσ. 25 παρ.*

Σελ. 169. § 240. Παράδ. α΄. ἡ πρώτη ὁριζοντία γραμμὴ πρέπει νὰ τεθῇ ἄνωθεν τοῦ 1584.

Σελ. 170. § 240. Παράδ. β΄. ἡ πρᾶξις διορθωτέα ὡς ἑξῆς:

		5 γρόσ.	
		56 πήχ.	5 ῥούπ.
Ἀξία 56 πήχ. πρὸς 5 γρόσ.		280 γρόσ.	
Ἀξία τῶν 5 ῥουπ.	4....2		20 παρ.
	1....0		25
Ὁλικὸν γινόμενον		283 γρόσ.	5 παρ.