385

Lemius

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΑ ΜΟΝΑ ΕΓΚΡΙΘΕΝΤΑ

ΕΝ ΤΟΙΣ ΓΕΝΟΜΕΝΟΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΟΓΔΟΗ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ Π. Δ. ΣΑΚΕΛΛΑΡΙΟΥ
1904

Πᾶν ἀντίτυπον μὴ φέρον τὴν ὑπογραφήν μου θεωρεῖται ἐκ τυποκλοπίας προερχόμενον.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Χριστόφορος Ε. Δημητρίου

Ἡ γεωμετρία ἐξετάζει τὰ σώματα ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν, τὸ σχῆμα καὶ τὴν θέσιν· τὸ ἔργον δ' αὐτῆς τοῦτο εἶνέ τι ποικίλον καὶ πολλαπλοῦν· ἐν ᾧ ἡ ἀριθμητική, ἐξετάζουσα αὐτὰ μόνον ὡς πρὸς τὸ πλῆθος, ἔχει ἔργον ἁπλοῦν. Ἀμφότεραι θεμελιοῦνται ἐπί τινων ἁπλουστάτων πρώτων ἐννοιῶν, ἐν ἡμῖν διὰ τῆς ἐπιδράσεως τοῦ ἐκτὸς ἡμῶν κόσμου γενομένων, δι' ὧν αἱ λοιπαὶ ὁρίζονται, καὶ ἐπί τινων προτάσεων, καλουμένων ἀξιωμάτων ἢ αἰτημάτων, δι' ὧν αἱ λοιπαὶ ἀποδεικνύονται. Ἀλλ' αἱ θεμελιώδεις ἔννοιαι καὶ αἱ θεμελιώδεις προτάσεις τῆς γεωμετρίας, ἤτοι αἱ ἀρχαὶ αὐτῆς, εἶνε διὰ τὸ πολλαπλοῦν καὶ ποικίλον τοῦ ἔργου αὐτῆς ποικίλαι καὶ διάφοροι ἀπ' ἀλλήλων (τὰ ἀξιώματα, λόγου χάριν, τῆς ἰσότητος καὶ τῆς ἀνισότητος εἶνε πάντη διάφορα τῶν ἀξιωμάτων τῆς εὐθείας γραμμῆς, καὶ ταῦτα διάφορα τῶν τῆς συνεχείας καὶ τῆς κινήσεως)· ὅθεν καὶ τὰ θεωρήματα αὐτῆς δὲν ἔχουσι τὴν ἑνότητα καὶ τὸ ὁμοιόμορφον τῶν θεωρημάτων τῆς ἀριθμητικῆς, μάλιστα δὲ τῆς γενικῆς, ἥτις ἀπὸ ὀλιγίστων ἀρχῶν ἀναπτύσσεται.

Ἐκ τούτων ἐννοεῖ πᾶς τις, ὅτι ἡ ἔρευνα τῶν θεμελιωδῶν τῆς γεωμετρίας προτάσεων καὶ ἐννοιῶν, ἡ ἐξακρίβωσις δηλονότι τῆς πρὸς ἀλλήλας σχέσεως αὐτῶν καὶ τῆς σημασίας καὶ δυνάμεως ἑκάστης, ἔτι δὲ καὶ ἡ διάκρισις αὐτῶν εἰς εἴδη, θὰ ἦτο ~~τὸ~~ μέγιστα ὠφέλιμος εἰς τὴν διάπλασιν τῆς γεωμετρίας. Ἀλλ' ἕνεκα τῆς δυσκολίας τοῦ πράγματος αἱ τοιαῦται ἔρευναι εἰς οὐδὲν μέχρι τοῦδε κατέληξαν συμπέρασμα δυνάμενον νὰ ἐπιδράσῃ ἐπὶ τῆς διαπλάσεως τῶν στοιχείων, οὐδὲ συμφωνοῦσι μάλιστα οἱ μαθηματικοὶ εἰς τὴν ἐκλογὴν τῶν θεμελιωδῶν τούτων ἐννοιῶν καὶ προτάσεων, ἀλλ' ἄλλοι ἄλλας λαμβάνουσι.

Γράφων τὰ παρόντα στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας, ἵνα χρησιμεύσωσιν ὡς διδακτικὸν βιβλίον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν γυμνασίων, ἔλαβον, ὡς ἦτο ἑπόμενον, θεμελιώδεις ἐννοίας καὶ προτάσεις ὅσον οἷόν τε ἁπλᾶς καὶ συνήθεις τῇ διανοίᾳ τοῦ μαθητοῦ· ἔκρινα δὲ ὡς ἁπλουστέρας ἐκείνας, αἵτινες πρωιμώτερον γεννῶνται ἐν ἡμῖν καὶ συχνότερον ἐξεγείρονται ἐν τῇ συνειδήσει διὰ τῆς παρατηρήσεως· διότι αὗται εἶνε προχειρόταται εἰς τὴν διάνοιαν τοῦ μαθητοῦ καὶ διὰ τοῦτο εἶνε τὸ καταλληλότατον θεμέλιον, ἐφ' οὗ οἰκοδομοῦνται αἱ μετὰ ταῦτα γνώσεις. Ἁπλουστέρα, λόγου χάριν, εἶνε ἡ ἔννοια τῆς εὐθείας γραμμῆς ἢ ἡ ἔννοια τῆς περιστροφῆς στερεοῦ περὶ δύο σημεῖα αὐτοῦ ἀκίνητα· διότι πάντες, καὶ οἱ μηδεμιᾶς τυχόντες μορφώσεως, ἔχουσιν, ἐκ παίδων μάλιστα, τὴν ἰδέαν τῆς εὐθείας, ἐνῷ τῆς περιστροφῆς περὶ δύο σημεῖα ἀκίνητα καὶ τῶν κατ' αὐτὴν συμβαινόντων ὀλίγιστοι. Ὁρίζοντες λοιπὸν τὴν εὐθεῖαν γραμμὴν διὰ τῆς περιστροφῆς στερεοῦ, ὁρίζομεν ἁπλούστερον, ἀμέσως ἐν τῇ διανοίᾳ ἡμῶν εὑρισκόμενον, δι' ἄλλου πολυπλοκωτέρου. Ὅτι δὲ οὕτως ἔχει, ἕκαστος δύναται νὰ βεβαιωθῇ διδάσκων εἰς παιδίον τὰς ἀρχὰς τῆς γεωμετρίας. Ἡ ἔννοια τῆς εὐθείας γραμμῆς εἶνε οὕτως ἁπλῆ, ὥστε εἶνε ἀδύνατον νὰ ὁρισθῇ δι' ἁπλουστέρων ἐννοιῶν, χρησιμεύει δὲ μᾶλλον πρὸς ὁρισμὸν τῶν ἄλλων σχημάτων.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἔλαβον ὡς ἀξιώματα τὰς ἁπλουστάτας προτάσεις «ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶνε συντομωτέρα πάσης τεθλασμένης ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα» καὶ «ὅτι ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ τόξον τοῦ κύκλου ἔχουσι μέσον» καὶ ἄλλας ὁμοίας. Διότι αἱ προτάσεις αὗται μοὶ ἐφάνησαν κατὰ πολὺ ἁπλούστεραι ἐκείνων, δι' ὧν ἀποδεικνύονται ὑπ' ἄλλων.

Ἐν τῷ ὁρισμῷ τῶν ἴσων συμπεριέλαβον εὐθὺς ἐξ ἀρχῆς καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· διότι ἐν τοῖς θεωρήμασι τοῦ πρώτου βιβλίου, ἐν οἷς γίνεται λόγος περὶ τοῦ ἀθροίσματος γωνιῶν, ἡ ἰσότης ὑποτίθεται κατὰ μέρη· τὰ ἐν αὐτοῖς δηλονότι ἀναφερόμενα ἴσα ἐφαρμόζουσι, μόνον ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη.

Τὰ θεωρήματα περὶ τῆς ἰσότητος τῶν στερεῶν τριέδρων γωνιῶν ἔταξα ἐν παραρτήματι εἰς τὸ τέλος τοῦ Ε΄ βιβλίου· ὡσαύτως τὰ περὶ συμμετρίας εἰς τὸ τέλος τοῦ ϛ΄ καὶ τὰ περὶ τῶν σφαιρικῶν τριγώνων εἰς τὸ τέλος τοῦ Ζ΄. Τὰ τρία ταῦτα παραρτήματα δὲν μοι φαίνονται χρήσιμα, εἰ μὴ δι' ἐκείνους, οἵτινες μέλλουσι νὰ σπουδάσωσιν εἰδικῶς τὰ μαθηματικὰ ἢ συγγενῆ τινα ἐπιστήμην· διὰ τοῦτο ἐν τῇ γυμνασιακῇ διδασκαλίᾳ δύνανται νὰ παραλείπωνται· ἐπίσης ἐσημείωσα δι' ἀστερίσκων καὶ ἄλλα τινὰ θεωρήματα, ἐφ' ὧν οὐδὲν τῶν ἑπομένων στηρίζεται, καὶ τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ παραλείπωνται, ἐὰν ὁ χρόνος δὲν συγχωρῇ τὴν διδασκαλίαν αὐτῶν.

ΙΩΑΝΝΗΣ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙΣ

σχῆμα λέγεται ὁ τρόπος καθ' ὅν
περατοῦται τὸ σῶμα

ἔκτασις ὁ χῶρος τὸν ὁποῖον
κατέχει ἐν τῷ διαστήματι

σῶμα καλοῦμεν τὸν τόπον τὸν
ὁποῖον κατέχει καὶ εἶναι
ἀδιαχώρητον

τὰ γνωρίσματα ἐκτάσεως
2
γραμμὴ

σημεῖον
ο

Χριστόφορος τοῦ Χ'' Δημητρίου

Δημήτριος τοῦ Χ'' Δημητρίου

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΡΩΤΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Εἰς τὰ πράγματα, ἅτινα βλέπομεν ἢ ἐγγίζομεν, καὶ τὰ ὁποῖα καλοῦμεν ὑλικὰ σώματα, διακρίνομεν (πλὴν τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἀποτελοῦνται) σχῆμα καὶ ἔκτασιν ἢ μέγεθος.

2. *Γεωμετρία* λέγεται ἡ ἐπιστήμη, ἥτις ἐξετάζει τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν.

3. Ὅταν ἐξετάζωμεν μόνον τὸ σχῆμα καὶ τὴν ἔκτασιν τῶν σωμάτων, ἀδιαφοροῦντες περὶ τῆς ὕλης, ἐξ ἧς ἀποτελοῦνται, καλοῦμεν αὐτὰ *σώματα γεωμετρικὰ* ἢ *στερεά*.

4. Πᾶν τὸ ἔχον ἔκτασιν δύναται νὰ νοηθῇ διῃρημένον εἰς μέρη.

5. Τὰ ἄκρα ἑκάστου σώματος ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ *τὴν ἐπιφάνειαν* αὐτοῦ. Καὶ εἰς τὴν ἐπιφάνειαν διακρίνομεν σχῆμα καὶ ἔκτασιν· ἀλλ' ἡ ἔκτασις τῆς ἐπιφανείας εἶνε ἄλλου εἴδους ἢ ἡ ἔκτασις τῶν σωμάτων.

6. Τὰ ἄκρα τῆς ἐπιφανείας ἢ μέρους τῆς ἐπιφανείας ἀποτελοῦσιν ὅλα ὁμοῦ *γραμμήν*. Καὶ εἰς τὴν γραμμὴν διακρίνομεν σχῆμα καὶ ἔκτασιν· διαφέρει ὅμως ἡ ἔκτασις τῆς γραμμῆς ἀπὸ τῶν δύο προηγουμένων.

7. Τὰ ἄκρα γραμμῆς ἢ μέρους γραμμῆς λέγονται *σημεῖα*. Τὸ δὲ σημεῖον δὲν ἔχει ἔκτασιν οὔτε μέρη.

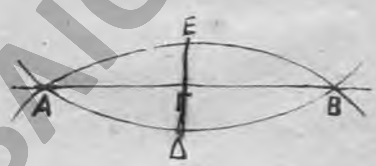
8. Τὸ μέρος εἶνε πάντοτε ὁμοειδὲς πρὸς τὸ ὅλον, ἤτοι τὰ μέρη τοῦ σώματος εἶνε σώματα, τὰ μέρη τῆς ἐπιφανείας εἶνε ἐπιφάνειαι καὶ τὰ μέρη τῆς γραμμῆς γραμμαί.

Τὰ σημεῖα καὶ αἱ γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι ἐξετάζονται ἐν τῇ γεωμετρίᾳ καὶ καθ' ἓν χωριστά, ἤγουν *ἄνευ τῶν σωμάτων εἰς τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται*· καθὼς εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἐξετάζονται οἱ ἀριθμοὶ καὶ ἄνευ τῶν πραγμάτων, τὰ ὁποῖα παριστῶσιν.

9. Ὅταν ἐξετάζωμεν τὰ στερεά, τὰς ἐπιφανείας καὶ τὰς γραμμὰς ὡς πρὸς τὸ σχῆμα, λέγομεν καὶ αὐτὰ ἑνὶ ὀνόματι *σχήματα*· ὅταν δὲ ὡς πρὸς τὴν ἔκτασιν, τὰ λέγομεν *ποσὰ γεωμετρικὰ* ἢ *μεγέθη*.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι καὶ τὰ στερεὰ παρίστανται δι' εἰκόνων, αἵτινες καὶ αὐταὶ λέγονται *σχήματα*. Ὅταν δὲ θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν σημεῖόν τι, γράφομεν πλησίον αὐτοῦ γράμμα τι τοῦ ἀλφαβήτου, οὕτω λέγομεν τὸ σημεῖον Α, ἤτοι τὸ σημεῖον, πλησίον τοῦ ὁποίου εἶνε τὸ γράμμα Α.

Ἡ γραμμὴ διακρίνεται συνήθως διὰ δύο γραμμάτων γραφομένων ἐπὶ δύο σημείων αὐτῆς, ὡς ἡ γραμμὴ ΑΒ· ἀλλ' ἐὰν διὰ τῶν αὐτῶν σημείων διέρχωνται πολλαὶ γραμμαί, μεταχειριζόμεθα πρὸς διάκρισιν αὐτῶν περισσότερα γράμματα· οὕτω λέγομεν, ἡ γραμμὴ ΑΓΒ, ἡ γραμμὴ ΑΔΒ, ἡ ΑΕΒ κτλ.



10. Ἡ γεωμετρία θεμελιοῦται ἐπί τινων κρίσεων, διὰ τῶν ὁποίων σκεπτόμενοι διακρίνομεν τὸ ἀληθὲς ἀπὸ τοῦ ψευδοῦς· διότι, ὅσα μὲν πρὸς αὐτὰς ἀντιβαίνουσι, λέγομεν ψευδῆ, ὅσα δὲ συμφωνοῦσι, λέγομεν ἀληθῆ· περὶ τῶν κρίσεων ὅμως τούτων οὐδεμίαν δεχόμεθα ἀντίρρησιν, θεωροῦντες αὐτὰς *ὡς ἀφ' ἑαυτῶν φανεράς*. Αἱ κρίσεις αὗται λέγονται *ἀξιώματα* ἢ *αἰτήματα*.

Παράδειγμα ἀξιώματος ἔστω τὸ ἑπόμενον *ἀξίωμα:*

Πᾶν σχῆμα δύναται ν' ἀλλάξῃ θέσιν χωρὶς αὐτὸ νὰ μεταβληθῇ τὸ παράπαν.

11. *Ἀπόδειξις* λέγεται συλλογισμὸς (ἢ πολλοὶ συλλογισμοί), δι' οὗ πειθόμεθα, ὅτι πρότασίς τις εἶνε ἀληθής.

12. *Θεώρημα* δὲ λέγεται ἡ πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως.

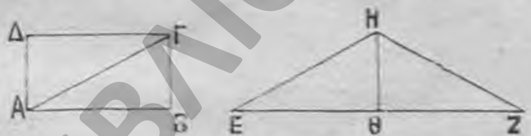
13. *Πόρισμα* λέγεται πρότασις στηριζομένη ἀμέσως ἐπὶ μιᾶς ἢ περισσοτέρων ἀληθῶν προτάσεων.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

14. *Ἴσα* λέγονται δύο σχήματα, ὅταν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι, τουτέστι νὰ καταλάβωσι τὸν αὐτὸν τόπον, ὥστε πᾶν σημεῖον ἑκατέρου αὐτῶν νὰ εἶνε σημεῖον καὶ τοῦ ἄλλου.

Δυνατὸν δύο σχήματα ἀκέραια μὲν νὰ μὴ ἐφαρμόζωσι, νὰ ἐφαρμόζωσιν ὅμως, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη. Ἂν π.χ. ἡ γραμμὴ ΓΔ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΖ κα ὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΖΒ, αἱ δύο γραμμαὶ ΑΖΒ καὶ ΓΔΕ ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν, ἡ πρώτη εἰς τὰ μέρη ΑΖ, ΖΒ, ἡ δὲ δευτέρα εἰς τὰ μέρη ΓΔ, ΔΕ.

Ὁμοίως, ἂν ἡ ἐπιφάνεια ΕΗΘ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΓΒ καὶ ἡ ΗΘΖ ἐπὶ τῆς ΑΔΓ, αἱ δύο ἐπιφάνειαι ΑΒΓΔ καὶ ΕΗΖ ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· ἀκέραιαι ὅμως δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσωσι.



Καὶ τὰ τοιαῦτα σχήματα λέγονται ἴσα, ὡς καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἀκέραια· ὅταν ὅμως θέλωμεν νὰ διακρίνωμεν τὰ δύο εἴδη τῶν ἴσων (τουτέστι τὰ ἐφαρμόζοντα ἀκέραια καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα διῃρημένα), καλοῦμεν τὰ δεύτερα *ἴσα κατὰ μέρη*, ἢ *ἴσα τὴν ἔκτασιν*, ἢ *ἰσοδύναμα*.

15. *Μικρότερον* ἄλλου λέγεται σχῆμά τι, ἐὰν εἶνε ἴσον πρός τι μέρος αὐτοῦ, τὸ δὲ ἄλλο λέγεται *μεγαλήτερον*· π. χ. τὸ σχῆμα ΑΒΓ εἶνε μικρότερον τοῦ ΕΗΖ.

Ἄνισα λέγονται δύο σχήματα, ἐὰν τὸ ἓν εἶνε ἴσον μέ μέρος τι τοῦ ἄλλου· π. χ. τὰ σχήματα ΑΒΓ καὶ ΕΗΖ εἶνε ἄνισα.

ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

1) *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα εἶνε καὶ ἀλλήλοις ἴσα.*

Ἐὰν δηλονότι δύο σχήματα Α καὶ Β ἐφαρμόζωσιν ἀμφότερα ἐπί τινος ἄλλου Γ, εἴτε ἀκέραια εἴτε διῃρημένα, καὶ τὰ σχήματα ταῦτα ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλων εἴτε ἀκέραια εἴτε διῃρημένα.

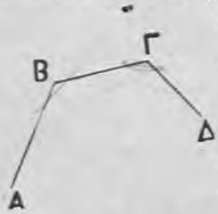
2) *Δύο σχήματα δὲν δύνανται τὰ αὐτὰ νὰ εἶνε καὶ ἴσα καὶ ἄνισα.*

Τουτέστι κατά τινα μὲν τρόπον διαιρέσεως καὶ ἐπιθέσεως νὰ ἐφαρμόζωσι, κατ' ἄλλον δὲ νὰ εἶνε τὸ ἓν μέρος τοῦ ἄλλου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὸς παράστασιν τῆς ἰσότητος ἢ τῆς ἀνισότητος δύο γεωμετρικῶν μεγεθῶν μεταχειριζόμεθα τὰ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς γνωστὰ σημεῖα, διὰ τῶν ὁποίων σημειοῦται ἡ ἰσότης ἢ ἡ ἀνισότης τῶν ἀριθμῶν· οἷον ΑΒΓΔ=ΕΖΗ καὶ ΑΒΓ <ΕΗΖ.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

16. Ἡ ἁπλουστάτη τῶν γραμμῶν εἶνε ἡ *εὐθεῖα* γραμμή· τὴν ἰδέαν αὐτῆς ἔχομεν πάντες· σχηματίζομεν δ' αὐτὴν βλέποντες κλωστὴν ἢ τρίχα λεπτοτάτην τεταμένην (ἢ ἄλλα ὅμοια πράγματα)· ὅσῳ λεπτότερον εἶνε τὸ τεταμένον νῆμα, τόσῳ περισσότερον προσεγγίζει πρὸς τὴν εὐθεῖαν γραμμήν.



17. *Τεθλασμένη γραμμὴ* λέγεται ἡ ἐξ εὐθειῶν μὲν συγκειμένη, μὴ οὖσα δὲ εὐθεῖα· τοιαύτη εἶνε ἡ γραμμὴ ΑΒΓΔ.

18. *Καμπύλη* δὲ λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας οὐδὲν μέρος εἶνε εὐθεῖα γραμμή.

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι καὶ τοιαῦται γραμμαί, θὰ δειχθῇ ἐν τοῖς ἐπομένοις.

19. Περὶ τῆς εὐθείας γραμμῆς δεχόμεθα τὰ ἑπόμενα ἀξιώματα, ἅτινα ἐκφράζουσι τὰς θεμελιώδεις ἰδιότητας αὐτῆς.

1) Πᾶν μέρος εὐθείας γραμμῆς εἶνε καὶ αὐτὸ εὐθεῖα γραμμή.

2) Ἐκ παντὸς σημείου εἰς πᾶν ἄλλο σημεῖον ἄγεται μία εὐθεῖα γραμμὴ καὶ μόνον μία.

3) Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ αὐξηθῇ ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς καὶ προχωρεῖ ἐφ' ὅσον θέλωμεν, χωρὶς νὰ διχασθῇ.

4) Πᾶσα εὐθεῖα δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ πάσης ἄλλης οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι δύο οἱαδήποτε πέρατα αὐτῶν.

Ἐὰν τότε καὶ τὰ ἕτερα δύο πέρατα συμπίπτωσιν, αἱ εὐθεῖαι εἶνε ἴσαι· εἰ δὲ μή, ἡ μία εἶνε μικροτέρα τῆς ἄλλης.

5) Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶνε μικροτέρα πάσης τεθλασμένης ἐχούσης τὰ αὐτὰ πέρατα.

6) Ἐκ δύο εὐθειῶν δύναται πάντοτε ἡ μικροτέρα πολλαπλασιαζομένη νὰ ὑπερβῇ τὴν μεγαλητέραν.

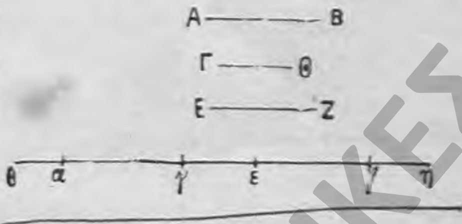
ΟΡΙΣΜΟΙ

20. *Ἀπόστασις* ἢ *ἀπόστημα* δύο σημείων λέγεται ἡ εὐθεῖα ἡ ταῦτα ἐπιζευγνύουσα.

21. *Ἄθροισμα* δύο ἢ περισσοτέρων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αὗται, ὅταν τεθῶσι κατὰ σειρὰν ἐπὶ ἄλλης εὐθείας.

Παραδείγματος χάριν, τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΘ, ΕΖ ἄθροισμα εἶνε ἡ εὐθεῖα αζ, ἣν εὑρίσκομεν λαμβάνοντες ἐπὶ τῆς εὐθείας θη τὰ τρία συνεχῆ μέρη αγ, γε, εζ, ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας.

Διαφορὰ δὲ δύο ἀνίσων εὐθειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἥτις μένει, ὅταν ἀπὸ τῆς μεγαλητέρας ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτῆς ἀποτμηθῇ μέρος ἴσον μὲ τὴν μικροτέραν. Παραδείγματος χάριν, ἡ εὐθεῖα γε εἶνε διαφορὰ τῶν εὐθειῶν αε καὶ αγ.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ πράξεις σημαίνονται καὶ ἐν τῇ γεωμετρίᾳ διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, δι' ὧν καὶ ἐν τῇ ἀριθμητικῇ. Οὕτω, παραδείγματος χάριν, $\alpha+\beta$ δηλοῖ τὸ ἄθροισμα τῶν γραμμῶν α καὶ β, $\alpha-\beta$ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, 2α τὸ διπλάσιον τῆς α, ἤτοι $\alpha+\alpha$, καὶ $\frac{\alpha}{2}$ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

Ἐκ τοῦ 4ου ἀξιώματος τῶν εὐθειῶν ἕπεται ἀμέσως, ὅτι

Δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι ἢ ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλων, ἢ ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἐφαρμόζει ἐπί τινος μέρους τῆς ἄλλης,

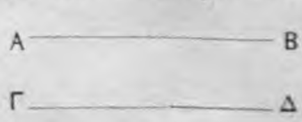
τουτέστι, *δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι εἶνε ἢ ἴσαι ἢ ἄνισοι.*

Ἐκ τούτου πηγάζουσιν αἱ ἑξῆς ἰδιότητες τῆς ἰσότητος τῶν εὐθειῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

22. *Ἐὰν εὐθεῖα τιθεμένη ἐπὶ ἄλλης ἐφαρμόζῃ ἐπ' αὐτῆς, θὰ ἐφαρμόζῃ, καὶ ὅταν τεθῇ ἀντιστρόφως.*

Ἐὰν δηλονότι ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἐφαρμόζῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὅταν τεθῇ ἐπ' αὐτῆς οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ Γ εἰς τὸ Α, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ὅταν τεθῇ οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ Δ εἰς τὸ Α.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, ἂν κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην ἐπίθεσιν ἡ ΓΔ δὲν ἐφήρμοζεν ἐπὶ τῆς ΑΒ, θὰ ἦτο ἡ μία μέρος τῆς ἄλλης, τουτέστι θὰ ἦσαν ἄνισοι· ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὴν πρώτην ἐπίθεσιν ἐφήρμοσαν, εἶνε ἴσαι· ὥστε αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι θὰ ἦσαν καὶ ἴσαι καὶ ἄνισοι, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ 2ον ἀξίωμα τῆς ἰσότητος καὶ διὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰς πᾶν θεώρημα διακρίνομεν, πλὴν τῆς ἀποδείξεως, ὑπόθεσιν καὶ συμπέρασμα. Εἰς τὸ θεώρημα τοῦτο ὑπόθεσις ἦτο, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΔ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς ΑΒ, ὅταν τεθῇ ἐπ' αὐτῆς οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ Γ εἰς τὸ Α, συμπέρασμα δὲ ἦτο τοῦτο, ὅτι ἡ ΓΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, καὶ ὅταν τεθῇ ἐπ' αὐτῆς οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ Δ εἰς τὸ Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

23. *Αἱ κατὰ μέρη ἴσαι εὐθεῖαι εἶνε καὶ ἀκέραιαι ἴσαι.*

Ἐὰν δηλονότι δύο εὐθεῖαι σύγκεινται ἐκ μερῶν ἰσαρίθμων καὶ ἴσων, ἓν πρὸς ἕν, καὶ αἱ ὅλαι εὐθεῖαι θὰ εἶνε ἴσαι.

Διότι, ἂν δὲν ἐφήρμοζον ἐπ' ἀλλήλων, θὰ ἦτο ἡ μία μέρος τῆς ἄλλης, ἑπομένως θὰ ἦσαν ἄνισοι· ἀλλ' αἱ αὐταὶ εὐθεῖαι εἶνε ἴσαι κατὰ μέρη ἄρα θὰ ἦσαν καὶ ἴσαι καὶ ἄνισοι, ὅπερ ἄτοπον κατὰ τὸ 2ον ἀξίωμα τῆς ἰσότητος.

ΠΟΡΙΣΜΑ

24. *Ἐν τῇ προσθέσει τῶν εὐθειῶν (ὡς καὶ τῶν ἀριθμῶν) ἡ τάξις, καθ' ἣν λαμβάνονται αἱ γραμμαί, εἶνε ἀδιάφορος·* τουτέστι, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ληφθῶσιν ἡ μία μετὰ τὴν ἄλλην, τὸ ἄθροισμα μένει τὸ αὐτό. αἱ κατὰ μέρη ἴσαι ἡ ἀρ... ἴσαι (ἀκέραιαι)

Διότι πάντα τὰ ἀθροίσματα, ὅσα προκύπτουσι μεταβαλλομένης τῆς τάξεως τῶν εὐθειῶν, εἶνε κατὰ μέρη ἴσα, ἄρα καὶ ἀκέραια εἶνε ἴσα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν, αἱ ἐκ τῆς θεμελιώδους ταύτης ἰδιότητος πηγάζουσαι, ἀληθεύουσι καὶ περὶ τῶν εὐθειῶν γραμμῶν καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως (Στ. Ἀλγ., 14), ἀρκεῖ νὰ νοηθῶσι τὰ γράμματα ὡς παριστῶντα γραμμάς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

4 25. Ἡ ἰσότης τῶν εὐθειῶν ἔχει καὶ τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν· τουτέστι

1) Ἐὰν εἰς ἴσας εὐθείας προστεθῶσιν ἴσαι, αἱ προκύπτουσαι εὐθεῖαι εἶνε ἴσαι.

Διότι εἶνε ἴσαι κατὰ μέρη (ἐδ. 23).

2) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων εὐθειῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσαι, αἱ μένουσαι εὐθεῖαι εἶνε ἴσαι.

Τοῦτο βλέπει τις ἀμέσως, ἂν τὰς εὐθείας, ἀπὸ τῶν ὁποίων γίνεται ἡ ἀφαίρεσις, ἐφαρμόσῃ οὕτως, ὥστε τὰ ἀφαιρούμενα μέρη νὰ εἶνε εἰς τὸ αὐτὸ ἄκρον.

3) Αἱ διπλάσιαι τῶν ἴσων εὐθειῶν εἶνε ἴσαι· καὶ αἱ τριπλάσιαι ὡσαύτως ἴσαι· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τοῦτο εἶνε ἄμεσον ἀκολούθημα τῆς ἰδιότητος 1ης.

4) Τὰ ἡμίση τῶν ἴσων εὐθειῶν εἶνε ἴσα· καὶ τὰ τρίτα ὡσαύτως ἴσα, καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ ἡ ἀνισότης τῶν εὐθειῶν ἔχει τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῆς ἀνισότητος τῶν ἀριθμῶν, τουτέστι

1) *Ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθῶσιν ἴσα, καὶ τὰ ἀθροίσματα εἶνε ὁμοίως ἄνισα.*

2) *Ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, τὰ μένοντα εἶνε ὁμοίως ἄνισα.*

3) *Ἐὰν εἰς ἄνισα προστεθῶσιν ἄνισα, ἀλλὰ τὸ μεῖζον εἰς τὸ μεῖζον καὶ τὸ ἔλασσον εἰς τὸ ἔλασσον, καὶ τὰ ἀθροίσματα εἶνε ὁμοίως ἄνισα.*

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

26. *Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἁπλῶς ἐπίπεδον* λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα γραμμὴ ἐφαρμόζει πανταχοῦ· *ἤτοι ἡ διὰ δύο οἱωνδήποτε σημείων αὐτῆς ἀγομένη εὐθεῖα κεῖται ὅλη ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.*

Ὅτι δὲ ὑπάρχει τοιαύτη ἐπιφάνεια, τοῦτο δεχόμεθα ὡς ἀξίωμα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Εἰκόνα τῆς ἐπιφανείας ταύτης παρέχει ἡμῖν ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος, ἢ ἄλλαι ὅμοιαι ἐπιφάνειαι (ὡς τῶν τοίχων, τῶν πατωμάτων τῶν οἰκιῶν, κτλ.)

Περὶ τοῦ ἐπιπέδου δεχόμεθα τὰ ἑπόμενα ἀξιώματα :

1) *Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ αὐξηθῇ ἐφ' ὅσον θέλωμεν πέριξ ἑαυτοῦ.*

2) *Πᾶν ἐπίπεδον δύναται νὰ τεθῇ ἐπὶ παντὸς ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσιν ἓν μόνον ἐπίπεδον· γίνεται δὲ ἡ ἐπίθεσις αὕτη, καὶ ὅταν ἓν τῶν ἐπιπέδων ἀντιστραφῇ.*

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ἐπίπεδον σχῆμα λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια πανταχόθεν περατουμένη.

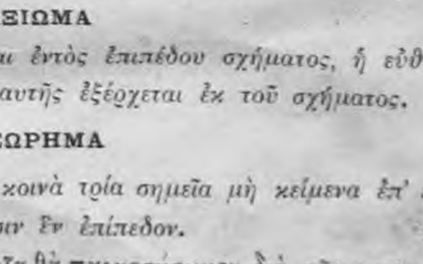
ΑΞΙΩΜΑ

27. *Ἐὰν μέρος εὐθείας κεῖται ἐντὸς ἐπιπέδου σχήματος, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἐκβαλλομένη ἑκατέρωθεν ἑαυτῆς ἐξέρχεται ἐκ τοῦ σχήματος.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

28. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχωσι κοινὰ τρία σημεῖα μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἐφαρμόζουσι καὶ ἀποτελοῦσιν ἓν ἐπίπεδον.*

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα θὰ παραστήσωμεν διὰ τῶν γραμμάτων Π καὶ Ρ, ἔχοντα κοινὰ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ἅτινα δὲν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· λέγω, ὅτι καὶ πάντα τὰ ἄλλα σημεῖα αὐτῶν ἔχουσι κοινὰ (ὅταν ἐφ' ἱκανὸν αὐξηθῶσιν).



Ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ τρία σημεῖα ἀνὰ δύο διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Ἑκάστη τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ κεῖται ὅλη καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἐπιπέδου). Ἔστω νῦν Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π· ἐὰν ληφθῇ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου σημεῖόν τι Ν ἐντὸς τοῦ σχήματος ΑΒΓ καὶ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Ν ἡ εὐθεῖα ΝΜ, αὕτη θὰ ἐξέλθῃ ἐκ τοῦ σχήματος ΑΒΓ καὶ θὰ τέμνῃ τὴν περατοῦσαν αὐτὸ τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓ εἰς δύο τοὐλάχιστον σημεῖα, τὰ Δ καὶ Ε. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶνε καὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ σημεῖα· ἄρα καὶ ἡ ὅλη εὐθεῖα ΔΕ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ· ἄρα καὶ τὸ Μ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π εἶνε σημεῖον καὶ τοῦ Ρ· ὁμοίως δὲ δεικνύεται, ὅτι καὶ ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον τοῦ Ρ εἶνε σημεῖον καὶ τοῦ Π· τουτέστι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα ἔχουσι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῶν κοινά.

ΠΟΡΙΣΜΑ

29. *Ἐὰν τὰ ἄκρα δύο ἐπιπέδων σχημάτων ἐφαρμόζωσι, καὶ τὰ σχήματα ἐφαρμόζουσι.* 5

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

30. Ἡ γεωμετρία διαιρεῖται εἰς δύο μέρη. Καὶ ἐν μὲν τῷ πρώτῳ ἐξετάζονται σχήματα, τῶν ὁποίων πάντα τὰ σημεῖα κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου· ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ, σχήματα οἱαδήποτε. Καλεῖται δὲ τὸ μὲν πρῶτον μέρος *ἐπίπεδος γεωμετρία*, τὸ δὲ δεύτερον *στερεὰ γεωμετρία* ἢ *στερεομετρία*. 45

ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Ἡ γεωμετρία εἶνε καθ' ὁλοκληρίαν ἑλληνικὴ ἐπιστήμη. Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἔλαβον μὲν παρὰ τῶν Αἰγυπτίων, οἵτινες εἶχον πολιτισθῇ πολὺ πρότερον αὐτῶν, στοιχειώδεις τινὰς γεωμετρικὰς γνώσεις, ἀλλ' αὐτοὶ πρῶτοι ἐκαλλιέργησαν τὴν γεωμετρίαν εἰς ἐπιστήμην καὶ διεμόρφωσαν καὶ προήγαγον αὐτὴν εἰς τελειότητα διαμείνασαν ἀνυπέρβλητον ἐπὶ μακροὺς αἰῶνας.

Οἱ κορυφαῖοι τῶν Ἑλλήνων γεωμετρῶν εἶνε ὁ Εὐκλείδης (ζήσας περὶ τὰ 300 π. Χ.), ὁ Ἀρχιμήδης (287–212 π. Χ.) καὶ ὁ Ἀπολλώνιος περὶ τὰ 200 π. Χ. Τὸ περίφημον σύγγραμμα τοῦ Εὐκλείδου «Τὰ στοιχεῖα», ὅπερ περιέχει τὰ στοιχεῖα τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς ἀριθμητικῆς, εἶνε πρότυπον ἐπιστημονικῆς ἀκριβείας σχεδὸν ἀνυπέρβλητον. Ἐν τούτῳ ἔδωκεν ὁ Εὐκλείδης εἰς τὴν στοιχειώδη γεωμετρίαν καὶ εἰς τὴν θεωρητικὴν ἀριθμητικὴν τὴν τάξιν καὶ ἔκθεσιν, ἣν καὶ σήμερον ἔτι αὗται διατηροῦσι. Τὰ στοιχεῖα τοῦ Εὐκλείδου ἐπὶ χίλια καὶ πλέον ἔτη ἐχρησίμευσαν ὡς τὸ μόνον διδακτικὸν βιβλίον τῆς στοιχειώδους μαθηματικῆς καὶ νῦν ἔτι εἶνε ἡ βάσις πάντων τῶν τοιούτων βιβλίων.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

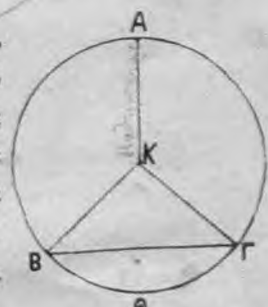
ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

31. *Κύκλος* λέγεται ἐπίπεδον σχῆμα, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς γραμμῆς, εἰς ἣν περατοῦται. Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τοῦ κύκλου. Ἡ δὲ τὸν κύκλον περατοῦσα γραμμὴ λέγεται *περιφέρεια*.



Ὁ κύκλος γεννᾶται, ἐὰν εὐθεῖα ὡς ἡ ΚΑ, ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου μένουσα, περιστραφῇ περὶ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς Κ, ὅπερ μένει ἀκίνητον, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν αὐτῆς· τότε ἡ μὲν εὐθεῖα ΚΑ θὰ γράψῃ τὸν κύκλον, τὸ δὲ ἄλλο ἄκρον αὐτῆς Α θὰ γράψῃ τὴν περιφέρειαν.

Ἀκτὶς τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα ἐκ τοῦ κέντρου εἰς τὴν περιφέρειαν ἠγμένη.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ δὲ τοῦ κύκλου ἕπεται, ὅτι πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες αὐτοῦ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

Διάμετρος τοῦ κύκλου λέγεται πᾶσα εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη καὶ περατουμένη ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς περιφερείας.

Πᾶσαι αἱ διάμετροι εἶνε ἴσαι· διότι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀκτίνων.

Τόξον λέγεται μέρος οἱονδήποτε τῆς περιφερείας· ἡ δὲ τὰ ἄκρα τοῦ τόξου ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα λέγεται *χορδὴ* αὐτοῦ.

Ἕκαστον τόξον ἔχει μίαν χορδήν, ἀλλ' ἑκάστη χορδὴ ἔχει δύο τόξα· π.χ. τὸ τόξον ΒΘΓ ἔχει τὴν χορδὴν ΒΓ· ἀλλ' ἡ χορδὴ ΒΓ ἔχει τὰ δύο τόξα ΒΘΓ καὶ ΒΑΓ.

Τμῆμα κύκλου λέγεται μέρος αὐτοῦ περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ τῆς χορδῆς αὐτοῦ, οἷον τὸ σχῆμα ΒΘΓΒ.

Τομεὺς δὲ λέγεται μέρος τοῦ κύκλου περιεχόμενον ὑπὸ τόξου καὶ ὑπὸ τῶν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου τούτου ἠγμένων ἀκτίνων, οἷον τὸ σχῆμα ΚΓΘΒΚ.

32. Ἐκ τῆς γενέσεως τοῦ κύκλου καθίστανται ἀμέσως φανεραὶ αἱ ἑξῆς προτάσεις :

1) Πᾶν σημεῖον τοῦ κύκλου μὴ ἐπὶ τῆς περιφερείας κείμενον, ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτῖνος.

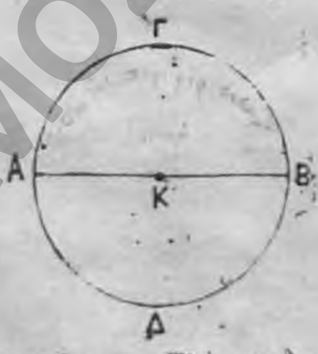
2) Πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ κύκλου κείμενον (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ) ἀπέχει ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀπόστασιν μεγαλητέραν τῆς ἀκτῖνος.

3) Δύο κύκλοι ἔχοντες ἴσας ἀκτῖνας, εἶνε ἴσοι· διότι, ὅταν τεθῇ ὁ εἷς ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν, θὰ συμπέσωσι καὶ αἱ ἀκτῖνες, ὡς ἴσαι· ἑπομένως θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ περιφέρειαι καὶ οἱ κύκλοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

12 33. *Πᾶσα διάμετρος τέμνει εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ τὸν κύκλον καὶ τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ.*

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΓΒΔΑ καὶ τυχοῦσα διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΑΚΒ· ἐὰν περιστραφῇ τὸ τμῆμα ΑΓΒΚΑ περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ, μέχρις οὗ πέσῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΑΔΒΚΑ, τὸ τόξον ΑΓΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΔΒ· (ἑπομένως καὶ τὸ τμῆμα ΑΓΒΚΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΑΔΒΚΑ)· διότι, ἂν σημεῖόν τι τοῦ τόξου ΑΓΒ ἔπιπτεν ἐντὸς τοῦ τμήματος ΑΔΒΚΑ ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ, τὸ ἀπόστημα τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ κέντρου θὰ ἦτο μικρότερον τῆς ἀκτῖνος ἢ μεγαλήτερον αὐτῆς, ὅπερ ἄτοπον· διότι ἡ γενομένη περιστροφὴ οὐδόλως μετέβαλε τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων τοῦ τόξου ΑΓΒ ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ.

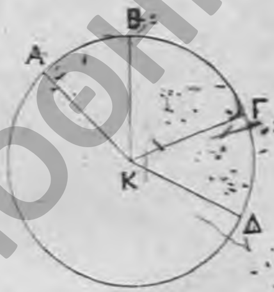


Παρατήρησις. Πλὴν τῶν διαμέτρων οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα δύναται νὰ διαιρέσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. Διότι ἔστω ἄλλη τις εὐθεῖα μὴ διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη, ἡ ΑΕ· αὕτη διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη, τὰ ΑΓΕ καὶ ΑΔΒΕ, τὰ ὁποῖα εἶνε ἄνισα· διότι τὸ μὲν ΑΓΕ εἶνε μέρος τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓΕΒ, τὸ δὲ ΑΔΒΕ ὑπερβαίνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΔΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

34. *Πᾶν τόξον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἧστινος εἶνε μέρος.*

Ἔστω περιφέρεια ἡ ΑΒΓΔ καὶ τυχὸν τόξον αὐτῆς τὸ ΑΒ· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, σχηματίζεται ὁ τομεὺς ΚΑΒ· ἐὰν δὲ τὸν τομέα τοῦτον μεταφέρωμεν ἐπὶ τοῦ κύκλου, ὥστε ἡ ἀκτὶς ΚΑ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς τυχούσης ἀκτῖνος ΚΓ, καὶ ἡ ΚΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπί τινος ἄλλης ΚΔ καὶ τὸ τόξον ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΔ· διότι, ἂν σημεῖόν τι τοῦ τόξου ΑΒ, ἔπιπτεν ἐντὸς τοῦ τομέως ΓΚΔ ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ θὰ ἦτο μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος ἢ μεγαλητέρα αὐτῆς, ὅπερ ἄτοπον.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο τυχόντα τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἢ ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλων, ἢ τὸ ἓν ἐφαρμόζει ἐπί τινος μέρους τοῦ ἄλλου.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΟΞΩΝ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

35. *Ἄθροισμα* δύο ἢ περισσοτέρων τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας λέγεται τὸ τόξον, ὅπερ ἀποτελοῦσιν, ὅταν τεθῶσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας (ἢ ἐπὶ ἄλλης ἴσης) κατὰ σειράν· οἷον ἄθροισμα τῶν τόξων ΑΒ καὶ ΒΓ εἶνε τὸ τόξον ΑΓ.

Διαφορὰ δὲ δύο τόξων (τῆς αὐτῆς περιφερείας) λέγεται τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον μένει, ὅταν ἀπὸ τοῦ μεγαλητέρου, ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου αὐτοῦ, ἀποτμηθῇ μέρος ἴσον τῷ μικροτέρῳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν τόξων τῆς αὐτῆς περιφερείας ἰσχύουσιν αἱ αὐταὶ προτάσεις αἱ περὶ τῶν εὐθειῶν ἀληθεύουσαι (σελ. 5) καὶ ἀποδεικνύονται ἀπαραλλάκτως.

ΠΕΡΙ ΓΩΝΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

36. *Γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσι δύο εὐθεῖαι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀρχόμεναι καὶ μὴ ἀποτελοῦσαι μίαν μόνην εὐθεῖαν.

Τὸ σχῆμα ΒΑΓ εἶνε γωνία.

Κορυφὴ τῆς γωνίας λέγεται τὸ σημεῖον, ἐξ οὗ ἄρχονται αἱ τὴν γωνίαν σχηματίζουσαι εὐθεῖαι.

Πλευραὶ δὲ τῆς γωνίας λέγονται αἱ σχηματίζουσαι αὐτὴν εὐθεῖαι.

Τῆς γωνίας ΒΑΓ κορυφὴ μὲν εἶνε τὸ σημεῖον Α, πλευραὶ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ.

Ἴσαι λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν δύνανται νὰ τεθῶσιν οὕτως ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσι μίαν μόνην γωνίαν.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν δὲν ἐξαρτᾶται ποσῶς ἐκ τοῦ μεγέθους τῶν πλευρῶν αὐτῶν. Οὕτως αἱ δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ βαγ θὰ εἶνε ἴσαι, ἐάν, τεθείσης τῆς αγ ἐπὶ τῆς ΑΓ οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ τὸ α εἰς τὸ Α, πέσῃ καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς ΑΒ.

Ἐπίκεντρος γωνία λέγεται ἡ ἔχουσα τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Τὸ δὲ τόξον τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον λέγεται *ἀντίστοιχον* αὐτῆς.

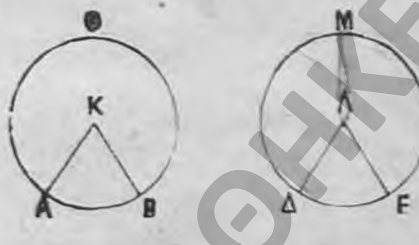
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν γωνίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος τῆς κορυφῆς ἢ καὶ διὰ τριῶν γραμμάτων γραφομένων ἐπὶ τῆς κορυφῆς καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν (ἐφ' ἑκατέρας ἕν)· γράφεται δὲ καὶ ἀναγινώσκεται τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς πάντοτε μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων. Οὕτω λέγομεν: ἡ γωνία Α, ἢ ἡ γωνία ΒΑΓ, ἢ ἡ γωνία ΓΑΒ. Ἐνίοτε σημαίνομεν τὴν γωνίαν καὶ δι' ἑνὸς γράμματος ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κορυφῆς γραφομένου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

37. *Ἐν τῷ αὐτῷ κύκλῳ ἢ ἐν ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι βαίνουσιν ἐπὶ τόξων ἴσων· καὶ ἀντιστρόφως, αἱ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΘΑ καὶ ΔΕΜΔ καὶ εἰς αὐτοὺς ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι αἱ ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ· λέγω, ὅτι καὶ τὰ τόξα, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι, ἤτοι τὰ ΑΒ καὶ ΔΕ, θὰ εἶνε ἴσα.

Διότι, ὅταν αἱ ἴσαι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ ἐφαρμόσωσι, θὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα τῶν κύκλων, καὶ ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ὑπετέθησαν ἴσοι, θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ (ὧν τὰ ἄκρα συνέπεσαν) θὰ ἐφαρμόσωσιν, ὥστε εἶνε ἴσα.



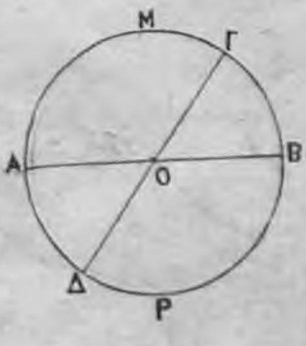
Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει· ἐὰν δηλαδὴ ὑποτεθῶσι τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ ἴσα, καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΚΒ καὶ ΔΛΕ, αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι, θὰ εἶνε ἴσαι. Διότι ἐφαρμοζομένων τῶν δύο ἴσων κύκλων οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσι τὰ δύο ἴσα τόξα ΑΒ καὶ ΔΕ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκτὶς ΚΑ ἐπὶ τῆς ΛΔ καὶ ἡ ΚΒ ἐπὶ τῆς ΛΕ, τουτέστι θὰ ἐφαρμόσωσι καὶ αἱ γωνίαι· ἄρα εἶνε ἴσαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀποτελεῖται ἐκ δύο ἀντιστρόφων θεωρημάτων· λέγονται δὲ *ἀντίστροφα* δύο θεωρήματα, ὅταν ἡ ὑπόθεσις τοῦ πρώτου εἶνε συμπέρασμα εἰς τὸ δεύτερον, καὶ τἀνάπαλιν, ἡ ὑπόθεσις τοῦ δευτέρου εἶνε συμπέρασμα εἰς τὸ πρῶτον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

38. ***Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν διαπερᾷ τὴν ἄλλην.***

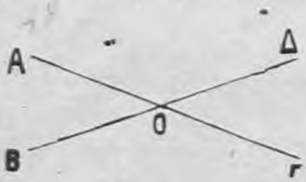
Μὲ κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ περιφέρεια καὶ ἂς τέμνῃ τὴν μίαν εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, τὴν δὲ ἄλλην εἰς τὰ Γ, Δ· ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι ΑΟΒ, ΓΟΔ εἶνε διάμετροι τοῦ κύκλου καὶ ἑπομένως ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη. Ἔστωσαν τὰ δύο ἡμίση, εἰς ἃ διαιρεῖ αὐτὴν ἡ ΑΟΒ, τὰ ΑΜΒ καὶ ΑΡΒ· τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ δὲν δύνανται νὰ εὑρίσκωνται ἀμφότερα ἐφ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἡμίσεως· διότι τότε τὸ μεταξὺ αὐτῶν τόξον ΓΔ θὰ ἦτο μέρος τοῦ ἡμίσεως, ἄρα μικρότερον αὐτοῦ· ἂν λοιπὸν τὸ σημεῖον Γ εὑρίσκηται



ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως ΑΜΒ, τὸ Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἡμίσεως ΑΡΒ· ἤτοι ἡ εὐθεῖα ΓΟΔ διαπερᾷ τὴν ΑΟΒ.

ΟΡΙΣΜΟΣ

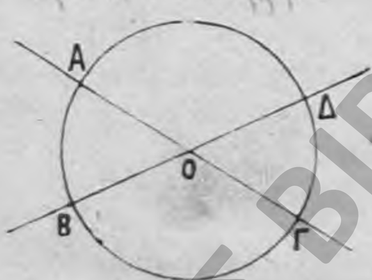
39. Ὅταν δύο εὐθεῖαι διασταυρῶνται, ὡς αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ, σχηματίζουσι τέσσαρας γωνίας. Ἐκ τούτων αἱ τὴν κορυφὴν μόνον ἔχουσαι κοινήν, ἀλλὰ πλευρὰς διαφόρους, λέγονται κατὰ κορυφήν, τοιαῦται εἶνε αἱ γωνίαι ΑΟΒ καὶ ΓΟΔ· ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ΒΟΓ καὶ ΑΟΔ.



ΘΕΩΡΗΜΑ

40. *Αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

Μὲ κέντρον τὴν κοινὴν κορυφὴν τῶν γωνιῶν καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ κύκλος· τοῦ κύκλου τούτου ἀμφότεραι αἱ εὐθεῖαι ΑΟΓ καὶ ΒΟΔ εἶνε διάμετροι· ἑπομένως τὰ τόξα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ εἶνε ἴσα, ὡς ἡμίση τῆς περιφερείας· ἐὰν δὲ ἀπ' αὐτῶν ἀφαιρεθῇ τὸ κοινὸν μέρος ΒΓ, μένουσιν ἴσα τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΓΔ· ἄρα καὶ αἱ γωνίαι αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι εἶνε ἴσαι.



ΑΞΙΩΜΑ

41. *Παντὸς τόξου καὶ πάσης εὐθείας ὑπάρχει μέσον.*

ΟΡΙΣΜΟΣ

10 42. *Κάθετοι πρὸς ἀλλήλας* λέγονται δύο εὐθεῖαι, ἐὰν ἐν τῇ διασταυρώσει αὐτῶν σχηματίζωσι τὰς τέσσαρας γωνίας ἴσας.

Ὀρθὴ δὲ λέγεται ἑκάστη τῶν τεσσάρων ἴσων γωνιῶν, ἃς σχηματίζουσιν αἱ κάθετοι πρὸς ἀλλήλας εὐθεῖαι.

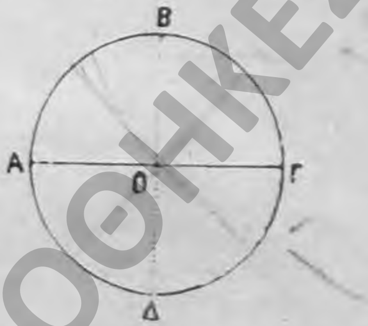
Παρατήρησις. Ὅταν ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας δύο εὐθεῖαι διασταυρούμεναι σχηματίζουσι, δύο ἐφεξῆς εἶνε ἴσαι, ὡς αἱ ΑΟΒ, ΒΟΓ, καὶ αἱ τέσσαρες θὰ εἶνε ἴσαι (διότι αἱ λοιπαὶ δύο εἶνε κατὰ κορυφὴν τῶν πρώτων) καὶ αἱ εὐθεῖαι θὰ εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

43. *Δι' ἑκάστου σημείου δοθείσης εὐθείας διέρχεται μία κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ μία μόνη.*

Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΓ καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς τὸ Ο· λέγω, ὅτι διὰ τοῦ Ο διέρχεται μία καὶ μία μόνη κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ κύκλος· τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου τούτου διαιρεῖ ἡ εὐθεῖα ΑΟΓ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΒΓ, ΑΔΓ, τῶν ὁποίων τὰ μέσα ἔστωσαν Β καὶ Δ.



Τὰ τέσσαρα τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἶνε ἴσα ὡς τεταρτημόρια τῆς περιφερείας· ἑπομένως, ἂν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΒΔ, θὰ διαιρῇ τὴν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη ἴσα· ἄρα θὰ εἶνε διάμετρος· τουτέστι θὰ διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου Ο. Θὰ εἶνε δὲ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ· διότι αἱ τέσσαρες γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει μετ' αὐτῆς, εἶνε ἴσαι, ὡς ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι.

Ἐὰν στραφῇ ἡ ΒΔ περὶ τὸ Ο, δὲν θὰ διέρχηται πλέον διὰ τοῦ μέσου Β τοῦ τόξου ΑΒΓ· ἑπομένως θὰ σχηματίζῃ ἀνίσους τας ἐφεξῆς γωνίας· ὥστε μία μόνη ὑπάρχει κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ο.

ΘΕΩΡΗΜΑ

44. *Πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι* (ὑπὸ οἱωνδήποτε εὐθειῶν καὶ ἂν σχηματίζωνται) *εἶνε ἴσαι ἀλλήλαις.*

Διότι, ἐὰν γραφῶσι κύκλοι ἔχοντες κέντρα τὰς κορυφὰς δύο ὀρθῶν γωνιῶν καὶ ἀκτῖνας ἴσας, θὰ βαίνωσιν ἀμφότεραι αἱ γωνίαι ἐπὶ τοῦ τετάρτου ἴσων περιφερειῶν, ἤτοι ἐπὶ τόξων ἴσων· ἄρα θὰ εἶνε ἴσαι.

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ἐὰν ἐν κύκλῳ μία τῶν ἀκτίνων, ὡς ἡ ΟΑ, στρέφηται περὶ τὸ κέντρον καὶ προχωρῇ πάντοτε στρεφομένη, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην αὐτῆς θέσιν, αἱ διάφοροι θέσεις, ἃς λαμβάνει, ὡς αἱ ΟΒ, ΟΓ, ΟΕ, ΟΖ,.., σχηματίζουσι μετὰ τῆς ἀρχικῆς θέσεως ΟΑ διαφόρους γωνίας, ὡς τὰς ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΑΟΕ,... Καθὼς δὲ τὸ τόξον ΑΒ, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ γωνία ΑΟΒ, εἶνε μέρος τοῦ τόξου ΑΓ, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ ΑΟΓ, οὕτω λέγεται καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ *μέρος* τῆς γωνίας ΑΟΓ, (ἐὰν καί, ἵνα εἴπωμεν σχῆμά τι μέρος ἄλλου πρέπει νὰ εἶνε ἀμφότερα ἐντελῶς ὡρισμένα κα

ἔκτασιν· ὅπερ δὲν συμβαίνει εἰς τὰς γωνίας). Ἐκ τούτου ὁδηγούμενοι δίδομεν τοὺς ἑπομένους ὁρισμούς.

45. *Μικροτέρα* λέγεται γωνία ἄλλης, ἐὰν βαίνῃ ἐπὶ μικροτέρου τόξου, ὅταν ἀμφοτέρων αἱ κορυφαὶ τεθῶσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου (ἢ ἴσων κύκλων).

46. *Ἄθροισμα* δύο ἢ περισσοτέρων γωνιῶν λέγεται γωνία τις, ἐὰν τὸ τόξον αὐτῆς εἶνε ἄθροισμα τῶν τόξων τῶν γωνιῶν τούτων, ὅταν τεθῶσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Οὕτως ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ εἶνε ἡ γωνία ΑΟΓ καὶ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΑΟΒ,ΒΟΓ,ΓΟΕ,εἶνε ἡ ΑΟΕ. Ἐὰν δὲ τὰ τόξα ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ ὑποτεθῶσιν ἴσα, ἡ γωνία ΑΟΓ εἶνε διπλασία τῆς ΑΟΒ καὶ ἡ ΑΟΔ τριπλασία αὐτῆς.

47. *Διαφορὰ* δὲ δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται γωνία τις, ἐὰν τὸ τόξον της εἶνε διαφορὰ τῶν τόξων τῶν γωνιῶν τούτων, ὅταν τεθῶσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἰς τὸ κέντρον τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Οὕτω διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΑΟΓ καὶ ΑΟΒ εἶνε ἡ γωνία ΒΟΓ, τῶν δὲ γωνιῶν ΑΟΕ καὶ ΓΟΕ διαφορὰ εἶνε ἡ ΑΟΓ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ περὶ τῆς ἰσότητος τῶν γωνιῶν ἀληθεύουσιν αἱ αὐταὶ προτάσεις αἱ περὶ τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τόξων (τοῦ αὐτοῦ κύκλου) ἀληθεύουσαι, ἀποδεικνύονται δὲ ὁμοίως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

48. Ἐὰν τὰ τόξα, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι, ἔχωσιν ἄθροισμα τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας, *τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων δὲν εἶνε μία γωνία*· διότι ἐπὶ τοῦ ἡμίσεως τῆς περιφερείας οὐδεμία βαίνει γωνία, διότι αἱ εἰς τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἠγμέναι ἀκτῖνες κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ δὲν σχηματίζουσι γωνίαν· τοῦτο συμβαίνει παραδείγματος χάριν εἰς τὰς γωνίας ΑΟΒ,ΒΟΓ,ΓΟΕ,ΕΟΖ· τὰ τόξα, ἐφ' ὧν αὗται βαίνουσιν, ἤτοι τὰ ΑΒ,ΒΓ,ΓΕ,ΕΖ ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΑΒΓΕΖ· αἱ δὲ ἀκτῖνες ΟΑ,ΟΖ δὲν σχηματίζουσι γωνίαν. Ἀλλ' ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ *τὸ ἄθροισμα εἶνε δύο ὀρθαὶ γωνίαι*· ἐὰν τῷ ὄντι ἀχθῇ ἀκτὶς εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΒΓΕΖ, διαιρεῖται ἡ γωνία ΓΟΕ εἰς δύο ας ΓΟΔ,ΔΟΕ, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δὲν μεταβάλλεται· αὐτη ὁμως αἱ μὲν γωνίαι ΑΟΒ,ΒΟΓ,ΓΟΔ ἀποτελοῦσι τὴν ὀρθὴν ΑΟΔ,

αἱ δὲ ΔΟΕ, ΕΟΖ ἀποτελοῦσι τὴν ἄλλην ὀρθὴν ΔΟΖ· ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶνε δύο ὀρθαί.

49. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι, ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ὡς συμβαίνει εἰς τὰς γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ, ΕΟΖ, ΖΟΗ, ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων δὲν εἶνε ἡ ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΗ σχηματιζομένη γωνία ΑΟΗ· διότι αὕτη βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΚΘΙΗ καὶ οὐχὶ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓΕΖΗ. Διὰ νὰ ἔχωσι δὲ αἱ γωνίαι αὗται ἄθροισμα μίαν γωνίαν, ἀνάγκη νὰ δεχθῶμεν, ὅτι αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΗ σχηματίζουσι δύο γωνίας, τὴν ΑΟΗ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΚΘΙΗ, τοῦ μικροτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας, καὶ ἥτις λέγεται *κοίλη* γωνία, καὶ τὴν ΑΟΗ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεγαλητέρου τῆς ἡμιπεριφερείας τόξου ΑΒΓΕΖΗ καὶ ἥτις λέγεται *κυρτὴ* γωνία, καὶ ταύτην ἔχουσιν ἄθροισμα αἱ εἰρημέναι γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ, ΕΟΖ, ΖΟΗ. Αἱ κυρταὶ γωνίαι ὑπερβαίνουσι τὰς δύο ὀρθάς· π.χ. ἡ κυρτὴ γωνία ΑΟΗ εἶνε μεγαλητέρα τῶν δύο ὀρθῶν ΑΟΔ καὶ ΔΟΖ· παρατηρητέον ὅμως, ὅτι, ὅταν λέγωμεν ἁπλῶς γωνίαν δύο εὐθειῶν, ἐννοοῦμεν πάντοτε τὴν κοίλην γωνίαν αὐτῶν.

50. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων, ἐφ' ὧν βαίνουσιν αἱ γωνίαι, εἶνε ὅλη ἡ περιφέρεια, ὅπερ συμβαίνει εἰς τὰς γωνίας ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΕ, ΕΟΗ, ΗΟΚ, ΚΟΑ, δεικνύεται ὁμοίως, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων εἶνε τέσσαρες ὀρθαί, αἱ ΑΟΔ, ΔΟΖ, ΖΟΘ, ΘΟΑ.

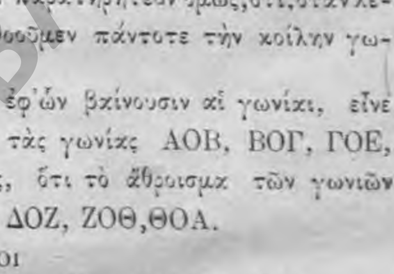
ΟΡΙΣΜΟΙ

51. *Ὀξεῖα γωνία* λέγεται ἡ μικροτέρα ὀρθῆς. *Ἀμβλεῖα* δὲ ἡ μεγαλητέρα ὀρθῆς.

Παραπληρωματικαὶ λέγονται δύο γωνίαι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε δύο ὀρθαί.

ΘΕΩΡΗΜΑ

52. *Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν, αἵτινες σχηματίζονται ὅταν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου εὐθείας ἀχθῇ ἄλλη εὐθεῖα, εἶνε δύο ὀρθαὶ γωνίαι.*

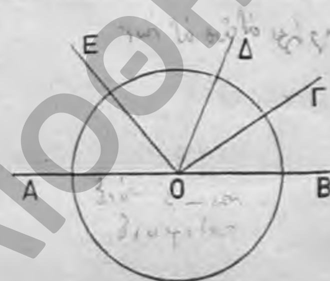


Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τυχὸν αὐτῆς σημεῖον (πλὴν τῶν ἄκρων) τὸ Ο καὶ ἐκ τοῦ Ο ἠγμένη, ὡς ἔτυχεν, ἡ εὐθεῖα ΟΓ· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ΑΟΓ, ΓΟΒ εἶνε δύο ὀρθαί.

Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε ἂς γραφῇ περιφέρεια ἂς τέμνῃ δὲ τὰς εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ· τὰ τόξα αγ καὶ γβ, τὰ ἀντίστοιχα τῶν δύο γωνιῶν, ἔχουσιν ἄθροισμα τὴν ἡμιπεριφέρειαν αγβ (διότι ἡ αΟβ εἶνε διάμετρος τοῦ κύκλου)· ἄρα (48) τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων εἶνε δύο ὀρθαὶ γωνίαι. 11

ΘΕΩΡΗΜΑ

12 53. *Πᾶσαι αἱ γωνίαι αἵτινες σχηματίζονται, ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς κείμεναι, ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς γωνίας.*

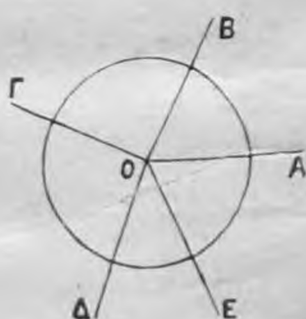


Διότι, ἂν γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, τὰ τόξα τὰ εἰς τὰς γωνίας ταύτας ἀντίστοιχα θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας (48)

ΘΕΩΡΗΜΑ

54. *Πᾶσαι αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι, ὅταν ἐξ ἑνὸς σημείου ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι, ἔχουσιν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς*

Διότι, ἂν γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε, τὰ ἀντίστοιχα τῶν γωνιῶν τούτων τόξα ἔχουσιν ἄθροισμα ὅλην τὴν περιφέρειαν (50).



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῷ θεωρήματι τούτῳ πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὑπ' ὄψιν καὶ αἱ κυρταὶ γωνίαι· ἂν λ.χ. ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Ο μόνον αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, αἱ τὰς τέσσαρας ὀρθὰς ἀποτελοῦσαι γωνίαι εἶνε, ἡ ΑΟΒ, ἡ ΒΟΓ καὶ ἡ κυρτὴ γωνία ΓΟΑ. 12

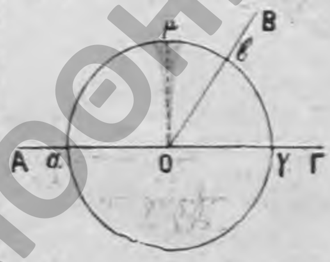
ΘΕΩΡΗΜΑ

13 55. *Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἐφεξῆς γωνιῶν εἶνε δύο ὀρθαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν γωνιῶν τούτων κεῖνται ἐπ' εὐθείας.*

Ἐφεξῆς λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν ἔχωσι τὴν κορυφὴν καὶ μίαν πλευρὰν κοινήν, τὰς δὲ μὴ κοινὰς ἐκ διαφόρων μερῶν τῆς κοινῆς.

Ἔστω τὸ ἄθροισμα τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ δύο ὀρθαί, λέγω, ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΟ καὶ ΟΓ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· τουτέστιν, ὅτι ἡ ΑΟΓ εἶνε εὐθεῖα γραμμή.

Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα οἱανδήποτε γραφῇ περιφέρεια καὶ τέμνῃ τὰς εὐθείας εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, τὸ τόξον αβγ θὰ εἶνε ἥμισυ τῆς περιφερείας· διότι, ἂν μὲν αἱ δύο γωνίαι εἶνε ἴσαι, θὰ εἶνε ἀμφότεραι ὀρθαὶ καὶ τὰ τόξα αβ, βγ θὰ εἶνε τεταρτημόρια τῆς περιφερείας, ἂν δὲ πάλιν εἶνε ἄνισοι, ἂς ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τῆς μεγαλητέρας αοβ ἡ ὀρθὴ γωνία αομ· τότε αἱ δύο γωνίαι μοβ καὶ βογ θὰ ἀποτελῶσι τὴν ἄλλην ὀρθήν, καὶ θὰ είνε πάλιν τὰ τόξα αμ καὶ μγ τεταρτημόρια τῆς περιφερείας· ὥστε πάντοτε τὸ τόξον αβγ εἶνε ἥμισυ τῆς περιφερείας καὶ διὰ τοῦτο ἡ χορδὴ αὐτοῦ εἶνε διάμετρος τοῦ κύκλου (33, Παρατ.), ἡ δὲ διάμετρος αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἀκτίνων αΟ καὶ Ογ· ὥστε ἡ γραμμὴ ΑΟΓ εἶνε εὐθεῖα γραμμή. ἀντίστροφον του 53 13



ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

56. Ὅταν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ τρίτης, σχηματίζονται πέριξ τῶν δύο τομῶν 8 γωνίαι. Ἐκ τούτων αἱ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης κείμεναι καλοῦνται *ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*· τοιαῦται εἶνε αἱ γωνίαι γ καὶ ζ, ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ ε.

Αἱ γωνίαι δ καὶ ζ (αἱ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης καὶ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν κείμεναι) καλοῦνται *ἐντὸς ἐναλλάξ*· ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι γ καὶ ε.

Αἱ δὲ γωνίαι γ καὶ η (ὧν ἡ μία κεῖται ἐντός, ἡ δὲ ἄλλη ἐκτὸς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης) λέγονται *ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*. Ὡσαύτως καὶ αἱ γωνίαι δ καὶ θ, β καὶ ζ, α καὶ ε.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Αἱ τέσσαρες γωνίαι δ, γ, ζ, ε, αἱ μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν κείμεναι, ἀποτελοῦσι πάντοτε τέσσαρας ὀρθὰς (δύο μὲν αἱ δ καὶ γ, δύο δὲ αἱ ε καὶ ζ)· ἂν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εἶνε δύο ὀρθαί, καὶ τῶν ἄλλων δύο τὸ ἄθροισμα θὰ εἶνε δύο ὀρθαί· ἂν δηλονότι εἶνε $\gamma+\zeta=2^{\text{ὀρθ.}}$, θὰ εἶνε καὶ $\delta+\varepsilon=2^{\text{ὀρθ.}}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ

(59) 57. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν, αἱ τοιαῦται εὐθεῖαι λέγονται *παράλληλοι*.

Ὅτι δὲ ὑπάρχουσι τοιαῦται εὐθεῖαι, φαίνεται ἐκ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

14

(60) 58. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσιν*

ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς,

ἢ τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ ἴσας,

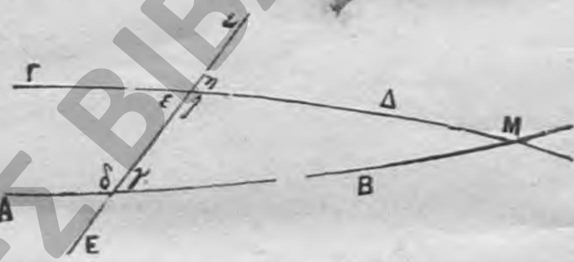
ἢ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας,

αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν δύνανται νὰ συναντηθῶσιν, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν, ἤτοι εἶνε παράλληλοι.

1) Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς· ἤτοι ἔστω

$\gamma+\zeta=2^{\text{ὀρθ.}}$

καὶ $\delta+\varepsilon=2^{\text{ὀρθ.}}$



λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν, δὲν συναντῶνται.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἂς ὑποθέσωμεν τὸ ἐναντίον· τουτέστιν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ αὐξανόμεναι ἐφ' ἱκανὸν συναντῶνται εἴς τι σημεῖον Μ.

Ἐὰν νοήσωμεν δύο σχήματα ἴσα πρὸς τὸ ΜΔζγΒΜ καὶ προσαρμόσωμεν αὐτὰ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία γ τοῦ ἑνὸς καὶ ἡ γωνία ζ τοῦ ἑτέρου νὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν (ὡς δεικνύει τὸ προηγούμενον σχῆμα), ἀμφότεραι αἱ γραμμαὶ ΜΒΔΜ καὶ ΜΔΒΜ θὰ εἶνε (55) εὐθεῖαι γραμμαί, διότι εἶνε $\gamma+\zeta=2^{\text{ὀρθ.}}$· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ ἑνὸς σημείου Μ εἰς τὸ ἄλλο δύο εὐθείας γραμμάς· ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ $2^{ον}$ ἀξίωμα τῆς εὐθείας καὶ διὰ τοῦτο εἶνε ἄτοπον. Εἰς τὸ ἄτοπον τοῦτο κατηντήσαμεν ὑποθέσαντες, ὅτι αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ συναντῶνται· ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὗται δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

2) Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι, ὡς αἱ γ καὶ ε εἶνε ἴσαι· λέγω, ὅτι καὶ πάλιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

Διότι εἶνε $\varepsilon+\zeta=2^{\text{ορθ.}}$ (κατὰ τὸ θεώρημα 52)

καὶ $\gamma=\varepsilon$ (ἐξ ὑποθέσεως)·

ἂν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα τὴν γωνίαν ε διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ γ, εὑρίσκομεν

$$\gamma+\zeta=2^{\text{ορθ.}}$$

ἤτοι αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶνε παραπληρωματικαί, ἄρα κατὰ τὰ προαποδειχθέντα αἱ εὐθεῖαι δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

3) Ἂς ὑποθέσωμεν τέλος, ὅτι δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι ὡς αἱ γ καὶ η, εἶνε ἴσαι· λέγω, ὅτι καὶ τότε αἱ εὐθεῖαι δὲν συναντῶνται.

Διότι εἶνε $\eta+\zeta=2^{\text{ορθ.}}$ (κατὰ τὸ θεώρημα 52)

καὶ $\eta=\gamma$ (ἐξ ὑποθέσεως).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων εὑρίσκομεν καὶ πάλιν

$$\gamma+\zeta=2^{\text{ορθ.}}$$

ὥστε καὶ πάλιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν ἑκατέρωθεν.

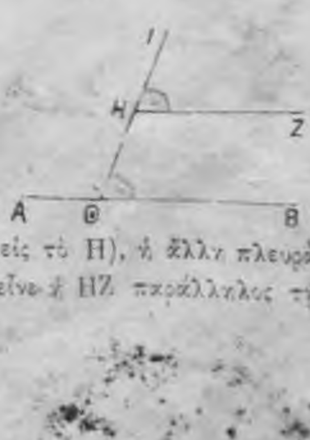
14

ΠΟΡΙΣΜΑ $1^{ον}$

59. *Δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶνε παράλληλοι.*

ΠΟΡΙΣΜΑ $2^{ον}$

60. *Ἐκ παντὸς σημείου ἄγεται παράλληλός τις πρὸς πᾶσαν εὐθεῖαν μὴ διερχομένην δι' αὐτοῦ.*



Ἔστω σημεῖον τὸ Η καὶ εὐθεῖα ἡ ΑΒ· Ἂν ἐκ τοῦ Η ἀχθῇ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Θ τῆς ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΗΘ, γίνεται γωνία, ἡ ΗΘΒ· ἂν δὲ τὴν γωνίαν ταύτην θέσωμεν εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε ἡ πλευρὰ αὐτῆς ΘΗ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΗΙ (καὶ ἡ κορυφὴ Θ εἰς τὸ Η), ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτῆς ΘΒ θὰ λάβῃ θέσιν τινὰ ΗΖ καὶ θὰ εἶνε ἡ ΗΖ παράλληλος τῇ ΑΘΒ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα.

ΑΞΙΩΜΑ

61. *Ἐκ σημείου μὴ κειμένου ἐπ' εὐθείας τινὸς μία μόνη διέρχεται παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ταύτῃ* (*).

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

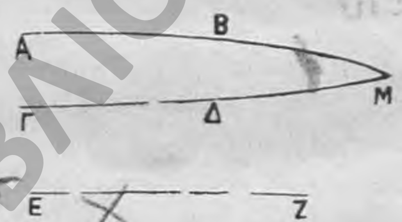
62. *Πᾶσα εὐθεῖα συναντῶσα μίαν τῶν παραλλήλων θὰ συναντᾷ καὶ τὴν ἄλλην.*

Ἄλλως θὰ ἦσαν ἐξ ἑνὸς σημείου (τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως) δύο παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

63. *Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι εἶνε καὶ πρὸς ἀλλήλας παράλληλοι.*

Διότι, ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ὧν ἑκατέρα ὑποτίθεται παράλληλος τῇ ΕΖ, συνηντῶντο εἴς τι σημεῖον Μ, θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ Μ δύο παραλλήλους τῇ ΕΖ, τουτέστι τὰς ΜΒΑ καὶ ΜΔΓ, ὅπερ ἄτοπον.



ΘΕΩΡΗΜΑ

64. *Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθῶσιν ὑπὸ τρίτης οἱασδήποτε θὰ σχηματίσωσι*

1) *Τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς,*

2) *Τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας,*

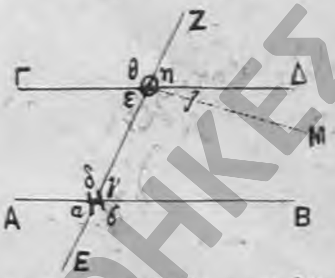
3) *Τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσας.*

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΕΖ· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε

$$\begin{matrix} \gamma + \zeta = 2^{\text{ορθ.}} & \qquad \gamma = \varepsilon = \eta, \ \beta = \zeta \\ \delta + \varepsilon = 2^{\text{ορθ.}} & \qquad \delta = \zeta = \theta, \ \alpha = \varepsilon \end{matrix} \qquad (1)$$

(*) Ἀξιοπαρατήρητον εἶνε, ὅτι καὶ ἡ ἐναντία πρότασις, τουτέστιν, ὅτι *ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας τινὸς κειμένου ἄγονται πολλαὶ παράλληλοι πρὸς αὐτήν,* συμβιβάζεται πρὸς τὰ ἄλλα ἀξιώματα τῆς γεωμετρίας καὶ δύναται νὰ διαπλασθῇ γεωμετρικὸν σύστημα, ἐν τῷ ὁποίῳ ὑπάρχουσιν ἐξ ἑνὸς σημείου ἄπειροι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Ὁμοίως δύναται, μεταβαλλομένου τοῦ δευτέρου ἀξιώματος τῆς εὐθείας, νὰ διαπλασθῇ καὶ ἄλλο σύστημα γεωμετρικόν, ἐν τῷ ὁποίῳ αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ εἶνε κλεισταὶ καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ δὲν ὑπάρχουσι παράλληλοι εὐθεῖαι. Ἀλλὰ τὰ γεωμετρικὰ ταῦτα συστήματα, καίτοι εἶνε λογικῶς δυνατά, εἶνε πολὺ πολυπλοκώτερα τοῦ κοινῶς παραδεδεγμένου γεωμετρικοῦ συστήματος τοῦ Εὐκλείδου, ἐν τῷ ὁποίῳ ἐξ ἑκάστου σημείου μία μόνη ἄγεται παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἄς τεθῇ ἡ γωνία γ ἐπὶ τῆς η τοιουτοτρόπως, ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν, νὰ πέσῃ δὲ καὶ ἡ πλευρὰ ΗΘ τῆς γ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΘΖ τῆς η, τότε καὶ ἡ πλευρὰ ΗΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΘΔ· διότι, ἂν ἐλάμβανεν ἄλλην θέσιν, ἔστω τὴν ΘΜ, θὰ ἦτο ἡ γωνία γ ἴση τῇ γωνίᾳ ΖΘΜ· ἄρα (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) θὰ ἦτο ἡ ΘΜ παράλληλος τῇ ΑΒ· ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν ἐκ τοῦ σημείου Θ δύο παραλλήλους τῇ ΑΒ· τουτέστι τὰς ΓΘΔ καὶ ΘΜ, ὅπερ ἀντιβαίνει εἰς τὸ ἀξίωμα τῶν παραλλήλων καὶ διὰ τοῦτο εἶνε ἄτοπον· ὥστε ἀνάγκη νὰ πέσῃ καὶ ἡ πλευρὰ ΗΒ ἐπὶ τῆς ΘΔ· ἐπομένως εἶνε γ=η. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε (40) καὶ ε=η, ἕπεται γ=ε. Ἔχομεν πρὸς τούτοις (52) η+ζ=2$^{ορθ.}$, ὅθεν καὶ γ+ζ=2$^{ορθ.}$ (διότι γ=η).



Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ αἱ ἄλλαι ἰσότητες (ι).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶνε ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

65. *Πᾶσα κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν παραλλήλων εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

66. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης σχηματίζωσι δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν* (ὡς αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΘΜ τοῦ προηγουμένου σχήματος), *αἱ εὐθεῖαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας, ὅταν ἐφ' ἱκανὸν αὐξηθῶσι πρὸς τὸ μέρος τῶν γωνιῶν τούτων.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

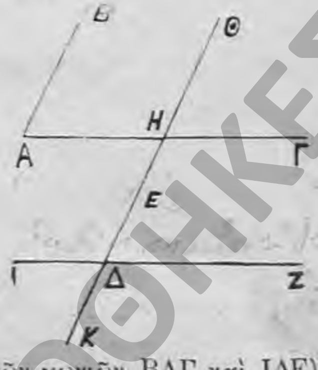
67. *Ἐὰν αἱ πλευραὶ δύο γωνιῶν εἶνε παράλληλοι, αἱ γωνίαι εἶνε ἴσαι μέν, ἂν αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἔχωσιν ἀμφότεραι τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ ἀμφότεραι ἀντίθετον, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν δύο μὲν παράλληλοι πλευραὶ ἔχωσι τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ δὲ δύο ἄλλαι ἀντίθετον.*

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ ἔχουσαι τὴν πλευρὰν ΔΖ παράλληλον τῇ ΑΓ καὶ τὴν ΔΕ παράλληλον τῇ ΑΒ. Ἐὰν αὐξηθῇ ἡ ΔΕ, θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΓ (62) εἴς τι σημεῖον Η, θὰ εἶνε δὲ γων. ΒΑΓ=γων. ΘΗΓ· διότι αὗται εἶνε ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΚΘ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἐπίσης εἶνε γων. ΕΔΖ=γων. ΘΗΓ· διότι αὗται εἶνε ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΑΓ καὶ ΙΖ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΘΚ.

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων ἕπεται γων. ΒΑΓ=γων. ΕΔΖ.

Καὶ αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΙΔΚ εἶνε ἴσαι· διότι ἡ ΙΔΚ εἶνε ἴση τῇ ΕΔΖ.

Ἔχουσι δὲ τῶν μὲν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ αἱ παράλληλοι πλευραὶ ἀμφότεραι τὴν αὐτὴν φοράν· (ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ), τῶν δὲ γωνιῶν ΙΔΚ καὶ ΒΑΓ ἀμφότεραι τὴν ἀντίθετον (ἡ ΔΙ τῇ ΑΓ καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΑΒ).



Τέλος αἱ γωνίαι ΙΔΕ καὶ ΚΔΖ, ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς ΕΔΖ, εἶνε παραπληρωματικαὶ καὶ τῆς ΒΑΓ· ἔχουσιν ὅμως αἱ μὲν παράλληλοι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΔΕ (τῶν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΙΔΕ) τὴν αὐτὴν φοράν, αἱ δὲ ΑΓ καὶ ΔΙ τὴν ἐναντίαν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

68. *Ἐὰν αἱ πλευραὶ γωνίας εἶνε κάθετοι πρὸς τὰς πλευρὰς ἄλλης* (ἑκατέρα πρὸς ἑκατέραν), *αἱ γωνίαι εἶνε ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί* (Ἴσαι μὲν εἶνε, ἂν ἀμφότεραι εἶνε ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, παραπληρωματικαὶ δέ, ἂν ἡ μία εἶνε ὀξεῖα, ἡ δὲ ἄλλη ἀμβλεῖα).

Ἔστωσαν δύο γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ ἔχουσαι τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ· ἔστωσαν δὲ ἀμφότεραι ὀξεῖαι· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε ἴσαι.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΔΕ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα φορὰν ἡ ΑΘ· ἔτι δὲ παράλληλος τῇ ΔΖ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα φορὰν ἡ ΑΗ· τότε ἡ γωνία ΘΑΗ θὰ εἶνε ἴση τῇ ΕΔΖ (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα)· θὰ εἶνε δὲ ἡ μὲν ΑΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ δὲ ΑΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ (65), ὥστε αἱ γωνίαι ΘΑΒ καὶ ΗΑΓ θὰ εἶνε ἴσαι, ὡς ὀρθαί· ἐὰν δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων ἀφαιρεθῇ ἡ κοινὴ ΘΑΓ, μένουσιν ἴσαι γωνίαι, αἱ ΒΑΓ καὶ ΘΑΗ· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΘΑΗ εἶνε ἴση τῇ ΕΔΖ, ἕπεται, ὅτι ἡ ΒΑΓ ἰσοῦται τῇ ΕΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Καὶ ἡ γωνία ΜΔΖ ἔχει τὰς πλευρὰς αὐτῆς καθέτους πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΒΑΓ· δὲν εἶνε ὅμως αἱ γωνίαι αὗται ἴσαι (διότι αἱ μὲν ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ εἶνε ὀξεῖαι, ἡ δὲ ΜΔΖ εἶνε ἀμβλεῖα)· ἀλλ' εἶνε παραπληρωματικαί, διότι ἡ ΜΔΖ, παραπληρωματικὴ οὖσα τῆς ΕΔΖ, εἶνε παραπληρωματικὴ καὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΑΓ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

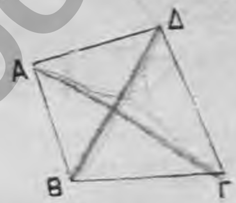
69. *Εὐθύγραμμον σχῆμα* λέγεται ἐπίπεδος ἐπιφάνεια περατουμένη εἰς εὐθείας γραμμάς.

Πλευραὶ τοῦ σχήματος λέγονται αἱ περιέχουσαι αὐτὸ εὐθεῖαι.

Γωνίαι δ' αὐτοῦ, αἱ ὑπὸ τῶν πλευρῶν σχηματιζόμεναι γωνίαι.

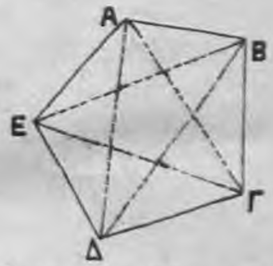
Κορυφαὶ δ' αὐτοῦ, αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν τούτων.

Τρίπλευρον μὲν ἢ *τρίγωνον* λέγεται τὸ ὑπὸ τριῶν εὐθειῶν περιεχόμενον σχῆμα, ὡς τὸ ΑΒΓ, *τετράπλευρον* δὲ τὸ ὑπὸ τεσσάρων, ὡς τὸ ΑΒΓΔ, *πολύπλευρον* δὲ ἢ *πολύγωνον* τὸ ὑπὸ περισσοτέρων.



Περίμετρος τοῦ σχήματος λέγεται ἡ τεθλασμένη καὶ κλειστὴ γραμμή, ἣν σχηματίζουσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ· ἔτι δὲ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Διαγώνιος τοῦ σχήματος λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις συνδέει δύο κορυφὰς χωρὶς νὰ εἶνε πλευρά.



Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ εἶνε πολύγωνον· πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ ΔΕ, ΕΑ·
γωνίαι αὐτοῦ εἶνε αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, Δ, Ε·
κορυφαὶ αὐτοῦ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε·
διαγώνιοι δέ, αἱ ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΕ.

Ἁπλοῦν λέγεται τὸ σχῆμα, ἐὰν τὰ ἄκρα αὐτοῦ ἀποτελῶσι μίαν γραμμὴν κλειστὴν μὴ ἔχουσαν μέρη κλειστά·
οἷον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶνε ἁπλοῦν σχῆμα, καὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐπίσης· ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον ΖΗΙΘ δὲν εἶνε ἁπλοῦν σχῆμα.

Τὰ σχήματα, περὶ ὧν ἐνταῦθα γίνεται λόγος, εἶνε πάντα ἁπλᾶ σχήματα.

70. *Κυρτὸν* λέγεται τὸ σχῆμα, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ προσεκβαλλομένη ἀφίνῃ τὸ σχῆμα ὁλόκληρον πρὸς τὸ ἓν μέρος αὐτῆς.

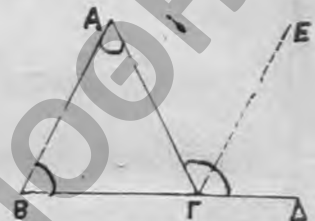
Τὸ τρίγωνον εἶνε κυρτὸν σχῆμα· διότι, ἂν πλευρά τις αὐτοῦ προσεκβαλλομένη εἰσήρχετο εἰς τὸ τρίγωνον, ἐν τῇ ἐξόδῳ ἢ θὰ ἔτεμνεν ἑαυτήν, ἢ θὰ ἔτεμνε μίαν τῶν ἄλλων εἰς δύο σημεῖα· ταῦτα δὲ εἶνε ἀδύνατα.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

71. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν παντὸς τριγώνου εἶνε δύο ὀρθαί.*

Ἔστω τυχὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· ἵνα δείξωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ εἶνε δύο ὀρθαί, αὐξάνομεν μίαν τῶν πλευρῶν του, ἔστω τὴν ΒΓ, μέχρι σημείου τινὸς Δ καὶ ἄγομεν ἐκ τοῦ Γ τὴν ΓΕ παράλληλον τῇ ΑΒ.



Ἡ γωνία Α τοῦ τριγώνου εἶνε ἴση τῇ ΑΓΕ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ· ἐπίσης ἡ γωνία Β τοῦ τριγώνου εἶνε ἴση τῇ ΕΓΔ, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν αὐτῶν παραλλήλων, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου Α+Β+Γ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΑΓΕ, ΕΓΔ, ΒΓΑ, ἤτοι (53) δύο ὀρθαί.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

72. *Ἡ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνία ΑΓΔ* (ἥτις σχηματίζεται, ὅταν μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ προσεκβληθῇ) *εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Β.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

73. *Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ μίαν ὀρθὴν γωνίαν, αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι αὐτοῦ* (ὀξεῖαι οὖσαι) *θὰ ἀποτελῶσι μίαν ὀρθήν.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

74. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὴν τρίτην ἴσην.*

Διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ Α, Β, Γ τὰς γωνίας τοῦ ἑνὸς καὶ διὰ α, β, γ τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου, θὰ εἶνε

$$Α+Β+Γ=α+β+γ$$

(διότι ἀμφότερα τὰ ἀθροίσματα εἶνε δύο ὀρθαί)· ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἴσων τὰ ἴσα Α+Β καὶ α+β (διότι Α=α καὶ Β=β), προκύπτει Γ=γ.

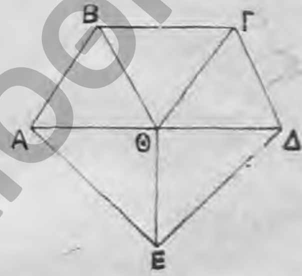
Θεόδωρος Ἐμμ. ... 17/5/13

19

ΘΕΩΡΗΜΑ

75. *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν παντὸς πολυγώνου κυρτοῦ εἶνε τόσαι ὀρθαὶ γωνίαι, ὅσον εἶνε τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ τέσσαρα.*

Ἔστω κυρτὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ τυχὸν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ τὸ Θ· ἐὰν ἐκ τοῦ Θ ἀχθῶσιν εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου αἱ εὐθεῖαι ΘΑ, ΘΒ, ΘΓ, ΘΔ, ΘΕ, διαιροῦσι τὸ πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶνε αἱ πλευραὶ αὐτοῦ· διαιροῦσι δὲ καὶ τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου ἑκάστην εἰς δύο μέρη, ὅπερ δὲν μεταβάλλει προφανῶς τὸ ἄθροισμα αὐτῶν· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων, ἐξαιρουμένων τῶν περὶ τὸ Θ γωνιῶν (αἵτινες ἀποτελοῦσι τέσσαρας ὀρθάς)· ἐπειδὴ δὲ ἑκάστου τριγώνου αἱ γωνίαι ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς, αἱ γωνίαι πάντων τῶν τριγώνων θὰ ἀποτελέσωσι τόσας ὀρθάς, ὅσον εἶνε τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Ἄρα πᾶσαι αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου θὰ ἀποτελέσωσι τόσας ὀρθάς, ὅσον εἶνε τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατὰ 4.



Ἐὰν διὰ τοῦ μ παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ θὰ εἶνε 2μ—4 ὀρθαί.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ δειχθῇ καὶ ἄλλως· ἐὰν δηλονότι ἀπὸ μιᾶς τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου ἀχθῶσιν αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ, διαιροῦσι τὸ πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσαι εἶνε αἱ πλευραί του, πλὴν δύο, ἤτοι μ—2· ἐπειδὴ δὲ ἑκάστου τούτων αἱ γωνίαι ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς, αἱ γωνίαι τοῦ πολυγώνου θὰ ἀποτελῶσι 2 (μ—2) ὀρθάς, ἤτοι 2μ—4.

Παντὸς ἁπλοῦ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθάς. Διότι χωρίζεται εἰς δύο τρίγωνα διὰ τῆς ἑτέρας τῶν διαγωνίων του. 19

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

26

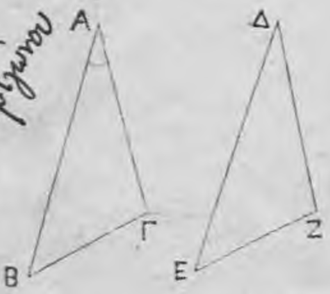
76. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν μὲ ἑκα-*

τέραν, καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα.

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα τὰς δύο πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἴσας μὲ τὰς δύο πλευρὰς ΔΕ καὶ ΔΖ (τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΔΕ καὶ τὴν ΑΓ ἴσην τῇ ΔΖ) καὶ τὴν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην τῇ γωνίᾳ ΕΔΖ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα.

Διότι, ἂν τεθῇ ἡ γωνία ΕΔΖ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΑΓ οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ ἡ πλευρὰ ΔΕ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἡ δὲ ΔΖ ἐπὶ τῆς ΑΓ, τὸ μὲν σημεῖον Ε θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ΔΕ καὶ ΑΒ, τὸ δὲ σημεῖον Ζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ΔΖ καὶ ΑΓ· καὶ ἡ εὐθεῖα ΕΖ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ διότι τὰ ἄκρα αὐτῶν συνέπεσαν καὶ μεταξὺ δύο σημείων μία μόνη εὐθεῖα ὑπάρχει· ὥστε τὰ δύο τρίγωνα ἐφαρμόζουσιν· ἄρα εἶνε ἴσα· θὰ ἔχωσι λοιπὸν καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Ε ἴσας καὶ τὰς γωνίας Γ καὶ Ζ ἴσας καὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΕΖ ἴσας.

σχήματα τριγώνου



ΘΕΩΡΗΜΑ

77. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα.*

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (σχῆμα τὸ ἀνωτέρω) ἔχοντα τὴν πλευρὰν ΒΓ ἴσην τῇ ΕΖ καὶ τὴν γωνίαν Β ἴσην τῇ Ε καὶ τὴν γωνίαν Γ ἴσην τῇ Ζ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα.

Διότι, ἂν τεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ ΕΖ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΓ (νὰ πέσῃ δὲ τὸ Ε εἰς τὸ Β καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ Γ), ἡ μὲν ΕΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Ε καὶ Β, ἡ δὲ ΖΔ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Ζ καὶ Γ· ἑπομένως τὸ σημεῖον Δ, ὅπερ εἶνε κοινὸν σημεῖον τῶν ΕΔ καὶ ΖΔ, θὰ γίνῃ κοινὸν σημεῖον τῶν ΒΑ καὶ ΓΑ· ἐπειδὴ δὲ αἱ ΒΑ καὶ ΓΑ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄλλο κοινὸν σημεῖον πλὴν τοῦ Α, συμπεραίνομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Δ θὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ Α· ἑπομένως ἡ ΕΔ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ ἡ ΖΔ ἐπὶ τῆς ΓΑ· ὥστε καὶ τὰ τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα εἶνε ἴσα.

20

ΟΡΙΣΜΟΙ

78. Ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον :

Ἰσόπλευρον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ πλευρὰς ἴσας,

Ἰσοσκελὲς δέ, ἐὰν ἔχῃ δύο μόνον πλευρὰς ἴσας,

Σκαληνὸν δέ, ἐὰν δὲν ἔχῃ πλευρὰς ἴσας.

79. Ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ λέγεται τὸ τρίγωνον :

Ὀρθογώνιον, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ὀρθήν,

Ἀμβλυγώνιον δέ, ἐὰν ἔχῃ μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν (αἱ λοιπαὶ δύο θὰ εἶνε (71) ὀξεῖαι),

Ὀξυγώνιον δέ, ἐὰν καὶ τὰς τρεῖς ἔχῃ ὀξείας,

Ἰσογώνιον δέ, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς αὐτοῦ γωνίας ἴσας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοῦ ἰσογωνίου τριγώνου ἑκάστη τῶν γωνιῶν εἶνε $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς· διότι αἱ τρεῖς ἔχουσιν ἄθροισμα δύο ὀρθάς.

Ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ἡ ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας πλευρά.

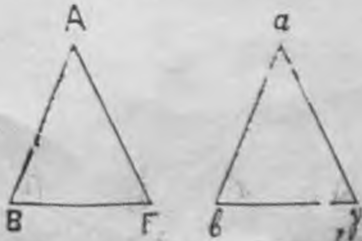
Βάσις τριγώνου λέγεται μία τις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ· τοῦ δὲ ἰσοσκελοῦς τριγώνου λαμβάνεται συνήθως ὡς βάσις ἡ πρὸς τὰς ἄλλας ἄνισος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

80. *Παντὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι* (αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν) *εἶνε ἴσαι.*

Ἔστω ἰσοσκελὲς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον ἴσας τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ· λέγω, ὅτι αἱ ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι, αἱ Γ καὶ Β, εἶνε ἴσαι.

Ἂς ἐπαναληφθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, καὶ ἂς ἐφαρμοσθῶσιν αἱ ἴσαι γωνίαι Α καὶ α, ἀλλ' οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ αβ νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ καὶ ἡ αγ ἐπὶ τῆς ΑΒ· τότε καὶ τὸ σημεῖον β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ (διότι αβ=ΑΒ=ΑΓ) καὶ τὸ γ ἐπὶ τοῦ Β καὶ ἡ εὐθεῖα βγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΒ· ὥστε αἱ γωνίαι γ καὶ Β θὰ ἐφαρμόσωσιν· ἄρα εἶνε ἴσαι· καὶ ἐπειδὴ ἡ γ εἶνε ἴση τῇ Γ, ἕπεται Β=Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου δύο ἴσαι γωνίαι εἶνε πάντοτε ὀξεῖαι· ἄλλως θὰ ὑπερέβαινε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτοῦ γωνιῶν τὰς δύο ὀρθάς. 21

ΠΟΡΙΣΜΑ

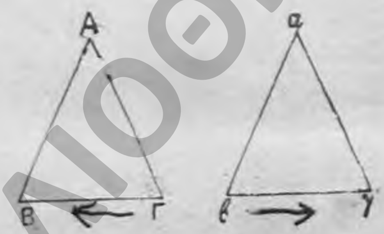
81. *Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶνε καὶ ἰσογώνιον.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

82. *Ἐὰν τρίγωνον ἔχῃ δύο γωνίας ἴσας, ἔχει καὶ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευρὰς ἴσας.*

Ἔστω τοιοῦτο τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἔχον τὰς γωνίας Β καὶ Γ ἴσας· λέγω, ὅτι καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν γωνιῶν τούτων πλευραί, αἱ ΑΓ καὶ ΑΒ, εἶνε ἴσαι.

Ἄς ἐπανκληφθῇ τὸ τρίγωνον καὶ ἄς τεθῇ τὸ αβγ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ βγ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΓΒ, νὰ πέσῃ δὲ τὸ β ἐπὶ τοῦ Γ καὶ τὸ γ ἐπὶ τοῦ Β· τότε καὶ ἡ βα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν β καὶ Γ (διότι β=Β=Γ)· ὁμοίως ἡ γα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΑ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Β καὶ γ· ἑπομένως τὰ τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσωσι (κατὰ τὸ θεώρημα 77) καὶ ἡ αβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΑΓ· ἄρα εἶνε ἴσαι· ἐπειδὴ δὲ εἶνε αβ=ΑΒ, ἕπεται ΑΒ=ΑΓ· ὅ. ἔ. δ. 29



ΠΟΡΙΣΜΑ

83. *Πᾶν τρίγωνον ἰσογώνιον εἶνε καὶ ἰσόπλευρον.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

84. *Ἐὰν εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἀχθῇ εὐθεῖα ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως, θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ θὰ διαιρῇ καὶ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς εἰς δύο μέρη ἴσα.*

Διότι τὰ δύο τρίγωνα, εἰς ἃ τὸ ἰσοσκελὲς διαιρεῖται, ἔχουσι τὰς δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν ἴσην,

ἤτοι ΑΒ=ΑΓ καὶ ΒΔ=ΔΓ (ἐξ ὑποθέσεως)

καὶ Β=Γ· (80)

ἄρα εἶνε ἴσα καὶ διὰ τοῦτο αἱ γωνίαι ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶνε ἴσαι, ἤτοι ἡ ΑΔ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν αὐτῶν τριγώνων ἕπεται καὶ ὅτι αἱ δύο γωνίαι ΒΑΔ καὶ ΓΑΔ, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ Α, εἶνε ἴσαι. 29

85. Ἀξιοπρατήρητον εἶνε, ὅτι ἐν τῷ ἰσοσκελεῖ τριγώνῳ μία καὶ ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ἐκτελεῖ τὰ ἑξῆς τέσσαρα.

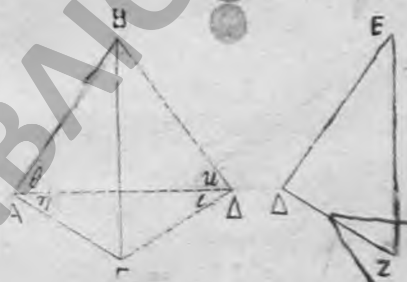
1) διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς·
2) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς βάσεως·
3) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν·
4) διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς·

δεικνύεται δὲ εὐκολώτατα, ὅτι εἶνε ἀδύνατον νὰ εὑρεθῇ ἄλλη εὐθεῖα ἐκτελοῦσα δύο ἐκ τούτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

86. *Δύο τρίγωνα ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, κατὰ μίαν, εἶνε ἴσα.*

Ἔστω ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ καὶ ΒΓ=ΕΖ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶνε ἴσα.



Ἂς τεθῇ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ καὶ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ Ε νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Β καὶ ἡ πλευρὰ ΕΖ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΒΓ, ἂς ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ· τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶνε ἰσοσκελές· διότι ΑΒ=ΕΔ=ΒΔ· ὅθεν ἕπεται (80)

$$θ=κ·$$

ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶνε ὡσαύτως ἰσοσκελές· ὅθεν εἶνε

$$η=ι.$$

Ἐκ τῶν δύο τούτων ἰσοτήτων ἕπεται

$$η+θ=ι+κ,$$

ἤτοι $Α=Δ$·

ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας· ἄρα εἶνε ἴσα (76).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι ἡ ΑΔ κεῖται ἐντὸς τῶν τριγώνων, ὥστε διαιρεῖ τὰς γωνίας Α καὶ Δ εἰς μέρη· ἀλλὰ καὶ ἐκτὸς αὐτῶν ἂν κεῖται ἡ ΑΔ, πάλιν ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτή· μόνον αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶνε τότε διαφοραὶ ἴσων γωνιῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

87. Εἰς τὰ ἴσα τρίγωνα αἱ ἴσαι πλευραὶ εὑρίσκονται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ αἱ ἴσαι γωνίαι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

88. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν γωνίαν ἴσην ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν, ἢ εἶνε τὰ τρίγωνα ταῦτα*

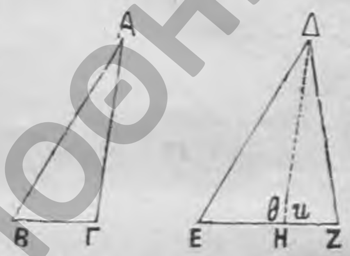
ἴσα, ἢ αἱ δύο γωνίαι, αἱ ἀπέναντι τῶν δύο ἄλλων ἴσων πλευρῶν, εἶνε παραπληρωματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Ἔστω ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ

καὶ Β=Ε.

Ἂν μὲν αἱ πλευραὶ ΒΓ καὶ ΕΖ εἶνε ἴσαι, τὰ τρίγωνα θὰ εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας.

Ἂν δὲ εἶνε ἄνισοι, ἔστω μεγαλητέρα ἡ ΕΖ καὶ ἂς ἐφαρμοσθῇ ἡ γωνία Β ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Ε· τότε ἡ μὲν πλευρὰ ΒΑ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΕΔ (διότι εἶνε ἴσαι), ἡ δὲ ΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπί τινος μέρους τῆς ΕΖ, ἔστω ἐπὶ τῆς ΕΗ, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΔΕΗ· ὥστε θὰ εἶνε Γ=θ καὶ ΑΓ=ΔΗ·



ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη καὶ ΑΓ=ΔΖ, συνάγεται, ὅτι

θὰ εἶνε ΔΗ=ΔΖ·

ἐπομένως τὸ τρίγωνον ΔΗΖ θὰ εἶνε ἰσοσκελὲς καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶνε αἱ γωνίαι αὐτοῦ κ καὶ Ζ ἴσαι, ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι θ καὶ κ εἶνε παραπληρωματικαί, καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς Γ καὶ Ζ (Γ=θ καὶ Ζ=κ) εἶνε παραπληρωματικαί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Εἶνε δὲ ἄνισοι αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ· διότι ἡ Ζ, οὖσα παρὰ τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶνε ὀξεῖα· ἐπομένως ἡ Γ θὰ εἶνε ἀμβλεῖα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν αἱ γωνίαι Γ καὶ Ζ εἶνε ἢ ἀμφότεραι ὀξεῖαι ἢ ἀμφότεραι ἀμβλεῖαι, δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα δύο ὀρθὰς καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ εἶνε ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

89. *Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχωσι τὰς ὑποτεινούσας ἴσας καὶ μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην, εἶνε ἴσα.*

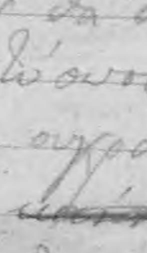
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ ἐὰν ἔχωσι τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶνε ἴσα (76).

ΘΕΩΡΗΜΑ

90. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα.*

Διότι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἔχουσιν ἴσην (74)· ἔχοντα δὲ μίαν ~~πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς~~ προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, εἶνε ἴσα (77)·

[illegible]



ΑΒ μεγαλητέραν τῆς ΑΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία Γ (ἡ ἀπέναντι τῆς ΑΒ) θὰ εἶνε μεγαλητέρα τῆς Β.

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς ΑΒ τὸ μέρος ΑΔ ἴσον τῇ μικροτέρᾳ ΑΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΔ. Ἡ γωνία ΑΔΓ, οὖσα ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΓΔΒ, εἶνε μεγαλητέρα τῆς ἐντὸς καὶ ἀπέναντι Β (72)· ἡ αὐτὴ δὲ γωνία ΑΔΓ εἶνε ἴση τῇ ΑΓΔ· διότι τὸ

[illegible]

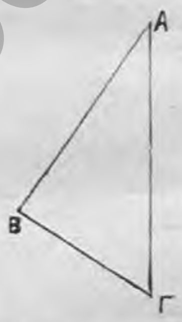
τρίγωνον ΑΓΔ εἶνε ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς· ὥστε ἡ γωνία ΑΓΔ, ἥτις εἶνε μέρος τῆς Γ, ὑπερβαίνει τὴν Β· πολὺ δὲ περισσότερον ἡ γωνία Γ θὰ ὑπερβαίνῃ τὴν Β.

ΘΕΩΡΗΜΑ

94. *Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶνε ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶνε ἄνισοι· ἡ μεγαλητέρα πλευρὰ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας.*

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον τὴν γωνίαν Γ μεγαλητέραν τῆς Β· λέγω, ὅτι καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ θὰ εἶνε μεγαλητέρα τῆς ΑΓ.

Ἂν ἡ ΑΒ δὲν ἦτο μεγαλητέρα τῆς ΑΓ, θὰ ἦτο ἢ ἴση τῇ ΑΓ, ἢ μικροτέρα αὐτῆς. Ἀλλ' ἂν ἦτο ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΑΓ, θὰ ἦτο καὶ Β=Γ· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει. Ἂν δὲ πάλιν ἦτο ἡ ΑΒ μικροτέρα τῆς ΑΓ, θὰ ἦτο (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) καὶ ἡ γωνία Γ μικροτέρα τῆς Β· ὅπερ καὶ τοῦτο ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ἄρα ἡ ΑΒ οὔτε ἴση δύναται νὰ εἶνε τῇ ΑΓ οὔτε μικροτέρα αὐτῆς· ἑπομένως θὰ εἶνε μεγαλητέρα.



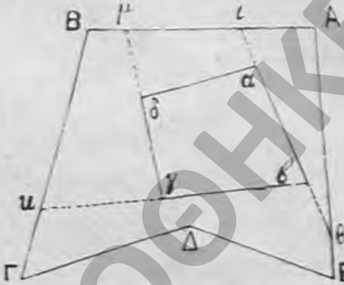
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντὶ νὰ ἀποδείξωμεν εὐθύς, ὅτι ἡ ΑΒ εἶνε μεγαλητέρα τῆς ΑΓ, ἀπεδείξαμεν πρῶτον, ὅτι δὲν δύναται νὰ εἶνε μήτε ἴση μήτε μικροτέρα· διότι ἀμφότεραι αἱ ὑποθέσεις ΑΒ=ΑΓ ἢ ΑΒ<ΑΓ φέρουσιν εἰς ἄτοπα. Ἡ τοιαύτη μέθοδος τῆς ἀποδείξεως λέγεται *ἀπαγωγὴ εἰς ἄτοπον*· καὶ κατ' αὐτὴν ἐγένοντο αἱ ἀποδείξεις τῶν πρώτων θεωρημάτων (ἐδάφ. 22,23,33 κτλ.). Συνίσταται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη γενικῶς εἰς τοῦτο· ὅτι ἀποδεικνύομεν τὰς ὑποθέσεις, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ κάμωμεν περί τινος πράγματος, πάσας ψευδεῖς, πλὴν μιᾶς καὶ μόνης, τῆς ὁποίας τότε συμπεραίνομεν τὴν ἀλήθειαν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

95. *Ἡ περίμετρος κυρτοῦ σχήματος εἶνε μικροτέρα πάσης ἄλλης γραμμῆς ἐξ εὐθειῶν συγκειμένης καὶ περικλειούσης αὐτό.*

Ἔστω κυρτὸν σχῆμα τὸ αβγδ καὶ περικλείουσα αὐτὸ γραμμὴ ἡ ΑΒΓΔΕΑ· λέγω, ὅτι ἡ περίμετρος αβ+βγ+γδ+δα εἶνε μικροτέρα τῆς ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΑ.

Ἂς προσεκβληθῇ ἑκατέρωθεν ἡ αβ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν περικλείουσαν γραμμὴν εἰς τὰ σημεῖα ι καὶ θ· ἐὰν ἐν τῇ περικλειούσῃ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ιΑθ διὰ τῆς εὐθείας ιθ, λαμβάνομεν γραμμὴν μικροτέραν ($5^{ον}$ ἀξίωμα τῆς εὐθείας), τὴν ιθΕΔΓΒι· ἐὰν δὲ καὶ ἐν ταύτῃ ἀντικαταστήσωμεν τὴν τεθλασμένην γραμμὴν βθΕΔΓκ διὰ τῆς εὐθείας βκ, λαμβάνομεν μικροτέραν γραμμήν, τὴν ιβκΒι. Ὁμοίως ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν μικροτέραν τὴν ιβγμι καὶ τέλος ταύτης μικροτέραν, τὴν αβγδα. Ἐπειδὴ δὲ ἐλαττοῦντες τὴν γραμμὴν ΑΒΓΔΕΑ εὕρομεν τὴν αβγδα, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ γραμμὴ αβγδα εἶνε μικροτέρα τῆς ΑΒΓΔΕΑ.



ΠΟΡΙΣΜΑ

96. *Ἐὰν ἐντὸς τριγώνου ληφθῇ σημεῖόν τι Δ καὶ ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ εὐθεῖαι εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς, αἱ ΔΒ, ΔΓ, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.*

Διότι ἡ γραμμὴ ΒΔ + ΔΓ + ΓΒ εἶνε μικροτέρα τῆς ΒΑ + ΑΓ + ΓΒ.

ΠΕΡΙ ΚΑΘΕΤΟΥ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΩΝ.

57

ΘΕΩΡΗΜΑ

9ζ 97. *Ἐκ σημείου ὑπάρχοντος ἐκτὸς εὐθείας δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν μία δὲ καὶ μόνη.*

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς τὸ Γ· λέγω, ὅτι ὑπάρχει τις εὐθεῖα διὰ τοῦ Γ διερχομένη καὶ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

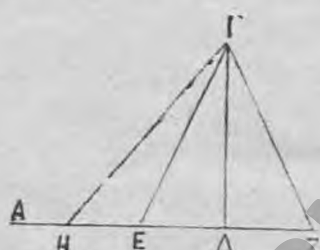
Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Γ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι, ἔστωσαν αἱ ΓΔ, ΓΕ, καὶ ἂς περιστραφῇ τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΓΔΕ περὶ τὴν βάσιν του ΔΕ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, ἂς λάβῃ δὲ τότε τὴν θέσιν ΔΕΖ· ἂς ἀχθῇ δὲ ἡ εὐθεῖα ΓΖ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Κ (διότι ἡ ΑΒ εἰσέρχεται εἰς

τὸ τρίγωνον ΓΔΖ, ἄρα καὶ θὰ ἐξέρχηται ἐξ αὐτοῦ)· ἐὰν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν του περιστρεφόμενον περὶ τὴν ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΖΚ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΚ καὶ ἡ γωνία ΖΚΔ ἐπὶ τῆς ΓΚΔ· ὥστε αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἴσαι· ἑπομένως καὶ αἱ τέσσαρες περὶ τὸ Κ γωνίαι εἶνε ἴσαι (σελ. 14, Παρατηρ.) καὶ αἱ εὐθεῖαι ΓΖ καὶ ΑΒ εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

Ὑπάρχει λοιπὸν ἡ ΓΖ ἐκ τοῦ Γ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἀλλ' οὐδεμία ἄλλη· διότι δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶνε παράλληλοι (59).

ΟΡΙΣΜΟΙ

98. Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἀχθῇ ἐπ' αὐτὴν ἡ κάθετος ΓΔ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι ΓΕ, ΓΗ, ΓΖ,..., αὗται λέγονται *πλάγιαι*.



Δύο πλάγιαι ΓΕ, ΓΖ λέγεται, ὅτι *ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου*, ἐὰν οἱ πόδες αὐτῶν Ε καὶ Ζ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ *ποδὸς* Δ τῆς καθέτου.

Ἄνισον δὲ λέγεται, ὅτι ἀπέχουσιν αἱ πλάγιαι ἀπὸ τῆς καθέτου, ὅταν αἱ ἀποστάσεις τῶν ποδῶν αὐτῶν ἀπὸ τοῦ Δ εἶνε ἄνισοι, ὡς αἱ ΓΗ, ΓΕ, καὶ μᾶλλον ἀπέχουσα λέγεται ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ πούς ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τοῦ Δ. 26

ΘΕΩΡΗΜΑ

27 99. *Ἐὰν ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἀχθῶσιν ἐπ' αὐτὴν ἡ κάθετος καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι,*

1) Ἡ κάθετος εἶνε μικροτέρα πάσης πλαγίας,

2) Δύο πλάγιαι ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι εἶνε ἴσαι,

3) Ἐκ δύο πλαγίων ἡ μᾶλλον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσα εἶνε μεγαλητέρα.

1. Ἡ κάθετος ΓΔ εἶνε μικροτέρα τῆς τυχούσης πλαγίας ΓΕ· διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΓΔΕ ἡ γωνία ΓΔΕ ὡς ὀρθὴ εἶνε μεγαλητέρα τῆς ὀξείας ΓΕΔ· ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλητέρας γωνίας κεῖται μεγαλητέρα πλευρά· ὅθεν ΓΕ>ΓΔ.

2. Ἐὰν αἱ πλάγιαι ΓΕ καὶ ΓΖ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου ἤτοι, ἂν εἶνε ΔΕ=ΔΖ, τὰ τρίγωνα ΓΔΕ καὶ ΓΔΖ θὰ εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΓΔ κοινήν, τὴν ΔΕ ἴσην τῇ ΔΖ καὶ τὴν γωνίαν ΓΔΕ ἴσην

τῇ ΓΔΖ. Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων συνάγεται, ὅτι ἡ ΓΕ εἶνε ἴση τῇ ΓΖ.

3. Ἐκ τῶν πλαγίων ΓΗ καὶ ΓΕ μεγαλητέρα εἶνε ἡ μᾶλλον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσα ΓΗ.

Διότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΓΕΗ ἡ γωνία ΓΕΗ εἶνε ἀμβλεῖα (ὡς παραπλήρωμα τῆς ὀξείας ΓΕΔ)· ἄρα εἶνε μεγαλητέρα τῆς ΓΗΕ (71) καὶ ἑπομένως ἡ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ ΓΗ εἶνε μεγαλητέρα τῆς ΓΕ.

Ἐν τῇ ἀποδείξει ἐλήφθησαν δύο πλάγιαι ΓΕ, ΓΗ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου κείμεναι· ἐὰν αἱ ἄνισον ἀπέχουσαι πλάγιαι κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς καθέτου, ὡς αἱ ΓΗ,ΓΖ, λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΗ (ἥτις εἶνε μεγαλητέρα τῆς ΔΖ) τὴν ΔΕ ἴσην τῇ ΔΖ καὶ ἄγομεν τὴν πλαγίαν ΓΕ, ἥτις κατὰ τὰ προαποδειχθέντα ἰσοῦται τῇ ΓΖ· ἔπειτα δεικνύομεν ὡς ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ΓΗ ὑπερβαίνει τὴν ΓΕ, ἄρα καὶ τὴν ἴσην αὐτῆς ΓΖ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν τριῶν τούτων προτάσεων ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκολώτατα διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ

100. *Ἐκ σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου εἶνε ἀδύνατον νὰ ἀχθῶσιν εἰς αὐτὴν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι.*

Διότι, ἂν μὲν ἡ μία ἐκ τῶν τριῶν εἶνε κάθετος, θὰ εἶνε αὕτη μικροτέρα τῶν δύο ἄλλων· ἐὰν δὲ εἶνε πλάγιαι καὶ αἱ τρεῖς, ἢ θὰ εὑρίσκωνται καὶ αἱ τρεῖς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶνε ἄνισοι, ἢ θὰ εὑρίσκωνται δύο πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς καθέτου καὶ μία πρὸς τὸ ἄλλο· ἀλλὰ καὶ τότε αἱ δύο, αἱ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου εὑρισκόμεναι, θὰ εἶνε ἄνισοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

101. *Περιφέρεια κύκλου καὶ εὐθεῖα γραμμὴ δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.*

Διότι, ἂν εὐθεῖά τις καὶ περιφέρεια εἶχον τρία κοινὰ σημεῖα, τὰ σημεῖα ταῦτα τῆς εὐθείας θὰ ἀπεῖχον ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου· ὥστε θὰ ἦτο δυνατὸν ἐκ τοῦ κέντρου νὰ ἀχθῶσιν εἰς τὴν εὐθεῖαν ταύτην τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι· ὅπερ ἀπεδείχθη ἀδύνατον. 97

ΠΟΡΙΣΜΑ

102 *Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου εἶνε γραμμὴ καμπύλη.*

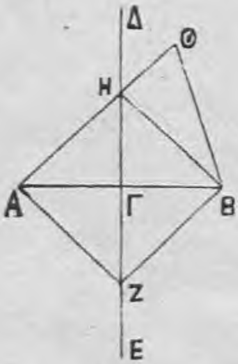
Διότι οὐδὲν μέρος αὐτῆς, ὅσον μικρὸν καὶ ἂν ὑποτεθῇ, εἶνε εὐθεῖα γραμμή.

ΘΕΩΡΗΜΑ

103. *Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου εὐθείας ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν,*

1) πᾶν σημεῖον τῆς καθέτου θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων,

2) πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον θὰ ἀπέχῃ ἄνισον ἀπὸ τῶν ἄκρων.



Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ μέσου αὐτῆς Γ κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΕΓΔ.

1. Τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου, οἷον τὸ Ζ, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β· διότι αἱ εὐθεῖαι ΖΑ καὶ ΖΒ εἶνε πλάγιαι ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῆς καθέτου ΖΓ· ἄρα εἶνε ἴσαι.

2. Πᾶν σημεῖον ἐκτὸς τῆς καθέτου κείμενον, ὡς τὸ Θ, ἀπέχει ἄνισον ἀπὸ τῶν ἄκρων Α καὶ Β· (ὀλιγώτερον δ' ἀπέχει ἀπὸ τοῦ ἄκρου, ὅπερ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου, πρὸς ὃ καὶ τὸ Θ). Διότι ἐκ τῶν εὐθειῶν ΘΑ, ΘΒ ἡ ἑτέρα τέμνει ἀναγκαίως (27) τὴν κάθετον ΕΓΔ εἴς τι σημεῖον Η· ἐὰν δὲ ἀχθῇ καὶ ἡ ΒΗ, ἔχομεν ἐκ τοῦ τριγώνου ΘΗΒ

$$ΘΒ < ΒΗ + ΗΘ$$

καὶ ἐὰν ἀντὶ τῆς ΒΗ θέσωμεν τὴν ἴσην αὐτῆς ΗΑ, εὑρίσκομεν $ΘΒ < ΑΗ + ΗΘ$, τουτέστι $ΘΒ < ΑΘ$· ὅ. ἔ. δ. 28

ΠΟΡΙΣΜΑ

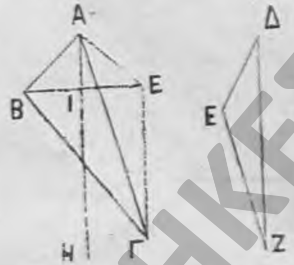
104. *Πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν ἄκρων εὐθείας κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ταύτης.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

105. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ περιεχομένας ὑπ' αὐτῶν γωνίας ἀνίσους, αἱ λοιπαὶ πλευραὶ θὰ εἶνε ἄνισοι καὶ μεγαλητέρα θὰ εἶνε ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας.*

Ἔστωσαν δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα $ΑΒ = ΔΕ$, $ΑΓ = ΔΖ$ καὶ $Α > Δ$· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε $ΒΓ > ΕΖ$.

Διότι, ἐὰν τεθῇ ἡ κορυφὴ Δ ἐπὶ τῆς Α καὶ ἡ πλευρὰ ΔΖ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΓ, τὸ δὲ τρίγωνον ΔΕΖ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ, ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ΒΑΕ θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς μεγαλητέρας γωνίας ΓΑΒ, θὰ εἶνε δὲ καὶ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΕ· διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶνε ἰσοσκελὲς (διότι ΑΒ=ΔΕ)· ἀλλὰ τὸ σημεῖον Γ κεῖται ἐκτὸς τῆς καθέτου ταύτης καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, ἔνθα καὶ τὸ Ε· ἄρα τὸ Γ ἀπέχει ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Ε ἄνισον καὶ εἶνε ΒΓ>ΕΓ, ἤτοι ΒΓ>ΕΖ.



Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τούτου εἶνε τὸ ἑξῆς.

106. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὰς δὲ λοιπὰς πλευρὰς ἀνίσους, αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν γωνίαι εἶνε ἄνισοι καὶ μεγαλητέρα θὰ εἶνε ἡ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας πλευρᾶς.*

Δεικνύεται δὲ εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΟΡΙΣΜΟΣ

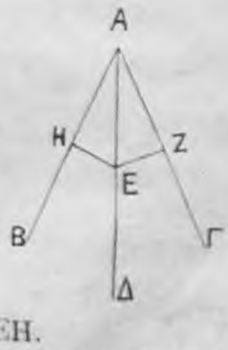
107. *Ἀπόστημα ἢ ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείας* λέγεται ἡ κάθετος, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν· λαμβάνεται δὲ ἡ κάθετος ὡς ἀπόστημα, διότι εἶνε μία· εἶνε δὲ καὶ ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν εὐθειῶν τῶν δυναμένων νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ σημείου εἰς τὴν εὐθεῖαν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

29 108. *Πᾶν σημεῖον τῆς διχοτομούσης γωνίαν εὐθείας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.*

Καὶ ἀντιστρόφως: *Πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ταύτην.*

Ἔστω γωνία ἡ ΒΑΓ καὶ εὐθεῖα διχοτομοῦσα αὐτὴν ἡ ΑΔ καὶ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς τὸ Ε· λέγω ὅτι τὸ Ε ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ, ἤτοι, ὅτι αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι κάθετοι ΕΗ, ΕΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἶνε ἴσαι.



Διότι τὰ τρίγωνα ΑΕΗ καὶ ΑΕΖ εἶνε ὀρθογώνια καὶ ἔχουσι τὴν ὑποτείνουσαν ΑΕ κοινὴν καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΗΑΕ ἴσην τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ ΖΑΕ· ἄρα εἶνε ἴσα (91) καὶ διὰ τοῦτο εἶνε ΕΖ=ΕΗ.

Ἀντιστρόφως, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Ε ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἤτοι, ὅτι αἱ ΕΖ, ΕΗ εἶνε ἴσαι, καὶ ἀχθῇ ἡ

ΑΕ, τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΕΗ καὶ ΑΕΖ θὰ εἶνε πάλιν ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ὑποτείνουσαν κοινὴν καὶ μίαν πλευρὰν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἴσην (τὴν ΕΗ ἴσην τῇ ΕΖ)· ἐπομένως θὰ εἶνε καὶ αἱ γωνίαι ΖΑΕ καὶ ΗΑΕ ἴσαι· τουτέστιν ἡ ΑΕ θὰ διχοτομῇ τὴν γωνίαν ΒΑΓ. 29

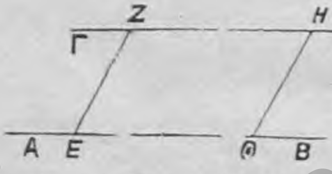
ΠΟΡΙΣΜΑ

109. *Ἐὰν αἱ ἀποστάσεις σημείου ἀπὸ τῶν πλευρῶν γωνίας εἶνε ἄνισοι, τὸ σημεῖον τοῦτο κεῖται ἐκτὸς τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν.*

ΠΕΡΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

30 110. *Παραλληλόγραμμον* λέγεται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε παράλληλοι.



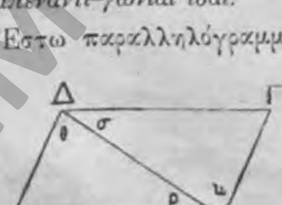
Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε παράλληλοι καὶ ἐπιζευχθῶσι δύο σημεῖα αὐτῶν τὰ τυχόντα, οἷον τὰ Ε,Ζ, διὰ τῆς εὐθείας ΕΖ, ἀχθῇ δὲ ἔπειτα ἔκ τινος σημείου τῆς ΑΒ, ἔστω ἐκ τοῦ Θ, παράλληλος τῇ ΕΖ, θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ κατά τι σημεῖον Η καὶ τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ θὰ εἶνε παραλληλόγραμμον.

Τραπέζιον λέγεται τὸ τετράπλευρον, οὗτινος δύο μόνον ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε παράλληλοι· τοιοῦτον εἶνε τὸ ΑΒΓΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

111. *Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι γωνίαι ἴσαι.*

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι εἶνε



ΑΒ=ΓΔ, ΑΔ=ΒΓ

καὶ Α=Γ, Β=Δ.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διαγώνιος ΒΔ, διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΔΒΓ· τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα, διότι ἔχουσι τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινήν, τὴν γωνίαν ρ ἴσην τῇ σ, ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΒ, καὶ τὰς γωνίας θ καὶ κ ἴσας δι' ὅμοιον λόγον· ἔχουσι λοιπὸν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας αὐτῇ γωνίας ἴσας· ἄρα εἶνε ἴσα· ἐντεῦθεν ἕπεται ΑΔ=ΒΓ καὶ ΑΒ=ΔΓ, ἔτι δὲ καὶ Α=Γ. Καὶ αἱ γωνίαι Β καὶ Δ εἶνε ἴσαι· διότι σύγκεινται ἐκ μερῶν ἴσων (ρ=σ καὶ θ=κ).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἰσότης τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε παράλληλοι καὶ τέμνονται ὑπὸ τῆς ΑΔ, ἔχομεν $Α+Δ=2^{ορθ.}$, δι' ὅμοιον λόγον ἔχομεν $Γ+Δ=2^{ορθ.}$

ὅθεν Α+Δ=Γ+Δ καὶ ἑπομένως Α=Γ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ Β=Δ.

Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ αἱ εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς εὑρισκόμεναι δύο γωνίαι εἶνε παραπληρωματικαί, συνάγεται, ὅτι *1) ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶνε γνωστή, καὶ αἱ λοιπαὶ εἶνε γνωσταί· καὶ 2) ἐὰν μία γωνία παραλληλογράμμου εἶνε ὀρθή, καὶ αἱ ἄλλαι θὰ εἶνε ὀρθαί.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

112. *Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἀγόμεναι κάθετοι εἶναι πᾶσαι ἴσαι.* Διότι αἱ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν κάθετοι εἶνε παράλληλοι· παράλληλοι δὲ μεταξὺ παραλλήλων εἶνε ἴσαι, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου. 104

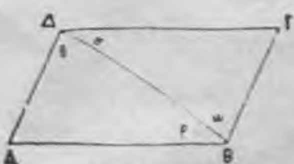
ΟΡΙΣΜΟΣ

Ἀπόστασις δύο παραλλήλων λέγεται μία τις τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται μεταξὺ αὐτῶν. 30

ΘΕΩΡΗΜΑ

31 113. *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας, ἢ τὰς ἀπέναντι γωνίας ἴσας, εἶνε παραλληλόγραμμον.*

1) Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ ἂς ὑποτεθῇ ΑΒ=ΔΓ καὶ ΑΔ=ΒΓ· λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶνε παραλληλόγραμμον.



Διότι ἡ διαγώνιος ΒΔ ἀγομένη χωρίζει τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα ἔχοντα τὰς τρεῖς αὐτῶν πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν καὶ διὰ τοῦτο ἴσα ἀλλήλοις· ἑπομένως αἱ γωνίαι θ καὶ κ, ὡς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν κείμεναι, εἶνε ἴσαι· ὁμοίως καὶ αἱ γωνίαι ρ καὶ σ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΔΓ καὶ ΑΒ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΔΒ σχηματίζουσι τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας ρ καὶ σ ἴσας, ἕπεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶνε παράλληλοι. Ὁμοίως διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν κ καὶ θ εἶνε παράλληλοι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶνε παραλληλόγραμμον.

2) Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ ἂς ὑποτεθῇ

$$Α=Γ \text{ καὶ } Β=Δ·$$

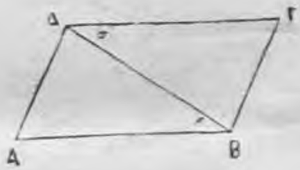
λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶνε παραλληλόγραμμον.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $Α+Β+Γ+Δ$ τῶν τεσσάρων γωνιῶν εἶνε τέσσαρες ὀρθαὶ καὶ $Α+Β$ ἰσοῦται τῷ $Γ+Δ$ (κατὰ τὰς προηγουμένας ἰσότητας), ἑκάτερον τῶν ἀθροισμάτων τούτων θὰ εἶνε 2 ὀρθαί· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΓΒ θὰ εἶνε παράλληλοι. Ὡσαύτως καὶ αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ εἶνε παράλληλοι· διότι καὶ $Α+Δ=Β+Γ=2^{ορθ.}$, ὥστε τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ θὰ εἶνε παραλληλόγραμμον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

114. *Πᾶν τετράπλευρον ἔχον δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους εἶνε παραλληλόγραμμον.*

Ἐν τῷ τετραπλεύρῳ ΑΒΓΔ ἔστω ἡ ΑΒ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΓΔ· λέγω, ὅτι τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶνε παραλληλόγραμμον.



Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ, εἰς ἃ ἡ διαγώνιος ΒΔ διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον, εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα τὴν ΒΔ κοινήν, τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΓΔ καὶ τὴν γωνίαν ρ ἴσην τῇ σ ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων συνάγεται, ὅτι ἡ ΑΔ εἶνε ἴση τῇ ΒΓ, ἔτι δὲ καὶ παράλληλος αὐτῇ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν ΑΔΒ καὶ ΔΒΓ. 31

ΘΕΩΡΗΜΑ

32 115. *Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.*

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι τὸ σημεῖον Ε, εἰς ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ, εἶνε τὸ μέσον ἀμφοτέρων.

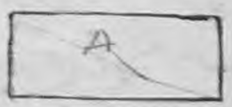
Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΔΕΓ ἔχουσι τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΔΓ (ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου), τὴν γωνίαν ρ ἴσην τῇ σ (ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ) καὶ τὴν γωνίαν τ ἴσην τῇ ο (δι' ὅμοιον λόγον)· ἄρα εἶνε ἴσα. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι εἶνε ΑΕ=ΕΓ καὶ ΔΕ=ΕΒ, τουτέστιν, ὅτι τὸ Ε εἶνε τὸ μέσον ἀμφοτέρων τῶν διαγωνίων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα: *πᾶν τετράπλευρον, οὗτινος αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα, εἶνε παραλληλόγραμμον* ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ τῶν τριγώνων.

ΟΡΙΣΜΟΙ

116. Ἐκ τῶν παραλληλογράμμων διακρίνομεν ἰδιαζόντως τὰ ἑπόμενα εἴδη.

Ὀρθογώνιον λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ ὀρθὰς πάσας τὰς γωνίας του. Α



Ῥόμβος λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ πάσας τὰς πλευρὰς του ἴσας. Β

Τετράγωνον δὲ λέγεται τὸ παραλληλόγραμμον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς πλευρὰς πάσας ἴσας καὶ τὰς γωνίας πάσας ὀρθάς. Τὸ τετράγωνον εἶνε ὀρθογώνιον ἰσόπλευρον, ἤτοι ὀρθογώνιον ἔχον ἴσας πάσας τὰς πλευράς, εἶνε δὲ καὶ ῥόμβος ἔχων ἴσας πάσας τὰς γωνίας.

117. Αἱ ἑπόμεναι προτάσεις ἀποδεικνύονται εὐκόλως τῇ βοηθείᾳ τῶν τριγώνων.

Τοῦ ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶνε ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως: *πᾶν παραλληλόγραμμον, ὅπερ ἔχει διαγωνίους ἴσας, εἶνε ὀρθογώνιον.*

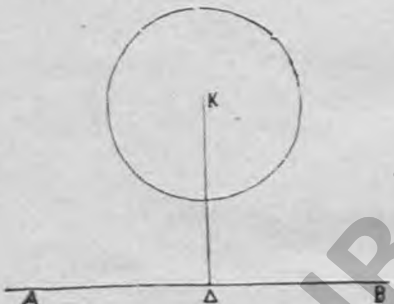
Τοῦ ῥόμβου αἱ διαγώνιοι τέμνονται πρὸς ὀρθὰς γωνίας καὶ ἀντιστρόφως· *πᾶν παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας, εἶνε ῥόμβος.*

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΚΥΚΛΟΥ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

Ἐπειδὴ εὐθεῖα καὶ περιφέρεια δὲν δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο (101), διὰ τοῦτο αἱ δυναταὶ θέσεις κύκλου πρὸς εὐθεῖαν εἶνε αἱ ἑξῆς τρεῖς: 1) Ἐὰν ὁ κύκλος καὶ ἡ εὐθεῖα δὲν ἔχωσι κανὲν κοινὸν σημεῖον. 2) Ἐὰν ἔχωσιν ἓν μόνον κοινόν, καὶ 3) Ἐὰν ἡ περιφέρεια καὶ ἡ εὐθεῖα ἔχωσι δύο σημεῖα κοινά.

ΘΕΩΡΗΜΑ

118. *Ἐὰν εὐθεῖα καὶ κύκλος δὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.*

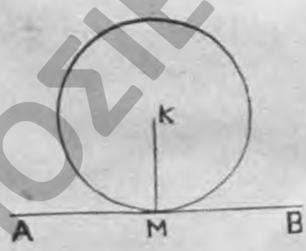


Διότι ὁ πούς Δ τοῦ ἀποστήματος τούτου θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (διότι ὅλη ἡ εὐθεῖα κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου), ἑπομένως τὸ ἀπόστημα ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

119. *Ἐὰν εὐθεῖα καὶ κύκλος ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶνε ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα.*

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα AB ἐγγίζει τὸν κύκλον μόνον εἰς τὸ σημεῖον M, τὰ λοιπὰ σημεῖα αὐτῆς εὑρίσκονται ἐκτὸς τοῦ κύκλου καὶ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου K περισσότερον τῆς ἀκτῖνος· ἑπομένως ἡ ἀκτὶς KM εἶνε ἡ ἐλαχίστη πασῶν τῶν εὐθειῶν, αἵτινες δύνανται νὰ ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ K εἰς τὴν εὐθεῖαν AB ἄρα ἡ KM εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν AB εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον M, καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ K ἀπὸ τῆς εὐθείας AB εἶνε ἡ ἀκτὶς KM.



ΘΕΩΡΗΜΑ

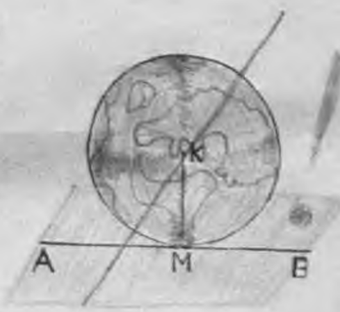
120. *Ἐὰν εὐθεῖα καὶ περιφέρεια ἔχωσι δύο κοινὰ σημεῖα, τὸ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχον μέρος τῆς εὐθείας κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου (χορδὴ ὃν τοῦ κύκλου), καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τῆς εὐθείας εἶνε μικρότερον τῆς ἀκτῖνος.*

Διότι αἱ ἀκτῖνες ΚΓ, ΚΔ, αἱ εἰς τὰ κοινὰ σημεῖα ἀγόμεναι, δὲν εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, διότι εἶνε ἴσαι· εἶνε λοιπὸν πλάγιαι καὶ ἡ κάθετος ΚΕ εἶνε μικροτέρα αὐτῶν· ὥστε ὁ πούς αὐτῆς Ε κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου· κεῖται δὲ εἰς τὸ μέσον τῆς ΓΔ, διότι αἱ πλάγιαι ΚΓ, ΚΔ εἶνε ἴσαι· ὥστε ἡ ΓΔ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

Παρατήρησις. Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τούτων ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Διὰ τοῦτο ἀρκούμεθα εἰς τὸ ἑπόμενον, ὅπερ ἀποδεικνύομεν ἀμέσως (ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι εὐθεῖα καὶ κύκλος δύνανται νὰ ἔχωσιν ἓν μόνον σημεῖον κοινόν).

121. *Ἐὰν τὸ ἀπόστημα εὐθείας ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἶνε ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ἤτοι, ἐὰν εὐθεῖα εἶνε κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἔχει μετὰ τῆς περιφερείας ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον (τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος).*

Διότι ὁ πούς Μ τοῦ ἀποστήματος ΚΜ, ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ὤν, θὰ εἶνε κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας· ἀλλὰ τὰ λοιπὰ σημεῖα τῆς εὐθείας θὰ κεῖνται πάντα ἐκτὸς τῆς περιφερείας, διότι αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου (ὡς πλάγιαι) εἶνε μεγαλήτεραι τῆς καθέτου ΚΜ, ἤτοι τῆς ἀκτῖνος.



ΟΡΙΣΜΟΣ

122. Ἐὰν εὐθεῖα καὶ κύκλος ἓν μόνον ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, ἡ εὐθεῖα λέγεται *ἐφαπτομένη* τοῦ κύκλου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

123. *Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς περιφερείας ὑπάρχει μία ἐφαπτομένη καὶ μόνον μία.*

Διότι, διὰ νὰ εἶνε εὐθεῖά τις ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Μ, πρέπει νὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΜ· μία δὲ μόνη ὑπάρχει κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΜ εἰς τὸ σημεῖον Μ.

ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΟΥΣ ΘΕΣΕΙΣ

Ἐν τῇ ἐρεύνῃ των θέσεων δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους δεχόμεθα τὸ ἑπόμενον ἀξίωμα.

124. *Πᾶσα γραμμὴ συνδέουσα δύο σημεῖα, ὧν τὸ μὲν κεῖται ἐντὸς κλειστοῦ σχήματος (οἷον κύκλου, τριγώνου καὶ τῶν τοιούτων), τὸ δὲ ἐκτός, τέμνει τὴν γραμμήν, ὑφ' ἧς τὸ σχῆμα περατοῦται.*

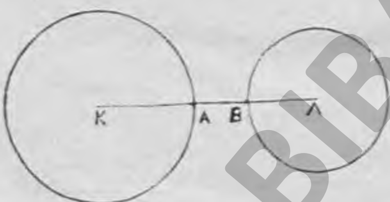
Διακρίνομεν δὲ τὰς ἑπομένας τρεῖς περιπτώσεις.

α΄) Περιφέρειαι οὐδὲν κοινὸν σημεῖον ἔχουσαι.

Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι ἢ εἶνε ὅλως ἐκτὸς ἀλλήλων, ἢ εἶνε ἡ μία ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

125. *Ἐὰν δύο περιφέρειαι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, μηδὲν ἔχουσαι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων αὐτῶν ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀκτίνων.*

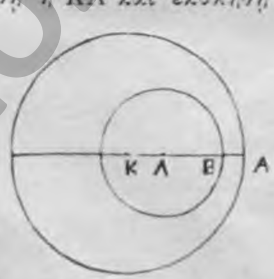


Διότι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ ἀποτελεῖται τότε ἐκ τῶν δύο ἀκτίνων ΚΑ, ΛΒ καὶ ἐκ τοῦ μεταξὺ τῶν δύο κύκλων μέρους ΑΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

126. *Ἐὰν ἐκ δύο περιφερειῶν ἡ μία κεῖται ὅλη ἐντὸς τῆς ἄλλης, μηδὲν ἔχουσα μετ' αὐτῆς κοινὸν σημεῖον, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶνε μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν ακ ίνων.*

Ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς μεγαλητέρας καὶ Λ τὸ τῆς μικροτέρας· ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΚΛ καὶ ἐκβληθῇ πέραν τοῦ Λ (ὅπερ κεῖται ἐντὸς ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν), θὰ συναντήσῃ πρώτην τὴν μικροτέραν περιφέρειαν κατά τι σημεῖον Β καὶ ἔπειτα τὴν μεγαλητέραν κατά τι ἄλλο Α· ἀλλὰ τότε, ἂν ἐκ τῆς μεγαλητέρας ἀκτῖνος ΚΑ ἀφαιρεθῇ ἡ μικροτέρα ΑΒ, μένει ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ καὶ ἡ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν εὐθεῖα ΑΒ· ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων ὑπερβαίνει τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὰ κέντρα Κ καὶ Λ συμπίπτωσιν, αἱ περιφέρειαι λέγονται *ὁμόκεντροι*.

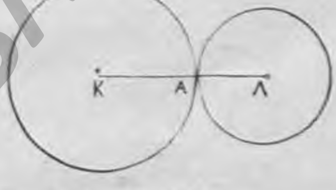
δ΄) Περιφέρειαι ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσαι.

Αἱ τοιαῦται περιφέρειαι λέγεται, ὅτι ἐφάπτονται ἀλλήλων εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον· δύνανται δὲ ἢ νὰ εἶνε ἐκτὸς ἀλλήλων (ὅτε ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐκτός), ἢ νὰ κεῖται ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης (ὅτε ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός).

ΘΕΩΡΗΜΑ

127. *Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶνε ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων.*

Ἔστω Α τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν· ἐὰν ἀχθῶσιν εἰς αὐτὸ αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΑ, λέγω, ὅτι ἡ γραμμὴ ΚΑΛ εἶνε εὐθεῖα γραμμή· διότι, ἂν ὑποτεθῇ τεθλασμένη, ἡ εὐθεῖα γραμμή, ἡ τὰ σημεῖα Κ,Λ συνδέουσα, ὡς μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Α, θὰ τέμνῃ τὰς περιφερείας εἰς ἄλλα σημεῖα καὶ διὰ τοῦτο θὰ σύγκειται ἐκ δύο ἀκτίνων καὶ ἔκ τινος μέρους κειμένου ἐκτὸς ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν· ἐπομένως θὰ εἶνε μεγαλητέρα τῆς τεθλασμένης ΚΑΛ, ὅπερ ἄτοπον (κατὰ τὸ 5ον ἀξίωμα τῆς εὐθείας)· ὥστε ἡ ΚΑΛ εἶνε εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἐπομένως ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ εἶνε ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΑΛ.

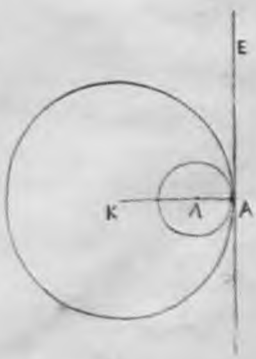


ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἀπὸ τοῦ Α ὑψουμένη κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΛ ἐφάπτεται ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν εἰς τὸ κοινὸν αὐτῶν σημεῖον Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

128. *Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν εἶνε ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων.*

Διότι, ἂν εἰς τὸ μόνον κοινὸν σημεῖον Α ἀχθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΑΕ τῆς μεγαλητέρας, θὰ ἐφάπτηται αὕτη καὶ τῆς μικροτέρας (ἥτις κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης)· ἐπομένως αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΑ θὰ εἶνε ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην ΑΕ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α καὶ διὰ τοῦτο θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· τούτου δὲ οὕτως ἔχοντος, ἂν ἀπὸ τῆς μεγαλητέρας ἀκτῖνος ΚΑ ἀφαιρεθῇ ἡ μικροτέρα ΛΑ, μένει προδήλως ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ.



γ') Περιφέρειαι δύο σημεῖα κοινὰ ἔχουσαι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

129. *Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἔχωσι κοινὰ δύο σημεῖα,*

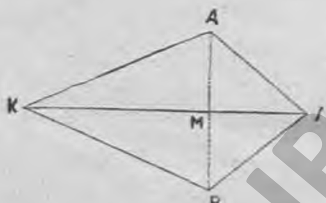
1) ἡ ταῦτα συνδέουσα εὐθεῖα τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων,

2) αἱ τοιαῦται περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχωσιν ἄλλο σημεῖον κοινόν,

3) ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων εἶνε μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλητέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν,

4) αἱ τοιαῦται περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας.

1. Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο κοινὰ σημεῖα δύο περιφερειῶν ἐχουσῶν κέντρα τὰ Κ καὶ Λ· ἐπειδὴ τὰ σημεῖα ταῦτα, Α καὶ Β, ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ Κ, ἕπεται (104), ὅτι τὸ Κ θὰ εἶνε σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ἀλλὰ καὶ τὸ Λ θὰ εἶνε σημεῖον τῆς αὐτῆς καθέτου· διότι καὶ τοῦτο ἴσον ἀπέχει ἀπὸ τῶν Α καὶ Β· διὰ δὲ τῶν δύο σημείων Κ καὶ Λ δὲν διέρχεται ἄλλη εὐθεῖα πλὴν τῆς ΚΛ· ὥστε ἡ εὐθεῖα ΚΛ εἶνε ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



2. Ἄλλο κοινὸν σημεῖον τῶν αὐτῶν περιφερειῶν δὲν ὑπάρχει, διότι, ἂν ὑπῆρχε καὶ ἄλλο, ἔστω τὸ Γ, τοῦτο θὰ ἔκειτο ἢ ἐπὶ τῆς ΑΒ, ἢ ἐκτὸς αὐτῆς· καὶ ἂν μὲν ἔκειτο ἐπὶ τῆς ΑΒ, θὰ ἔτεμνεν ἡ εὐθεῖα ΑΒ τὰς περιφερείας εἰς τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ὅπερ ἄτοπον (101)· ἂν δὲ ἔκειτο τὸ Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ, ἡ ΚΛ θὰ ἦτο, κατὰ τὰ προαποδειχθέντα, κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ, εἶνε δὲ κάθετος καὶ εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ· ὥστε ἐκ τοῦ Α θὰ ἦσαν δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΛ, ὅπερ καὶ τοῦτο ἄτοπον· ὥστε οὐδὲν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ὑπάρχει.

3. Ἐὰν εἰς τὸ ἓν ἐκ τῶν κοινῶν σημείων, ἔστω εἰς τὸ Α, ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΑ, γίνεται τρίγωνον τὸ ΚΑΛ, ἐξ οὗ ἀμέσως συνάγεται, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων ΚΛ (ἡ μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου) εἶνε μικροτέρα μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων (τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν), μεγαλητέρα δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.

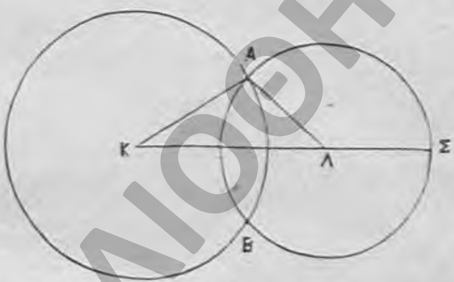
4. Αἱ δύο κοινὰ σημεῖα ἔχουσαι περιφέρειαι τέμνουσιν ἀλλήλας, τουτέστιν ἓν μέρος ἑκατέρας κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης καὶ ἓν μέρος ἐκτὸς (ὡς δεικνύει τὸ ἑπόμενον σχῆμα).

Διότι ἡ περιφέρεια Λ δὲν δύναται νὰ κεῖται ὅλη ἐκτὸς τῆς ἄλλης· διότι ἡ ΑΒ, ὡς κοινὴ χορδή, κεῖται ἐντὸς ἀμφοτέρων τῶν περιφερειῶν· ἀλλ' οὐδὲ ὅλη ἡ Λ δύναται νὰ εἶνε ἐντὸς τῆς ἄλλης· διότι τὸ σημεῖον Σ, εἰς ὃ τέμνεται ὑπὸ τῆς ΚΛ ἐκβληθείσης πέραν τοῦ Λ, κεῖται ἐκτὸς τῆς ἄλλης, ὡς ἀπέχον ἀπὸ τοῦ κέντρου Κ ἀπόστασιν $ΚΛ+ΛΣ$ μεγαλητέραν τῆς ἀκτῖνος ΚΑ· τῷ ὄντι ἐκ τῆς ἀνισότητος

$$ΚΛ > ΚΑ - ΛΑ,$$

ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ ἄνισα προστεθῇ ἡ ΛΑ ἢ ἡ ΛΣ, προκύπτει

$$ΚΛ + ΛΣ > ΚΑ·$$



μέρος ἄρα τῆς περιφερείας Λ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας Κ καὶ μέρος ἐκτός.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθησαν τὰ κέντρα Κ καὶ Λ εἰς διάφορα σημεῖα· ἐὰν ταῦτα συμπίπτωσιν, ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι ἔχουσι κοινὰ σημεῖα, αἱ ἀκτῖνες θὰ εἶνε ἴσαι· ἐπομένως καὶ αἱ περιφέρειαι συμπίπτουσιν εἰς μίαν.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

130. Αἱ διάφοροι θέσεις δύο περιφερειῶν πρὸς ἀλλήλας (ἐὰν μὴ ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελῶσι μίαν μόνην) εἶνε αἱ ἑξῆς πέντε·

1) Ὅλως ἐκτὸς ἀλλήλων·	τότε	$ΚΛ > ΚΑ + ΛΒ$.
2) Ὅλως ἐντὸς ἡ μία τῆς ἄλλης·	»	$ΚΛ < ΚΑ - ΛΒ$.
3) Ἐπαφὴ ἐκτός·	»	$ΚΛ = ΚΑ + ΛΑ$.
4) Ἐπαφὴ ἐντός·	»	$ΚΛ = ΚΑ - ΛΑ$.
5) Τομὴ εἰς δύο σημεῖα	»	$ΚΛ < ΚΑ + ΛΑ$. $ΚΛ > ΚΑ - ΛΑ$.

Δὲν δύνανται δὲ νὰ ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τούτων ἀληθεύουσι καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἐὰν παραδείγματος χάριν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων δύο περιφερειῶν εἶνε μικρότερον μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλήτερον δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, αἱ περιφέρειαι αὗται θὰ τέμνωνται εἰς δύο σημεῖα· διότι οὐδεμίαν ἄλλην θέσιν δύνανται νὰ ἔχωσι πρὸς ἀλλήλας· διότι εἰς πᾶσαν ἄλλην θέσιν αἱ ἀκτῖνες καὶ τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων συνδέονται διὰ σχέσεως μὴ συμβιβαζομένης πρὸς τὰς εἰρημένας.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΧΟΡΔΩΝ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

131. *Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου εἰς τὸ μέσον χορδῆς ἠγμένη εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν καὶ διέρχεται καὶ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑποτίθεται, ὅτι ἡ χορδὴ δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου, ἤτοι, ὅτι δὲν εἶνε διάμετρος.

Διότι, ἂν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ εἰς τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς ΑΒ, γίνεται τρίγωνον ἰσοσκελές, τὸ ΑΟΒ, ἐκ τῆς κορυφῆς τοῦ ὁποίου ἤχθη ἡ εὐθεῖα ΟΓ εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως· ἄρα ἡ ΟΓ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ διαιρεῖ καὶ τὴν γωνίαν ΑΟΒ εἰς δύο ἴσα μέρη (84).

Καὶ τὰ δύο τόξα ΑΔ, ΔΒ (εἰς τὰ ὁποῖα προσεκβαλλομένη ἡ ΟΓ διαιρεῖ τὸ τόξον ΑΒ) εἶνε ἴσα· διότι αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι ΑΟΔ, ΔΟΒ εἶνε ἴσαι (37).

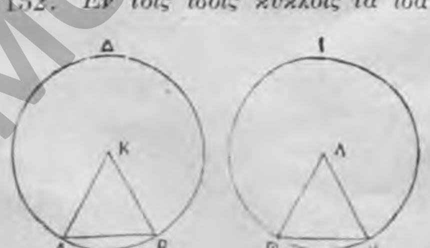
Παρατήρησις. Ἡ εὐθεῖα ΟΔ ἐκτελεῖ τὰ ἑξῆς τέσσαρα·

1) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου,
2) διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς,
3) εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν χορδήν,
4) διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη.

Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως, ὅτι οὐδεμία ἄλλη εὐθεῖα ἐκτελεῖ δύο ἐκ τούτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

132. *Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· καὶ ἀντιστρόφως: αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουσιν ἴσα τόξα* (εἴτε μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας εἶνε τὰ τόξα, εἴτε μεγαλήτερα).



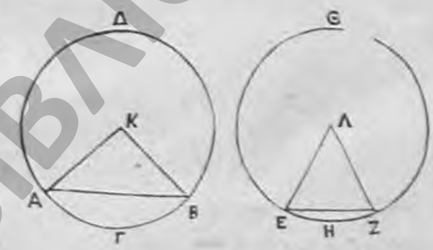
Τὰ ἴσα τόξα ἔχουσιν ἴσας χορδάς· διότι ἐφαρμοζόντων τῶν ἴσων τόξων, ἐφαρμόζουσι καὶ τὰ ἄκρα αὐτῶν, ἑπομένως ἐφαρμόζουσι καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν (διότι ἐξ ἑνὸς σημείου εἰς ἄλλο μία μόνη εὐθεῖα ἄγεται).

Καὶ ἀντιστρόφως· αἱ ἴσαι χορδαὶ ἔχουσιν ἴσα τόξα· διότι, ἂν αἱ χορδαὶ ΑΒ καὶ ΘΗ ὑποτεθῶσιν ἴσαι καὶ ἀχθῶσιν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΛΘ, ΛΗ, γίνονται δύο τρίγωνα, ΚΑΒ, ΛΘΗ, ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν· ἑπομένως ἐφαρμόζουσιν. Ὅταν δὲ τὰ τρίγωνα ἐφαρμόσωσιν, ἐφαρμόζουσι καὶ οἱ κύκλοι (διότι συμπίπτουσι τὰ κέντρα αὐτῶν)· καὶ τὸ μὲν τόξον ΘΖΗ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΑΓΒ, τὸ δὲ ΘΙΗ ἐπὶ τοῦ ΑΔΒ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

133. *Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις τὸ μεγαλήτερον τόξον ἔχει μεγαλητέραν χορδὴν καὶ τὸ μικρότερον μικροτέραν, ἐὰν τὰ τόξα δὲν ὑπερβαίνωσι τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας.*

Ἔστωσαν ἴσοι οἱ κύκλοι ΑΓΒΔΑ καὶ ΕΗΖΘΕ· ἔστω δὲ καὶ τὸ τόξον ΑΓΒ μεγαλήτερον τοῦ τόξου ΕΗΖ· λέγω, ὅτι ἡ χορδὴ ΑΒ εἶνε μεγαλητέρα τῆς ΕΒ.



Ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ, ΛΕ, ΛΖ, γίνονται τὰ δύο τρίγωνα ΚΑΒ, ΛΕΖ, τὰ ὁποῖα ἔχουσι τὴν ΚΑ ἴσην τῇ ΛΕ καὶ τὴν ΚΒ ἴσην τῇ ΛΖ (ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων) καὶ τὴν γωνίαν Κ μεγαλητέραν τῆς Λ· διότι ἡ Κ βαίνει ἐπὶ μεγαλητέρου τόξου· ἄρα (105) ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶνε μεγαλητέρα τῆς ΕΖ.

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, ὅτι δηλαδὴ *ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ἡ μεγαλητέρα χορδὴ ἔχει μεγαλήτερον τόξον, ἐὰν λαμβάνωνται τὰ μὴ ὑπερβαίνοντα τὴν ἡμιπεριφέρειαν τόξα*, ἀποδεικνύεται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

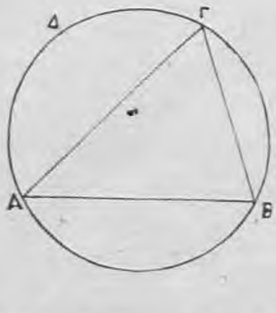
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅτι ἐκ τῶν χορδῶν μεγίστη εἶνε ἡ διάμετρος, ἀποδεικνύεται ἀμέσως ἁπλούστατα.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΙΣ ΚΥΚΛΟΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

134. Γωνία λέγεται *ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον*, ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς εἶνε χορδαὶ τοῦ κύκλου.

Εἰς τμῆμα δὲ ἐγγεγραμμένη λέγεται ἡ γωνία, ἐὰν ἡ μὲν κορυφὴ αὐτῆς κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ τμήματος, αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῆς διέρχωνται διὰ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας, ἥτις εἶνε βάσις τοῦ τμήματος.



Παραδείγματος χάριν, ἡ γωνία ΑΓΒ εἶνε ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον, ἡ αὐτὴ δὲ γωνία εἶνε ἐγγεγραμμένη καὶ εἰς τὸ τμῆμα ΑΒΓΔΑ.

Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται *ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον*, ἐὰν πᾶσαι αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Ὁ δὲ κύκλος λέγεται τότε *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ σχῆμα.

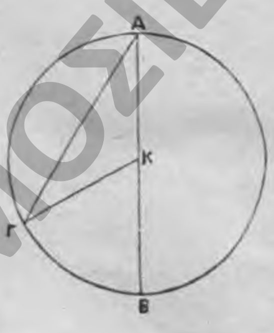
Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται *περιγεγραμμένον* περὶ κύκλον, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ εἶνε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου· ὁ δὲ κύκλος λέγεται *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ σχῆμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

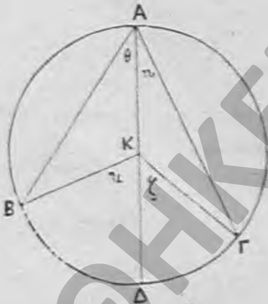
135. *Ἐν κύκλῳ ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶνε διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης, ὅταν ἔχωσιν ἀμφότεραι βάσιν τὸ αὐτὸ τόξον.*

Ἐπειδὴ τὸ κέντρον δύναται νὰ εἶνε ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας, ἢ ἐντὸς αὐτῆς, ἢ ἐκτὸς αὐτῆς, διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις.

Ἔστω πρότερον τὸ κέντρον ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ΑΒ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ· ἐὰν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΚΓ, γίνεται γωνία ἐπίκεντρος ἡ ΒΚΓ· βάσιν ἔχουσα τὸ αὐτὸ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη τόξον ΒΓ· εἶνε δὲ ἡ γωνία ΒΚΓ, ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ τριγώνου ΑΚΓ, ἴση τῷ ἀθροίσματι Α + Γ τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν Α καὶ Γ, καὶ ἐπειδὴ εἶνε Α = Γ (διότι τὸ τρίγωνον εἶνε ἰσοσκελές), ἡ ἐκτὸς γωνία ΒΚΓ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι Α + Α, ἤτοι εἶνε διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης Α.



Ἔστω δεύτερον τὸ κέντρον ἐντὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ· ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΒ, ΚΓ, γίνεται ἐπίκεντρος γωνία ἡ ΒΚΓ, βάσιν ἔχουσα τὸ αὐτὸ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη τόξον ΒΓ· ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης ἡ διάμετρος ΑΚΔ, διαιρεῖ τὴν ἐγγεγραμμένην εἰς δύο ἄλλας, θ καὶ η, καὶ τὴν ἐπίκεντρον ὁμοίως εἰς δύο, κ καὶ ζ· εἶνε δὲ κατὰ τὰ προηγούμενα (διότι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι ΒΑΔ, ΔΑΓ ἔχουσι τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῶν ΑΔ)

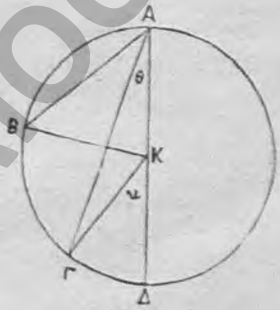


$$κ = 2θ,\ ζ = 2η,$$

ὅθεν $κ + ζ = 2θ + 2η = 2\,(θ + η)$,

τουτέστι ΒΚΓ=2.ΒΑΓ.

Ἔστω τέλος τὸ κέντρον ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΒΑΓ· τῶν αὐτῶν κατασκευασθέντων, εἶνε καὶ πάλιν



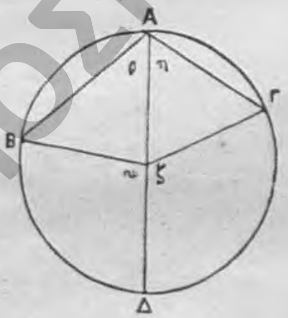
ΒΚΔ=2. ΒΑΔ, $κ = 2θ$·

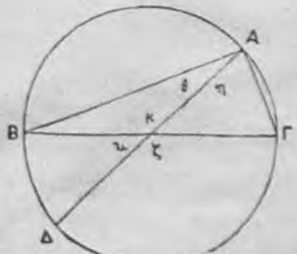
ὅθεν, ἀφαιροῦντες ἴσα ἀπὸ ἴσων, εὑρίσκομεν

ΒΚΓ=2.ΒΑΓ.

Ὥστε ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶνε πάντοτε διπλασία τῆς ἐγγεγραμμένης, ἐὰν βαίνωσιν ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἐπίκεντρος γωνία θὰ εἶνε κυρτή, ἐὰν τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει, ὑπερβαίνῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν· ἀλλ' ἡ ἀπόδειξις κατ' οὐδὲν μεταβάλλεται. Ὁμοίως εὐοδοῦται ἡ ἀπόδειξις, καὶ ὅταν τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει ἡ ἐγγεγραμμένη, εἶνε ἥμισυ τῆς περιφερείας, ἂν καὶ τότε αἱ ἀκτῖνες ΚΒ, ΚΓ δὲν σχηματίζουσι γωνίαν,

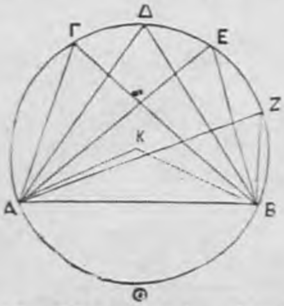




ἀλλ' ἀποτελοῦσι μίαν διάμετρον, ὡς δεικνύει τὸ παρακείμενον σχῆμα· εἶνε δὲ τότε ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ὀρθή· διότι εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος $κ + ζ$, ἤτοι τῶν δύο ὀρθῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

136. *Πᾶσαι αἱ εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἶνε ἴσαι ἀλλήλαις.*



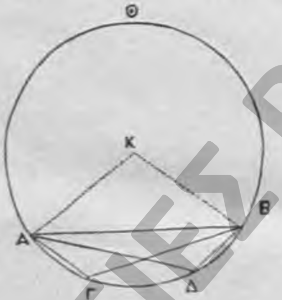
Διότι πᾶσαι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου (ἐκείνου, ὅπερ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τμήματος) καὶ εἶνε διὰ τοῦτο ἡμίση μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἐπικέντρου γωνίας.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

137. *Πᾶσα γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μεγαλήτερον ἡμικυκλίου,* οἷον τὸ ΑΓΔΕΖΒΑ, *εἶνε ὀξεῖα.*

Διότι εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΚΒ, ἥτις εἶνε μικροτέρα τῶν δύο ὀρθῶν.

Πᾶσα δὲ γωνία ἐγγεγραμμένη εἰς τμῆμα κύκλου μικρότερον ἡμικυκλίου, οἷον τὸ ΑΒΔΓΑ, *εἶνε ἀμβλεῖα.*



Διότι εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς κυρτῆς ἐπικέντρου γωνίας ΑΚΒ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεγαλητέρου τῆς ἡμιπεριφερείας τόξου ΑΘΒ καὶ ἥτις εἶνε διὰ τοῦτο μεγαλητέρα τῶν δύο ὀρθῶν.

Πᾶσα δὲ εἰς ἡμικύκλιον ἐγγεγραμμένη γωνία εἶνε ὀρθή. (*)

Διότι τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει, εἶνε ἥμισυ τῆς περιφερείας. (Ἰδὲ ὄπισθεν, Σημ.)

ΘΕΩΡΗΜΑ

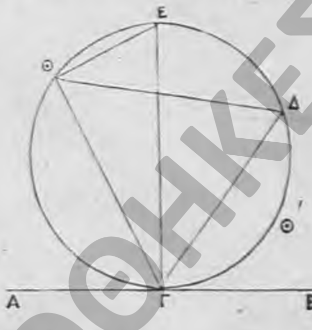
138. *Ἐν κύκλῳ ἡ ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης σχηματιζομένη γωνία εἶνε ἴση μὲ ἐγγεγραμμένην, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου.*

Ἔστω ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΓΔΕ κατὰ τὸ σημεῖον Γ ἡ ΑΓΒ καὶ χορδὴ διὰ τῆς ἐπαφῆς ἠγμένη ἡ ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ μὲν γωνία ΔΓΒ ἰσοῦται ἐγγεγραμμένῃ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘΔ, ἡ δὲ γωνία ΔΓΑ ἰσοῦται ἐγγεγραμμένῃ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΘΓ.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ διάμετρος ΓΕ, ἡ γωνία ΔΒΓ εἶνε διαφορὰ τῆς ὀρθῆς ΕΓΒ καὶ τῆς ὀξείας ΕΓΔ· καὶ ἡ μὲν ὀρθὴ ΕΓΒ ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμ-

(*) Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδίδεται εἰς τὸν Θαλῆν, ἕνα τῶν ἑπτὰ σοφῶν τῆς Ἑλλάδος (640 π.Χ.)

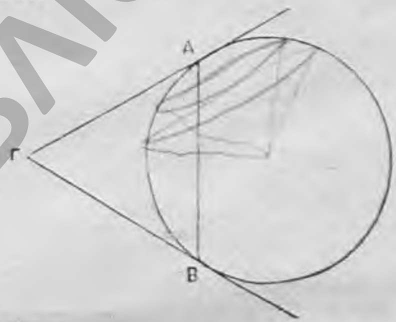
μένην βαίνουσαν ἐπὶ ἡμικυκλίου, ἔστω τὴν ΕΘΓ (ἔνθα Θ εἶνε τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΓΘΕ), ἡ δὲ γωνία ΕΓΔ ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμμένην βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΔΕ, οἵα εἶνε ἡ ΕΘΔ (διότι ἀμφότεραι εἶνε ἡμίση τῆς ἐπικέντρου, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΔΕ)· ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν ΔΓΒ ἰσοῦται τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ ΔΘΓ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘ΄Δ.



Ὁμοίως δεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῆς γωνίας ΑΓΔ, ἥτις εἶνε ἄθροισμα τῆς ὀρθῆς ΑΓΕ καὶ τῆς ὀξείας ΕΓΔ· τὸ σημεῖον Θ λαμβάνεται τότε ἐπὶ τοῦ τόξου ΓΘ΄Δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

139. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται τοῦ κύκλου, ἡ τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς συνδέουσα εὐθεῖα σχηματίζει μετὰ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἴσας γωνίας.*

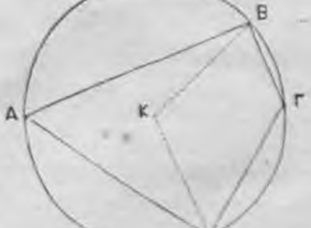


Καὶ τὰ τμήματα τῶν ἐφαπτομένων, τὰ ἀπὸ τῆς τομῆς αὐτῶν μέχρι τῶν ἐπαφῶν, θὰ εἶνε ἴσα (82).

ΘΕΩΡΗΜΑ

140. *Παντὸς εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶνε δύο ὀρθαί.*

Ἔστω τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον τὸ ΑΒΓΔ. Ἂν ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ κέντρου αἱ ΚΒ, ΚΔ, ἡ μὲν γωνία Α εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου ΒΚΔ (διότι ἀμφότεραι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓΔ), ἡ δὲ γωνία Γ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου κυρτῆς γωνίας ΒΚΔ (διότι ἀμφότεραι βαίνουσιν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΑΔ), ἄρα τὸ ἄθροισμα Α + Γ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο περὶ τὸ Κ γωνιῶν, αἵτινες ἀποτελοῦσι τέσσαρας ὀρθάς· ἐπομένως εἶνε Α + Γ = 2 ὀρθ.



Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι καὶ Β + Δ = 2 ὀρθ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

141. *Πρόβλημα* λέγεται πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται νὰ γίνῃ τι.

Εἰς πᾶν πρόβλημα διακρίνομεν δεδομένα καὶ ζητούμενα.

Λύσις τοῦ προβλήματος λέγεται ἡ ποίησις τοῦ ζητουμένου.

Ἐν τοῖς ἑπομένοις προβλήμασιν ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὰς ἑξῆς δύο ἐργασίας.

α΄) Νὰ γραφῇ εὐθεῖα, ἧστινος ἔχομεν δύο σημεῖα καὶ νὰ προσεκβληθῇ ἐφ' ὅσον θέλωμεν.

Ἡ ἐργασία αὕτη ἐκτελεῖται διὰ τοῦ κανόνος καὶ τῆς γραφίδος (*).

β΄) Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἧστινος ἔχομεν τὸ κέντρον καὶ τὴν ἀκτῖνα.

Ἡ ἐργασία αὕτη ἐκτελεῖται διὰ τοῦ διαβήτου (**).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον

142. *Δοθείσης εὐθείας νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον καὶ ἡ εἰς αὐτὸ κάθετος.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτῆς καὶ νὰ ἀχθῇ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Κατασκευή. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου καὶ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτήν, ἑτέρα περιφέρεια. Αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται (διότι ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἄλλης)· ἐὰν δὲ αἱ δύο τομαὶ Γ καὶ Δ

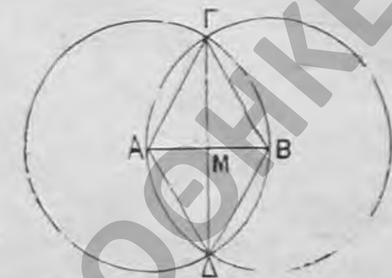
(*) Ὁ ἀκριβὴς κανὼν πρέπει νὰ ἔχῃ τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ εὐθυγράμμους· ἐξελέγχεται δὲ τοῦτο ὡς ἑξῆς· γράφομεν γραμμήν τινα ἐπὶ τοῦ χάρτου διὰ λεπτῆς γραφίδος παρακολουθούσης τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος, ἔπειτα περιστρέφομεν τὸν κανόνα ἐπὶ τοῦ χάρτου οὕτως, ὥστε ἡ ἐπὶ τοῦ χάρτου ἐφαρμόζουσα ἐπιφάνειά του νὰ ἐφαρμόζῃ πάντοτε, να ἔλθῃ ὅμως εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς γραμμῆς καὶ νὰ διέλθῃ ἡ ἀκμή, τὴν ὁποίαν δοκιμάζομεν, διὰ τῶν ἄκρων τῆς γραμμῆς· τότε γράφομεν πάλιν διὰ λεπτῆς γραφίδος γραμμὴν παρακολουθοῦντες τὴν ἀκμὴν τοῦ κανόνος· ἐὰν αἱ δύο οὕτω γραφεῖσαι γραμμαί, αἵτινες ἔχουσι τὰ αὐτὰ πέρατα, δὲν συμπίπτωσιν ἐντελῶς, ὁ κανὼν δὲν εἶνε εὐθύγραμμος.

Πρὸς τούτοις, ὅσον ἀφορᾷ εἰς τὴν χρῆσιν τοῦ κανόνος, παρατηροῦμεν, ὅτι, ὅταν εὐθεῖά τις προσδιορίζηται διὰ δύο σημείων αὐτῆς, τὰ σημεῖα ταῦτα δὲν πρέπει νὰ εἶνε πολὺ πλησίον· διότι μικρόν τι λάθος, εἰς τὴν θέσιν τοῦ κανόνος συμβαῖνον, φέρει τότε μεγάλην ἀλλοίωσιν εἰς τὴν θέσιν τῆς εὐθείας.

(**) Περὶ τοῦ διαβήτου καὶ τῆς χρήσεως αὐτοῦ ἴδε μικράν μου γεωμετρίαν.

ἐπιζευχθῶσι διὰ τῆς ΓΔ, λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ διαιρεῖ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο ἴσα μέρη, ΑΜ, ΜΒ, καὶ εἶνε κάθετος πρὸς αὐτήν.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Τὸ σημεῖον Γ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς εὐθείας ΑΒ· ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ σημεῖον Δ (διότι ἐκ τῆς κατασκευῆς αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ, ΔΒ εἶνε ἴσαι), διὰ τοῦτο ἀμφότερα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (104)· ἀλλ' ἡ μόνη εὐθεῖα, ἥτις ἔχει ἀμφότερα τὰ σημεῖα ταῦτα Γ, Δ, εἶνε ἡ δι' αὐτῶν διερχομένη ΓΔ· ἄρα ἡ ΓΔ εἶνε ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.



Τὸ αὐτὸ ἀποδεικνύομεν καὶ παρατηροῦντες, ὅτι τὸ σχῆμα ΑΓΒΔ εἶνε ῥόμβος, τοῦ δὲ ῥόμβου αἱ διαγώνιοι τέμνονται πρὸς ὀρθάς.

Παρατήρησις. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς κατασκευάζεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον τὰς πλευρὰς ἴσας τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ.

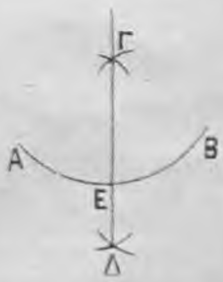
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο γραφομένων περιφερειῶν δὲν εἶνε ἀνάγκη νὰ εἶνε ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ· ἀρκεῖ νὰ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι αἱ τομαὶ αὐτῶν, Γ, Δ, θὰ ἀπέχωσι πάντοτε ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΑΒ· ἑπομένως ἡ ΓΔ θὰ εἶνε ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον

143. *Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τόξον ἢ δοθεῖσα γωνία εἰς δύο μέρη ἴσα.*

Ἔστω τὸ δοθὲν τόξον τὸ ΑΒ· ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον αὐτοῦ.

ΛΥΣΙΣ. Διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ προηγουμένου προβλήματος εὑρίσκομεν τὴν κάθετον ΓΔ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ· ἡ δὲ κάθετος αὕτη ΓΔ διαιρεῖ τὸ τόξον εἰς δύο ἴσα μέρη (131).



Ἔστω δεύτερον ἡ δοθεῖσα γωνία ἡ ΒΑΓ· πρόκειται νὰ διαιρεθῇ αὕτη εἰς δύο ἴσα μέρη.

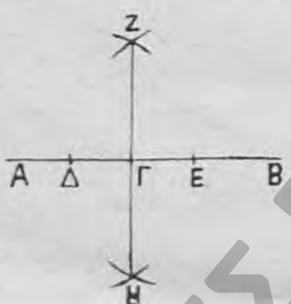
ΛΥΣΙΣ. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γράφομεν περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τόξον τι, ἔστω τὸ ΒΓ, περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας· ἔπειτα εὑρίσκομεν (διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ πρώτου προβλήματος) τὴν κάθετον ΑΔ εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ (τῆς ὁποίας καθέτου ἔχομεν ἓν σημεῖον, τὸ Α)· αὕτη

δὲ ἡ κάθετος θὰ διαιρέσῃ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἰς δύο μέρη ἴσα ΒΑΔ, ΔΑΓ· διότι διαιρεῖ τὸ τόξον ΒΓ εἰς δύο ἴσα μέρη ΒΕ, ΕΓ, αἱ δὲ ἐπὶ ἴσων τόξων βαίνουσαι ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν αὐτὴν κατασκευὴν ἐφ' ἑκάστου τῶν μερῶν, διαιροῦμεν τὸ τόξον καὶ τὴν γωνίαν εἰς 4 ἴσα μέρη, ἔπειτα εἰς 8, 16 κτλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3ον

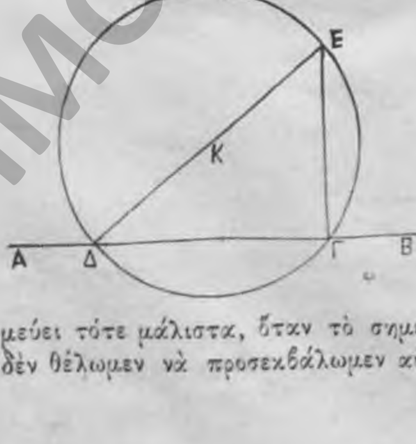
144. *Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπ' αὐτήν*



Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ σημεῖον αὐτῆς τὸ Γ· πρόκειται ἐκ τοῦ Γ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν ἂς γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἐὰν νῦν κατὰ τὸ πρῶτον πρόβλημα ἀχθῇ ἡ κάθετος ΖΗ εἰς τὸ μέσον τῆς ΔΕ (ὅπερ εἶνε τὸ Γ), αὕτη θὰ εἶνε ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον αὐτῆς Γ.

Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς. Μὲ κέντρον οἱονδήποτε σημεῖον Κ, ἐκτὸς τῆς εὐθείας κείμενον, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις νὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν καὶ εἰς ἄλλο τι σημεῖον Δ (πλὴν τοῦ Γ)· ἔπειτα ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΚ καὶ προσεκβάλλομεν αὐτήν, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἴς τι σημεῖον Ε· ἄγομεν τέλος τὴν ΕΓ καὶ αὕτη θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος. Διότι ἡ γωνία ΔΓΕ, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον, εἶνε ὀρθή. Ἡ κατασκευὴ αὕτη χρησιμεύει τότε μάλιστα, ὅταν τὸ σημεῖον Γ εἶνε τὸ ἄκρον τῆς εὐθείας καὶ δὲν θέλωμεν νὰ προσεκβάλωμεν αὐτήν.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται πρακτικῶς δι' ὀργάνου, τὸ ὁποῖον λέγεται *γνώμων*· εἶνε δὲ τοῦτο σανὶς λεπτή, σχῆμα ἔχουσα ὀρθογωνίου τριγώνου. Ὅταν θέλωμεν διὰ τοῦ ὀργάνου τούτου νὰ εὕρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον αὐτῆς Γ, ἐφαρμόζομεν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ, θέτοντες τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἰς τὸ Γ· τότε δὲ μεταχειριζόμενοι τὴν ἑτέραν κάθετον πλευρὰν ὡς κανόνα γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν κάθετον ΓΖ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4ον

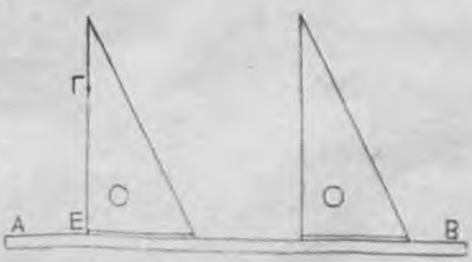
145. *Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἐφ' ὅσον θέλωμεν αὐξηθεῖσαν, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἀπὸ σημείου, ὅπερ δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· τὸ δὲ ἐκτὸς αὐτῆς δοθὲν σημεῖον, τὸ Γ· ζητεῖται ἐκ τοῦ Γ νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ (αὐξηθεῖσαν, ἐὰν εἶνε ἀνάγκη).

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ Δ, κείμενον πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς εὐθείας ἢ τὸ Γ καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΓΔ ἂς γραφῇ περιφέρεια· ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (αὐξηθεῖσαν, ἐὰν εἶνε ἀνάγκη) εἰς δύο σημεῖα Ε, Ζ· διότι ἡ ΑΒ τέμνει τὴν ἀκτῖνα ΓΔ (ὅταν δὲ εὐθεῖα τέμνῃ μίαν ἀκτῖνα, τέμνει προφανῶς καὶ τὴν περιφέρειαν). Ἐὰν νῦν εὑρεθῇ διὰ τῆς κατασκευῆς τοῦ πρώτου προβλήματος ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ, αὕτη θὰ εἶνε ἡ ἐκ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ κάθετος.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, ὡς κάθετος εἰς τὸ μέσον χορδῆς, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου (131).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Διὰ τοῦ γνώμονος λύεται τὸ πρόβλημα τοῦτο ὡς ἑξῆς. Ἐὰν πρόκειται νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ ἀπὸ σημείου ἐκτὸς αὐτῆς κειμένου, ἔστω ἀπὸ τοῦ Γ, ἐφαρμόζομεν πάλιν ἐπὶ τῆς ΑΒ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος καὶ προσαρμόζομεν εἰς αὐτὴν τὸν κανόνα, ἔπειτα, διατηροῦντες τὸν κανόνα ἀκίνητον,

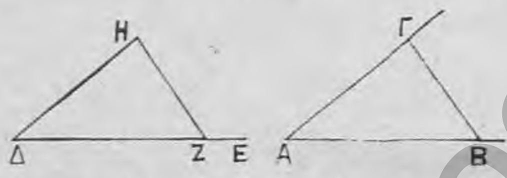


σύρομεν τὸν γνώμονα ἐπ' αὐτοῦ, μέχρις οὗ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Γ, ὅτε γράφομεν τὴν κάθετον ΓΕ, ὡς ἀνωτέρω ἐρρέθη (*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5ον

146. *Νὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ καὶ ἔχουσα πλευρὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, κορυφὴν δὲ τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ἡ ΒΑΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΔΕ· πρόκειται νὰ σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ ΒΑΓ ἔχουσα πλευρὰν τὴν ΔΕ καὶ κορυφὴν τὸ ἄκρον αὐτῆς Δ.



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Β τῆς μιᾶς πλευρᾶς τῆς γωνίας ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς ἄλλης· ὅτε γίνεται τρίγωνον, τὸ ΑΒΓ· ἔπειτα ἂς ληφθῇ ἡ ΔΖ ἴση τῇ ΑΒ (γίνεται δὲ τοῦτο διὰ τοῦ διαβήτου) καὶ ἂς γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΓ καὶ ἄλλη περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ. Αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνονται (129)· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ ἑνὸς σημείου τῆς τομῆς Η ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΗΔ, ΗΖ, λέγω, ὅτι ἡ γωνία ΗΔΕ εἶνε ἡ ζητουμένη.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΗΖ εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν· ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν ΗΔΖ καὶ ΓΑΒ, ὡς εὑρισκομένων ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν ΒΓ καὶ ΗΖ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ κατασκευὴ γίνεται ἁπλουστέρα, ἐὰν λάβωμεν ΑΓ=ΑΒ· γίνεται δὲ τοῦτο, ἂν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τυχοῦσαν γράψωμεν τόξον τέμνον τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας Α.

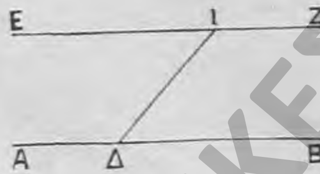
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6ον

147. *Νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ δοθέντος σημείου μὴ κειμένου ἐπ' αὐτῆς.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, τὸ Γ· ζητεῖται νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Γ εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΑΒ.

(*) Ὁ ἀκριβὴς γνώμων πρέπει νὰ ἔχῃ τὰς μὲν πλευρὰς αὐτοῦ εὐθυγράμμους, τὴν δὲ γωνίαν ὀρθήν· καὶ τὸ μὲν εὐθύγραμμον τῶν πλευρῶν ἐξελέγχεται ὡς καὶ εἰς τὸν κανόνα, ἡ δὲ γωνία αὐτοῦ ἐξελέγχεται ὡς ἑξῆς· κατασκευάζομεν, ὡς ἐρρήθη, τὴν κάθετον ΓΔ ἐπί τινα εὐθεῖαν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Γ, ἐφαρμόζοντες τὴν μίαν τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τοῦ μέρους ΓΒ· ἔπειτα κατασκευάζομεν πάλιν τὴν κάθετον εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐφαρμόζοντες τὴν αὐτὴν πλευρὰν ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους ΓΑ· ἂν τότε αἱ οὕτως εὑρισκόμεναι δύο κάθετοι συμπίπτωσιν ἐντελῶς, ἡ γωνία τοῦ γνώμονος εἶνε ἀκριβῶς ὀρθή, εἰ δὲ μή, εἶνε ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

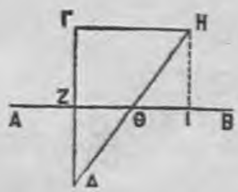
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἐκ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον τῆς δοθείσης, ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ ἂς σχηματισθῇ γωνία ἔχουσα πλευρὰν τὴν ΓΔ, κορυφὴν τὸ Γ, καὶ ἴση τῇ γωνίᾳ ΓΔΒ, κειμένη δὲ πρὸς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ΓΔ· ἂς ἐκβληθῇ δὲ ἡ πλευρὰ αὐτῆς ΓΕ πέραν τοῦ Γ· λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίαι ΕΓΔ καὶ ΓΔΒ εἶνε ἐκ τῆς κατασκευῆς ἴσαι.

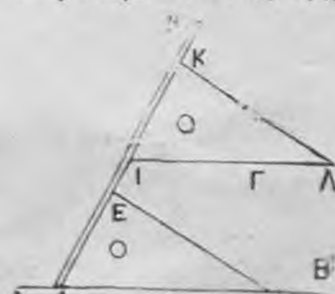
Τὸ αὐτὸ πρόβλημα λύεται καὶ ἄλλως, ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Γ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΖ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Ζ τῆς ΑΒ· προσεκβάλλομεν αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ΖΔ=ΓΖ. Ἐκ τοῦ σημείου Δ ἄγομεν τὴν ΔΘ εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον Θ τῆς ΑΒ· προσεκβάλλομεν καὶ αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ΘΗ=ΔΘ· ἄγομεν ἔπειτα τὴν ΓΗ καὶ αὐτὴ θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος.



Διότι, ἂν ληφθῇ ἡ ΘΙ ἴση τῇ ΖΘ καὶ ἀχθῇ ἡ ΙΗ, τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΘ καὶ ΘΙΗ θὰ εἶνε ἴσα (76)· ὅθεν ΙΗ=ΔΖ=ΖΓ· εἶνε δὲ καὶ αἱ γωνίαι Δ καὶ ΘΗΙ τῶν τριγώνων τούτων ἴσαι· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΖΓΗΙ ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΘΙ καὶ ΓΖ ἴσας καὶ παραλλήλους, ἑπομένως εἶνε παραλληλόγραμμον (114) καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΓΑ εἶνε παράλληλος τῇ ΑΒ.

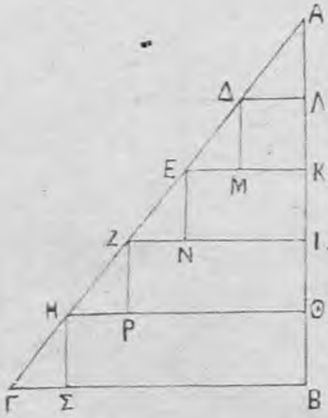
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ γνώμονος λύομεν τὸ πρόβλημα τοῦτο ὡς ἑξῆς. Ἐφαρμόζομεν τὴν ὑποτείνουσαν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου πλευρᾶς αὐτοῦ ΔΕ ἐφαρμόζομεν κανόνα, τὸν ΔΗ· ἔπειτα κινοῦμεν τὸν γνώμονα οὕτως, ὥστε ἡ ΔΕ νὰ μένῃ ἐπὶ τοῦ κανόνος, μέχρις οὗ ἡ ὑποτείνουσα διέλθῃ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Γ· τότε, μεταχειριζόμενοι τὴν ὑποτείνουσαν ὡς κανόνα, γράφομεν διὰ γραφίδος τὴν εὐθεῖαν ΙΓΛ, ἥτις θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη παράλληλος. Διότι αἱ γωνίαι ΗΙΛ καὶ ΗΔΒ εἶνε ἴσαι· εἶνε δὲ αἱ γωνίαι αὗται ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΙΛ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΔΗ· ἄρα αἱ ΑΒ, ΙΛ εἶνε παράλληλοι.



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7ον

148. *Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς ἴσα μέρη, ὅσα ἄν τις προστάξῃ.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἂς διαιρεθῇ εἰς πέντε ἴσα μέρη.



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ· Ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α τῆς εὐθείας ΑΒ ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα σχηματίζουσα μετ' αὐτῆς γωνίαν, ἔστω ἡ ΑΓ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν τμῆμα τὸ ΑΔ καὶ ἂς ἐπαναληφθῇ τοῦτο κατὰ σειρὰν ἐπὶ τῆς ΑΓ πεντάκις· ἔστω δὲ Γ τὸ ἄκρον τοῦ πέμπτου τμήματος ΗΓ· ἂς ἀχθῇ ἔπειτα διὰ τῶν σημείων Γ καὶ Β ἡ εὐθεῖα ΒΓ καὶ ἐκ τῶν σημείων Η, Ζ, Ε, Δ, τὰ ὁποῖα διαιροῦσι τὴν ΑΓ εἰς ἴσα μέρη, ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΒΓ· ἔστωσαν δὲ αἱ ΗΘ, ΖΙ, ΕΚ, ΔΛ· λέγω, ὅτι αἱ παράλληλοι αὗται διαιροῦσι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς πέντε μέρη ἴσα, ΑΛ, ΛΚ, ΚΙ, ΙΘ, ΘΒ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ, Η ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΒ, γίνονται τρίγωνα, τὰ ΔΜΕ, ΕΖΝ, ΖΗΡ, ΗΓΣ, ἴσα τῷ ΑΔΛ.

Τῷ ὄντι, παραβάλλοντες τὸ ΑΔΛ πρὸς ἓν τούτων, ἔστω πρὸς τὸ ΕΖΝ, βλέπομεν, ὅτι ἔχουσιν

	ΕΖ=ΑΔ	ἐκ κατασκευῆς,
	Ε=Α	ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΑΒ, ΕΝ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ,
καὶ	Ζ=Δ	διὰ τὰς παραλλήλους ΔΛ, ΖΙ·

ἑπομένως τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα· ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων ΑΔΛ, ΔΕΜ,... συνάγεται ΑΛ=ΔΜ=ΕΝ=ΖΡ=ΗΣ.

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε ΔΜ=ΚΛ, ΕΝ=ΚΙ, ΖΡ=ΙΘ, ΗΣ=ΘΒ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων, ἕπεται, ὅτι εἶνε

ΑΛ=ΛΚ=ΚΙ=ΙΘ=ΘΒ.

Τουτέστιν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα διῃρέθη εἰς πέντε ἴσα μέρη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

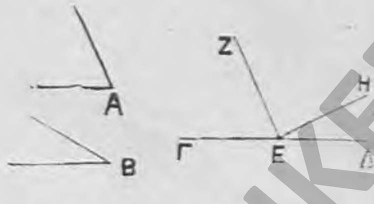
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8ον

149. *Ἐκ τῶν δύο γωνιῶν τριγώνου νὰ εὑρεθῇ ἡ τρίτη.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ δύο δοθεῖσαι γωνίαι τοῦ τριγώνου· ζητεῖται ἡ τρίτη.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Αἱ δύο δοθεῖσαι γωνίαι Α καὶ Β πρέπει νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΓΔ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον, τὸ Ε, ἔπειτα ἂς σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ Α ἔχουσα κορυφὴν τὸ Ε καὶ πλευρὰν τὴν ΕΓ, ἔστω ἡ ΖΕΓ, καὶ γωνία ἴση τῇ Β ἔχουσα κορυφὴν τὸ Ε καὶ πλευρὰν τὴν ΕΔ, κειμένη δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΓΔ, ἔστω ἡ ΔΕΗ· λέγω, ὅτι ἡ ζητουμένη τρίτη γωνία τοῦ τριγώνου εἶνε ἴση τῇ ΖΕΗ.



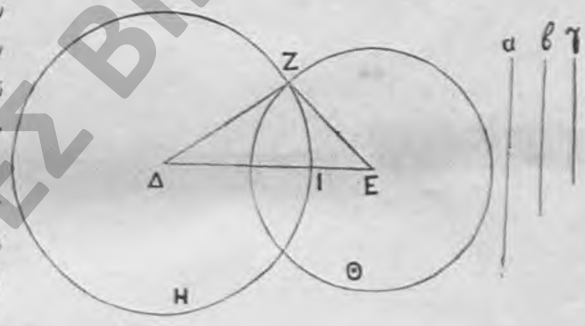
ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι ἀμφότεραι αἱ ῥηθεῖσαι γωνίαι εἶνε ὑπόλοιπα δύο ὀρθῶν γωνιῶν, ἀφ' ὧν ἀφῃρέθη τὸ ἄθροισμα Α+Β τῶν δοθεισῶν γωνιῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9ον

150. *Ἐκ τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον.*

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ α, β, γ· πρόκειται νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τὰς εὐθείας ταύτας.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐπειδὴ παντὸς τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ἀνάγκη, ἵνα τὸ πρόβλημα λύηται, ἡ μεγαλητέρα ἐκ τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν λοιπῶν δύο.



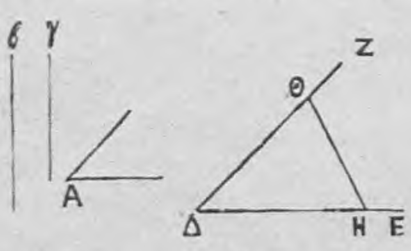
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Λαμβάνομεν εὐθεῖαν ἴσην τῇ α, ἔστω τὴν ΔΕ καὶ γράφομεν δύο περιφερείας, τῶν ὁποίων κέντρα μὲν εἶνε τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἀκτῖνες δὲ αἱ εὐθεῖαι β καὶ γ· λέγω, ὅτι αἱ περιφέρειαι αὗται τέμνουσιν ἀλλήλας· καὶ ἂν εἰς ἓν τῶν σημείων τῆς τομῆς ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΔΖ, ΕΖ, γίνεται τὸ ζητούμενον τρίγωνον ΔΕΖ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ὑπετέθη, ὅτι εἶνε $\alpha<\beta+\gamma$, ἤτοι $\Delta E<\Delta H+E\Theta$·
ἀλλὰ καὶ $\beta<\alpha+\gamma$
ὅθεν $\beta-\gamma<\alpha$, ἤτοι $\Delta E>\Delta H-E\Theta$.

Ἐκ τούτων βλέπομεν, ὅτι τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων ΔΕ εἶνε μικρότερον μὲν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων, μεγαλήτερον δὲ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν· ἐπομένως τέμνονται αἱ περιφέρειαι.

Τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἔχει πλευρὰς τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας. Ἄλλο δὲ τρίγωνον, διάφορον τούτου, δὲν δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐκ τῶν αὐτῶν πλευρῶν α,β,γ· διότι δύο τρίγωνα τὰς αὐτὰς ἔχοντα πλευρὰς εἶνε ἴσα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10ον



151. *Ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ ἐκ τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἔστωσαν β καὶ γ αἱ δύο δοθεῖσαι πλευραί, Α δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία· ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τὰς β,γ, καὶ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν τὴν Α.

Ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας ΔΕ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ Α, τὴν ΖΔΕ (146)· ἔπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΔΕ τὴν ΔΗ ἴσην τῇ β, καὶ ἐπὶ τῆς ΔΖ τὴν ΔΘ ἴσην τῇ γ καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν ΘΗ· τὸ τρίγωνον ΔΘΗ εἶνε προφανῶς τὸ ζητούμενον.

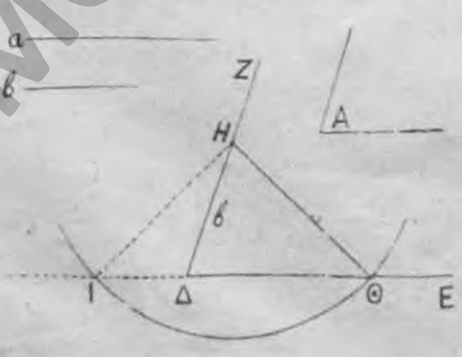
Ὅτι δὲ πλὴν τούτου οὐδὲν ἄλλο τρίγωνον λύει τὸ πρόβλημα, γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ θεωρήματος 76.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 11ον

152. *Ἐκ τῶν δύο πλευρῶν τριγώνου καὶ ἐκ τῆς γωνίας τῆς ἀπέναντι μιᾶς τῶν πλευρῶν τούτων νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἔστωσαν α καὶ β αἱ δύο δοθεῖσαι πλευραὶ καὶ Α ἡ δοθεῖσα γωνία· πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τὰς α καὶ β, ἀπέναντι δὲ τῆς α τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Ἐὰν ἡ πλευρὰ α δὲν εἶνε μεγαλητέρα τῆς β, ἡ γωνία Α πρέπει νὰ εἶνε ὀξεῖα.



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἂς σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ Α, ἡ ΖΔΕ, καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ΔΖ ἡ ΔΗ ἴση τῇ δοθείσῃ πλευρᾷ β· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Η καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α ἂς γραφῇ περιφέρεια κύκλου· ἂς ἀχθῶσι δὲ ἀκτῖνες εἰς τὰς τομὰς τῆς περιφερείας καὶ τῆς εὐθείας ΔΕ.

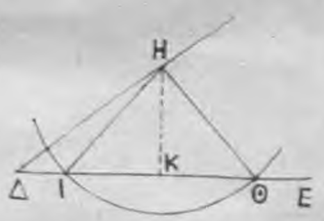
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἐὰν ἡ α εἶνε μεγαλητέρα τῆς β, ἡ περιφέρεια θὰ τέμνῃ τὴν ΔΕ εἰς δύο σημεῖα Θ, Ι ἑκατέρωθεν τοῦ Δ (διότι τὸ Δ εἶνε ἐντὸς τῆς περιφερείας), ἐκ τῶν δύο δὲ τριγώνων ΔΗΘ καὶ ΔΗΙ μόνον τὸ πρῶτον λύει τὸ πρόβλημα· διότι ἔχει τὰς πλευρὰς α (=ΗΘ) καὶ β (=ΔΗ), ἀπέναντι δὲ τῆς α ἔχει τὴν δοθεῖσαν γωνίαν Α· τὸ δὲ δεύτερον ΔΗΙ ἔχει μὲν τὰς δοθείσας πλευρὰς α (=ΗΙ) καὶ β (=ΔΗ), ἀλλ' ἀπέναντι τῆς α ἔχει τὴν γωνίαν ΗΔΙ, ἥτις εἶνε ἡ παραπληρωματικὴ τῆς δοθείσης.

Ἄρα, ὅταν εἶνε $\alpha > \beta$, τὸ πρόβλημα μίαν μόνην λύσιν ἐπιδέχεται.

Ἐὰν εἶνε $\alpha = \beta$ (καὶ ἡ γωνία Α ὀξεῖα), τὸ Ι συμπίπτει μετὰ τοῦ Δ· ὥστε πάλιν μία μόνη λύσις ὑπάρχει.

Τέλος, ἐὰν εἶνε $\alpha < \beta$ (καὶ ἡ γωνία Α ὀξεῖα), ἡ περιφέρεια τέμνει τὴν ΔΕ, *ὅταν ἡ ἐκ τοῦ Η καταβιβαζομένη κάθετος ἐπ' αὐτήν, ἤτοι ἡ ΗΚ, εἶνε μικροτέρα τῆς α*· τότε αἱ δύο τομαὶ Ι, Θ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Δ (διότι τὸ Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας)· ἐπομένως ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΔΗΙ, ΔΗΘ λύουσι τὸ πρόβλημα καὶ ἔχομεν δύο λύσεις.

Ἐὰν ἡ κάθετος ΗΚ εἶνε ἴση τῇ α, ἡ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ΔΕ κατὰ τὸ Κ, (ἔνθα συμπίπτουσιν ἀμφότεραι αἱ τομαὶ Ι, Θ) καὶ ἐπομένως ὑπάρχει μία μόνη λύσις, τὸ τρίγωνον ΔΗΚ. Ἐὰν δὲ ἡ ΗΚ εἶνε μεγαλητέρα τῆς α, ἡ περιφέρεια δὲν τέμνει (118) τὴν ΔΕ καὶ ἐπομένως οὐδεμία λύσις ὑπάρχει.



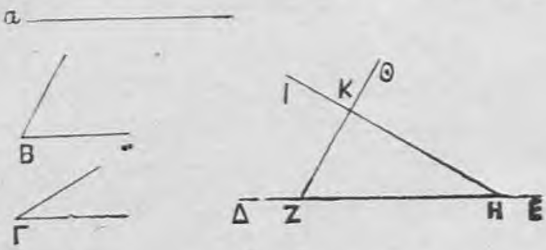
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 12ον

153. *Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ δύο γωνιῶν νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Αἱ δοθεῖσαι γωνίαι δύνανται νὰ εἶνε ἢ ἀμφότεραι προσκείμεναι εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευράν, ἢ ἡ μὲν προσκειμένη, ἡ δὲ ἀντικειμένη. Κατὰ τὴν δευτέραν ταύτην περίπτωσιν εὑρίσκομεν τὴν τρίτην γωνίαν τοῦ τριγώνου (ἐκ τῶν δύο δοθεισῶν) καὶ οὕτω θὰ ἔχωμεν πάντοτε τὰς εἰς τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α δύο προσκειμένας γωνίας Β καὶ Γ.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο δοθεισῶν γωνιῶν πρέπει νὰ εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ Ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας ΔΕ λαμβάνομεν τὸ τμῆμα ΖΗ ἴσον τῇ α καὶ σχηματίζομεν γωνίαν ἴσην τῇ Β ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Ζ καὶ πλευρὰν τὴν ΖΗ, ἔστω τὴν ΘΖΗ, καὶ ἄλλην γωνίαν



ἴσην τῇ Γ καὶ ἔχουσαν κορυφὴν τὸ Η καὶ πλευρὰν τὴν ΗΖ (πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΔΕ), ἔστω τὴν ΙΗΔ· αἱ δύο εὐθεῖαι ΖΘ καὶ ΗΙ τέμνονται (ὅταν ἐπαρκῶς αὐξηθῶσι), διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν $Z+H$, ἤτοι $B+\Gamma$, εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν· καὶ τὸ προκύπτον τρίγωνον ΖΚΗ εἶνε προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Ὅτι δὲ πλὴν τούτου οὐδὲν ἄλλο τρίγωνον λύει τὸ πρόβλημα, γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ θεωρήματος 77.

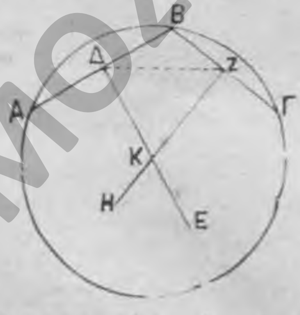
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 13ον

154. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν δοθέντων σημείων.*

Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ τρία δοθέντα σημεῖα. Ζητεῖται νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἔχουσα τὰ τρία ταῦτα σημεῖα.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Τὰ τρία δοθέντα σημεῖα πρέπει νὰ μὴ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (101).

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Διὰ τῶν δοθέντων σημείων ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΒΓ, ἔπειτα τὴν ΔΕ κάθετον εἰς τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ καὶ τὴν ΖΗ κάθετον εἰς τὸ μέσον Ζ τῆς ΒΓ· λέγω, ὅτι αἱ δύο αὗται κάθετοι ΔΕ, ΖΗ,



ἱκανῶς αὐξανόμεναι, θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Κ καὶ ὅτι ἡ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ γραφομένη περιφέρεια θὰ ἔχῃ τὰ δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Ἐὰν ἀχθῇ ἡ τὰ μέσα Δ καὶ Ζ συνδέουσα εὐθεῖα ΔΖ, σχηματίζει πρὸς τὰς δύο καθέτους τὰς γωνίας ΕΔΖ καὶ ΗΖΔ, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν (διότι ἑκατέρα τούτων εἶνε μέρος ὀρθῆς)· ὥστε αἱ δύο εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΖΗ συναντῶνται. Τὸ δὲ σημεῖον Κ τῆς τομῆς αὐτῶν ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β, διότι κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (104)· ὁμοίως ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ, διότι εἶνε σημεῖον τῆς καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· ὥστε αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ εἶνε ἴσαι καὶ ἡ γραφομένη περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ, ἢ τὴν ΚΒ, ἢ τὴν ΚΓ, θὰ ἔχῃ καὶ τὰ τρία δοθέντα σημεῖα.

Ὅτι δὲ ἄλλη περιφέρεια ἀδύνατον νὰ διέλθῃ διὰ τῶν αὐτῶν τριῶν σημείων, γίνεται φανερὸν ἐκ τούτου, ὅτι δύο διάφοροι περιφέρειαι οὐδέποτε ἔχουσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Διὰ τῆς αὐτῆς κατασκευῆς εὑρίσκομεν τὸ κέντρον δοθέντος κύκλου ἢ τόξου. Διότι ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἢ ἐπὶ τοῦ τόξου, τρία τυχόντα σημεῖα καὶ νὰ εὕρωμεν τὸ κέντρον τῆς δι' αὐτῶν διερχομένης περιφερείας.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα, ὅτι *αἱ τρεῖς κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν τριγώνου διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου*· διότι, καὶ ἂν ἐλαμβάνομεν τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, τὸ αὐτὸ κέντρον Κ θὰ εὑρίσκομεν.

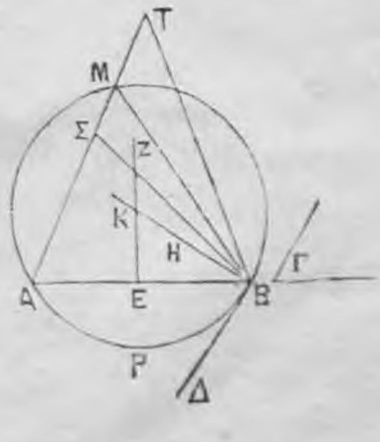
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 14ον

155. *Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Γ· πρόκειται ἐπὶ τῆς ΑΒ νὰ γραφῇ τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Γ.

Ἐὰν ἡ γωνία Γ εἶνε ὀρθή, ἀρκεῖ ἐπὶ τῆς ΑΒ ὡς διαμέτρου νὰ γραφῇ ἡμικύκλιον· ἂς ὑποτεθῇ λοιπὸν μὴ ὀρθή.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Ἂς σχηματισθῇ γωνία ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ Γ ἔχουσα κορυφὴν τὸ Β καὶ πλευρὰν τὴν ΒΑ, ἔστω δὲ αὕτη ἡ ΔΒΑ· ἔπειτα ἂς ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Β, ἔστω ἡ ΒΗ, καὶ ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, ἔστω ἡ ΕΖ· λέγω, ὅτι αἱ κάθετοι αὗται ΒΗ, ΕΖ τέμνονται, καὶ ἂν μὲ κέντρον τὴν τομὴν αὐτῶν Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ γραφῇ περιφέρεια, τὸ τμῆμα τοῦ κύκλου, τὸ ἐκτὸς τῆς γωνίας ΑΒΔ ὑπάρχον, εἶνε τὸ ζητούμενον.



ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΒΗ τέμνονται ἱκανῶς αὐξανόμεναι· διότι σχηματίζουσι μετὰ τῆς τεμνούσης αὐτὰς ΕΒ τὰς δύο γωνίας ΖΕΒ καὶ ΗΒΕ, ὧν ἡ μὲν εἶνε ὀρθή, ἡ δὲ μέρος ὀρθῆς (τῆς ΗΒΔ)· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τούτων εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, ἄρα τέμνονται αἱ εὐθεῖαι ΒΗ καὶ ΕΖ εἴς τι σημεῖον Κ. Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΒ γραφῇ περιφέρεια, θὰ διέλθῃ ἡ περιφέρεια αὕτη καὶ διὰ τοῦ Α (διότι ΚΑ=ΚΒ), θὰ ἐφάπτηται δὲ τῆς ΒΔ εἰς τὸ Β· διότι ἡ ΒΔ εἶνε κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΚΒ· ἐπομένως ἡ γωνία ΔΒΑ, ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς χορδῆς ΒΑ καὶ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΒΔ, ἰσοῦται τῇ ἐγγεγραμμένῃ ΒΜΑ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΡΒ τοῦ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιεχομένου. Ἐπειδὴ δὲ κατεσκευάσθη ἡ γωνία ΔΒΑ ἴση τῇ δοθείσῃ Γ, ἕπεται, ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΜΒ ἰσοῦται τῇ Γ. Ἐγράφη λοιπὸν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τμῆμα κύκλου, τὸ ΑΜΒΕΑ, δεχόμενον τὴν δοθεῖσαν γωνίαν. Ὅ. ἔ. π.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πρὸς τὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ, ἔνθα κεῖται τὸ τμῆμα ΑΜΒΕΑ, δὲν ὑπάρχει ἄλλο σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β νὰ σχηματίζωσι γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ, εἰμὴ τὰ σημεῖα τοῦ τόξου ΑΜΒ· διότι, ἂν μὲν ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς τοῦ τμήματος, ὡς τὸ Τ, ἡ γωνία ΑΤΒ εἶνε (72) μικροτέρα τῆς ΑΜΒ, ἤτοι τῆς Γ· ἂν δὲ ληφθῇ τι ἐντός, ὡς τὸ Σ, ἡ γωνία ΑΣΒ θὰ εἶνε μεγαλητέρα τῆς ΑΜΒ, ἤτοι τῆς Γ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 15ον

156. *Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου.*

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ δοθὲν σημεῖον πρέπει νὰ μὴ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

1) Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἀρκεῖ νὰ ἀχθῇ ἐξ αὐτοῦ κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα τὴν εἰς αὐτὸ καταλήγουσαν (123).

2) Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου, ἂς ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΚ καὶ ἂς γραφῇ ἐπ' αὐτῆς ὡς διαμέτρου περιφέρεια, ἡ ΚΒΑΓΚ, ἥτις τέμνει τὴν δοθεῖσαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ· λέγω, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ εἶνε ἐφαπτόμεναι τοῦ δοθέντος κύκλου.

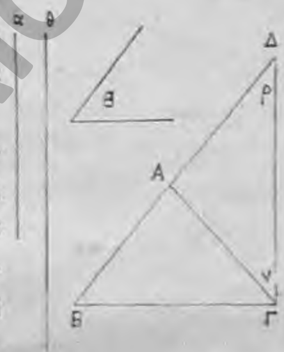
Διότι, ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΚΒ, ΚΓ, αἱ γινόμεναι γωνίαι ΚΒΑ, ΚΓΑ εἶνε ὀρθαί, ὡς ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰ ἡμικύκλια ΚΒΑ, ΚΓΑ, ἐπομένως ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΑΓ, ὡς κάθετος ἐπὶ ἀκτῖνα εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς, εἶνε ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι εἰς κύκλον εἶνε ἴσαι, τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἐκ τῶν ἴσων ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΚΑ, ΓΚΑ (89).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 16ον

157. *Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ μιᾶς τῶν παρ' αὐτὴν γωνιῶν καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

Ἔστω ἡ δοθεῖσα πλευρὰ ἡ α καὶ ἡ παρ' αὐτὴν γωνία ἡ Β, τὸ δὲ δοθὲν ἄθροισμα τῶν ἄλλων δύο πλευρῶν ἡ θ.



ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ εὐθεῖα θ, ὡς ἄθροισμα τῶν δύο πλευρῶν, πρέπει νὰ εἶνε μεγαλητέρα τῆς α.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον τρίγωνον εὑρέθη καὶ εἶνε τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ ΒΓ καὶ ἡ γωνία Β καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ΑΒ+ΑΓ εἶνε ἴσα πρὸς τὰ δοθέντα. Ἐὰν προσεκβληθῇ ἡ ΑΒ καὶ ληφθῇ ἡ ΑΔ ἴση τῇ ΑΓ, ἀχθῇ δὲ καὶ ἡ ΓΔ, γίνεται τὸ τρίγωνον ΒΔΓ, οὗτινος αἱ δύο πλευραὶ ΒΓ καὶ ΒΔ εἶνε γνωσταί, ὡς καὶ ἡ ὑπ' αὐτῶν περιεχομένη γωνία (διότι εἶνε ΒΓ=α, ΒΔ=ΒΑ+ΑΔ=ΒΑ+ΑΓ=θ, καὶ ἡ περιεχομένη γωνία εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ Β)· ἐπομένως τὸ τρίγωνον τοῦτο ΒΔΓ δύναται νὰ κατασκευασθῇ (151)· ὅπως δὲ ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκεται τὸ ΒΔΓ, οὕτω καὶ ἐκ τοῦ ΒΔΓ δύναται νὰ εὑρεθῇ τὸ ΑΒΓ, διότι πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ (κατασκευασθέντος τοῦ ΒΔΓ) νὰ ἀχθῇ ἡ ΓΑ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ τὴν γωνίαν ν ἴσην τῇ ρ, ὅτε θὰ εἶνε καὶ ΑΓ=ΑΔ.

Ἐκ τούτων ὁδηγούμενοι εὑρίσκομεν τὴν ἑπομένην λύσιν τοῦ προτεθέντος προβλήματος.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας καὶ περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν τὴν δοθεῖσαν· ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΒΓΔ, ἔχον τὴν ΒΓ ἴσην τῇ α καὶ τὴν ΒΔ ἴσην τῇ θ· ἔπειτα σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην τῇ Δ. Τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶνε τὸ ΑΒΓ.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, τῆς πλευρᾶς θ οὔσης μεγαλητέρας τῆς α, ἡ γωνία Γ εἶνε μεγαλητέρα τῆς Δ· ὥστε ἡ ΓΑ, ἡ σχηματίζουσα τὴν γωνίαν ΑΓΔ ἴσην τῇ Δ, θὰ κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΒΓΔ καὶ θὰ τέμνῃ ἐπομένως τὴν ΒΔ κατά τι σημεῖον Α· ἐπειδὴ δὲ εἶνε ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΔΓ αἱ παρὰ τὴν ΓΔ γωνίαι ἴσαι, θὰ εἶνε καὶ ΑΔ=ΑΓ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει ΒΓ=α, ΒΑ+ΑΓ=ΒΑ+ΑΔ=ΒΔ=θ καὶ τὴν τὴν γωνίαν Β ἴσην τῇ δοθείσῃ εἶνε λοιπὸν τὸ ζητούμενον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

158. Ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, ὑπεθέσαμεν εὑρεθὲν τὸ ζητούμενον τρίγωνον καί, ἐφαρμόσαντες ἐπ' αὐτοῦ γνωστὰς προτάσεις, ἐσχηματίσαμεν ἐξ αὐτοῦ ἄλλο, συνδεόμενον πρὸς τὸ πρῶτον οὕτως, ὥστε ἑκάτερον ἐξ αὐτῶν δύναται νὰ κατασκευασθῇ δοθέντος τοῦ ἑτέρου· ἐπειδὴ δὲ εἰξεύρομεν νὰ κατασκευάσωμεν τὸ δεύτερον, ἐξ αὐτοῦ κατεσκευάσαμεν καὶ τὸ πρῶτον καὶ ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΠΡΩΤΕΥΟΥΣΩΝ ΕΝ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΜΕΘΟΔΩΝ

159. Ὅταν, ἀγνοοῦντες τὴν λύσιν προβλήματος ἢ τὴν ἀπόδειξιν θεωρήματος, σκεπτώμεθα, ἵνα εὕρωμεν αὐτήν, ἡ ἁρμοδιωτάτη πρὸς τοῦτο μέθοδος εἶνε ἡ ἑξῆς. Ὑποθέτομεν εὑρεθὲν τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος ἢ ἀληθὲς τὸ ἀποδεικτέον θεώρημα καὶ συνδυάζομεν αὐτὸ μετ' ἄλλων γνωστῶν προτάσεων προσπαθοῦντες νὰ φθάσωμεν εἰς γνωστόν τι ἐξαγόμενον, ἐξ οὗ ὁδηγούμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος, ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον εἶνε ἀληθές· ἢ καὶ συμπεραίνομεν τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος ἢ τὸ ψευδὲς τοῦ θεωρήματος, ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον, εἰς ὃ ἐφθάσαμεν, εἶνε ψευδές.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *ἀναλυτική*. Ὁ δὲ τοιοῦτος τρόπος τοῦ σκέπτεσθαι λέγεται *ἀνάλυσις*.

Ἀλλ' ὅταν, εὑρόντες τὴν λύσιν ἢ τὴν ἀπόδειξιν, θέλωμεν νὰ ἐκθέσωμεν αὐτὴν εἰς ἄλλους, τότε ἀκολουθοῦμεν ἄλλην μέθοδον. Ἀρχόμενοι τότε ἀπὸ γνωστῶν προτάσεων συνδυάζομεν αὐτὰς ἁρμοδίως προχωροῦντες, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τὴν λύσιν ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν.

Ἡ μέθοδος αὕτη λέγεται *συνθετική* καὶ ἡ διανοητικὴ ἐργασία ἡ ἐν αὐτῇ γινομένη, ἐναντία τῆς προηγουμένης οὖσα, λέγεται *σύνθεσις*.

Κατὰ τὴν μέθοδον ταύτην ἐλύθησαν πάντα τὰ προηγούμενα προβλήματα πλὴν τοῦ τελευταίου· κατ᾽ αὐτὴν ἀπεδείχθησαν καὶ πάντα τὰ θεωρήματα, πλὴν τῶν ἀποδειχθέντων διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Ἡ συνθετικὴ μέθοδος ἔχει τὸ μειονέκτημα, ὅτι πείθει μὲν περὶ τῆς ἀληθείας τοῦ θεωρήματος ἢ περὶ τῆς ἀληθοῦς λύσεως τοῦ προβλήματος, δὲν εὐχαριστεῖ ὅμως τὸν νοῦν, ὅστις ζητεῖ νὰ ἐννοήσῃ, πῶς εὑρέθη ἡ λύσις ἢ ἡ ἀπόδειξις, οὐδὲ ὁδηγεῖ τὸ παράπαν εἰς τὴν λύσιν ἄλλων ὁμοίων προβλημάτων ἢ εἰς τὴν ἀπόδειξιν ἄλλων θεωρημάτων.

Ἡ ἀναλυτικὴ πάλιν μέθοδος δεικνύει μὲν τὴν πορείαν, ἣν ἠκολούθησεν ὁ νοῦς εἰς τὴν εὕρεσιν τῆς ἀληθείας, δὲν παρέχει ὅμως βεβαιότητα, ἐκτὸς ὅταν συμπεραίνῃ τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος ἢ τὸ ψευδὲς τοῦ θεωρήματος (ὡς συμβαίνει ἐπὶ τῶν θεωρημάτων τῶν διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἀποδεικνυομένων, ἔνθα ὑποτίθεται ἀληθὲς τὸ ἐναντίον τοῦ ἀποδειχθησομένου καὶ συνδυάζεται μετ᾽ ἄλλων γνωστῶν εἰς τρόπον, ὥστε νὰ προκύψῃ ψευδὲς ἐξαγόμενον)· διότι, ὅταν δι᾽ αὐτῆς, ὑποθέσαντές τι ὡς ἀληθές, φθάσωμεν εἰς ἐξαγόμενον ἀληθές, δὲν ἕπεται ἐκ τούτου, ὅτι ἡ γενομένη ὑπόθεσις εἶνε ἀληθής.

Πρὸς ἄσκησιν περὶ τὴν ἀναλυτικὴν μέθοδον λύομεν κατ᾽ αὐτὴν καὶ τὰ ἑπόμενα προβλήματα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 17ον

160. *Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ ἐκ τῆς περιμέτρου αὐτοῦ νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.*

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν δοθεισῶν γωνιῶν πρέπει νὰ εἶνε ἴσον μὲ δύο ὀρθάς.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον· ἐὰν μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ προσεκβληθῇ ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ ληφθῇ Γγ=ΓΑ καὶ Ββ=ΒΑ καὶ ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι Αγ, Αβ, γίνεται νέον τρίγωνον, τὸ Αβγ, οὗτινος ἡ πλευρὰ βγ ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ περιμέτρῳ (ἐκ κατασκευῆς), αἱ δὲ παρ᾽ αὐτῇ γωνίαι β καὶ γ εἶνε τὰ ἡμίση τῶν δοθεισῶν γωνιῶν Β καὶ Γ, ὡς συνάγεται ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒβ καὶ ΑΓγ (72). Ἐπομένως τὸ τρίγωνον Αβγ δύναται νὰ κατασκευασθῇ· ἐξ αὐτοῦ δὲ κατασκευάζεται καὶ τὸ ζητούμενον.

Ἐκ τῆς ἀναλύσεως ταύτης συνάγεται ἡ ἑπομένη συνθετικὴ λύσις τοῦ προβλήματος.

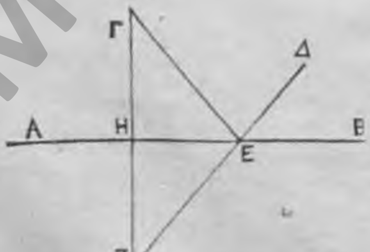
ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Κατασκευάζομεν τρίγωνον, τὸ Αβγ, ἔχον τὴν πλευρὰν βγ ἴσην τῇ δοθείσῃ περιμέτρῳ καὶ παρ' αὐτὴν γωνίας τὰς $\frac{1}{2}$ Β, $\frac{1}{2}$ Γ, (ἃς εὑρίσκομεν διχοτομοῦντες τὰς δοθείσας Β, Γ)· ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου τούτου ἄγομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ οὕτως, ὥστε νὰ γίνῃ ἡ γωνία ΒΑβ ἴση τῇ ΒβΑ καὶ ἡ γωνία ΓΑγ ἴση τῇ ΓγΑ· αἱ δύο αὗται εὐθεῖαι τέμνουσι τὴν βγ εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ τὸ ζητούμενον τρίγωνον εἶνε τὸ ΑΒΓ.

Διότι ἡ γωνία βΑγ ἰσοῦται $2^{ορθ}$ $-\frac{1}{2}$ Β $-\frac{1}{2}$ Γ καὶ ἐπειδὴ εἶνε $Α+Β+Γ=2^{ορθ}$, ἕπεται, ὅτι ἡ γωνία βΑγ ἰσοῦται $(Α+Β+Γ)-\frac{1}{2}Β-\frac{1}{2}Γ$, ἤτοι $\frac{1}{2}Β+\frac{1}{2}Γ+Α$· δύνανται λοιπὸν νὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτῆς δύο μέρη βΑΒ καὶ γΑΓ ἴσα τοῖς $\frac{1}{2}$ Β καὶ $\frac{1}{2}$ Γ, τουτέστι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κατασκευάζεται· ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα ΑγΓ καὶ ΑβΒ εἶνε ἰσοσκελῆ (82)· ἄρα ΑΓ=Γγ καὶ ΑΒ=Ββ· ἐπομένως ἡ περίμετρος ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ ἰσοῦται τῇ Ββ+ΒΓ+Γγ, ἤτοι τῇ εὐθείᾳ βγ, ἥτις ἐλήφθη ἴση τῇ δοθείσῃ περιμέτρῳ· καὶ ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε διπλασία τῆς β (ὡς ἐκτὸς γωνία τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑβΒ), ἤτοι ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ Β· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΑΓΒ ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ Γ, καὶ ἡ ΒΑΓ τῇ δοθείσῃ Α· ὥστε κατεσκευάσθη τὸ ζητούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 18ον

161. *Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ σημεῖόν τι, ἀπὸ τοῦ ὁποίου αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Γ, Δ, νὰ σχηματίζωσι μετὰ τῶν δύο μερῶν τῆς εὐθείας γωνίας ἴσας.*

Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ὑποτίθενται κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ.



ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω Ε τὸ ζητούμενον σημεῖον, ἤτοι ἔστω ἡ γωνία ΔΕΒ ἴση τῇ ΓΕΑ. Ἐὰν ἐκβληθῇ ἡ ΔΕ πέραν τοῦ Ε, ἡ γωνία ΑΕΖ, ὡς ἴση τῇ ΔΕΒ, θὰ εἶνε ἴση καὶ τῇ ΓΕΑ. Ἐὰν ἄρα ληφθῇ ΕΖ ἴση τῇ ΕΓ καὶ ἀχθῇ ἡ ΓΖ, τὰ δύο τρίγωνα ΓΕΗ καὶ ΗΕΖ θὰ εἶνε ἴσα (76) καὶ θὰ εἶνε ἡ ΓΗ ἴση τῇ ΗΖ καὶ αἱ περὶ τὸ Η γωνίαι ἴσαι, ἤτοι ἡ ΓΖ θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Δύναται λοιπὸν νὰ ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΓΖ καὶ να προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Ζ, τὸ δὲ Ε θὰ εὑρεθῇ τότε ὡς τομὴ τῆς ΖΔ καὶ τῆς ΑΒ.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν δοθέντων σημείων, ἔστω ἐκ τοῦ Γ, ἂς ἀχθῇ ἡ ΓΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπ' αὐτῆς, προσεκβληθείσης, ἂς ληφθῇ ἡ ΗΖ ἴση τῇ ΓΗ, ἂς ἐπιζευχθῇ δὲ τὸ Ζ μετὰ τοῦ σημείου Δ· τὸ σημεῖον Ε, εἰς ὃ ἡ ΖΔ τέμνει τὴν ΑΒ, εἶνε τὸ ζητούμενον.

Διότι τὰ τρίγωνα ΓΕΗ, ΖΕΗ εἶνε ἴσα (76), ἑπομένως αἱ γωνίαι ΓΕΗ καὶ ΗΕΖ εἶνε ἴσαι· ἀλλ' ἡ γωνία ΔΕΒ εἶνε ἴση τῇ ΗΕΖ, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα ἡ γωνία ΓΕΗ εἶνε ἴση τῇ ΔΕΒ· ὃ. ἔ. π.

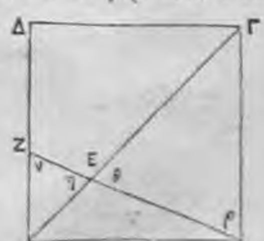
Παρατήρησις. Ἐκ πασῶν τῶν γραμμῶν, αἵτινες ἄγουσιν ἐκ τοῦ Γ εἰς τὸ Δ καὶ ἐγγίζουσι τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ, ἐλαχίστη εἶνε ἡ τεθλασμένη ΓΕΔ (ἡ τὰς ἴσας γωνίας σχηματίζουσα πρὸς τὴν ΑΒ)· διότι αὕτη μὲν ἰσοῦται τῇ εὐθείᾳ ΖΔ (ΓΕ=ΖΕ)· ἐνῷ πᾶσα ἄλλη, οἷον ἡ ΓΘΔ (ἡ ἐγγίζουσα τὴν ΑΒ εἰς οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον Θ) ἰσοῦται τῇ τεθλασμένῃ ΖΘΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑπετέθησαν τὰ σημεῖα Γ, Δ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ΑΒ· ἀλλ' ἡ λύσις μένει ἡ αὐτή, καὶ ὅταν κεῖνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς, αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι πρέπῃ νὰ σχηματίζωνται μετὰ τοῦ ἑνὸς μέρους τῆς εὐθείας ΑΒ. Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, ἐὰν τὰ σημεῖα κεῖνται εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς εὐθείας, τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον μέν, ἂν δὲν εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς καθέτου, ἀόριστον δέ, ἂν τοὐναντίον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 19ον

162. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗτινος ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Δ.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον τετράγωνον· ἐὰν ληφθῇ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ ἡ ΓΕ ἴση τῇ ΓΒ, ἡ ΕΑ θὰ εἶνε ἡ διαφορὰ τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς, ἑπομένως ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Δ· ἐὰν δὲ ἀχθῇ ἡ ΒΕ καὶ ἐκβληθῇ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ζ, γίνονται ἀμφότερα τα τρίγωνα ΓΕΒ καὶ ΖΕΑ ἰσοσκελῆ· τὸ μὲν ΓΕΒ ἐκ κατασκευῆς (ἑπομένως ἔχει καὶ θ=ρ), τὸ δὲ ΕΖΑ, διότι εἶνε ν=ρ, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΔ, ΓΒ,

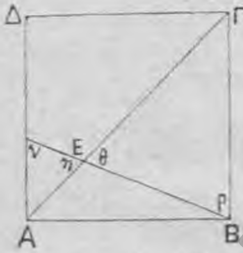


καὶ η=θ, ὡς κατὰ κορυφήν,

καὶ ἐπειδὴ θ=ρ, ἕπεται καὶ ν=η· ἤτοι τὸ τρίγωνον ΖΕΑ εἶνε ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν ΑΖ ἴσην τῇ ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον τοῦτο δύναται νὰ κατασκευασθῇ· διότι αἱ δύο πλευραὶ αὐτοῦ ΑΕ, ΑΖ εἶνε ἴσαι τῇ δοθείσῃ διαφορᾷ Δ, ἡ δὲ περιεχομένη ὑπ' αὐτῶν γωνία εἶνε τὸ ἥμισυ ὀρθῆς. Ἐντεῦθεν συνάγεται ἡ ἑπομένη λύσις τοῦ προβλήματος.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Κατασκευάζομεν τρίγωνον ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας τῇ δοθείσῃ διαφορᾷ Δ· καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὀρθῆς· ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΑΕΖ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου τούτου ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΖ, τὴν ΑΒ, καὶ προσεκβάλλομεν τὴν ΖΕ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν κάθετον ταύτην εἴς τι σημεῖον Β· ἡ ΑΒ θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

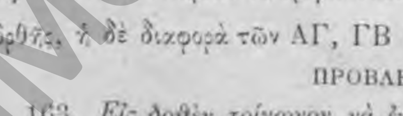
Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΖΕ συναντῶνται· διότι αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι πρὸς τὴν ΑΔ, ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν. Ἐὰν δὲ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ ΑΒΓΔ, καὶ προσεκβληθῇ ἡ ΑΕ, θὰ διέλθῃ διὰ τῆς κορυφῆς Γ· διότι διχοτομεῖ τὴν ὀρθὴν γωνίαν Α τοῦ τετραγώνου· ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΕΖΑ εἶνε ἰσοσκελὲς ἐκ κατασκευῆς, ἔχει τὰς γωνίας ν καὶ η ἴσας· ἀλλ' εἶνε ν=ρ, ἕνεκα τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ η=θ, ὡς κατὰ κορυφήν· ὅθεν ἕπεται καὶ ρ=θ· ἄρα τὸ τρίγωνον ΕΓΒ εἶνε ἰσοσκελὲς καὶ ἔχει τὴν ΓΕ ἴσην τῇ ΓΒ· ἑπομένως ἡ ΑΕ εἶνε ἡ διαφορὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ καὶ τῆς πλευρᾶς ΓΒ τοῦ τετραγώνου· ἐλήφθη δὲ ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Δ· ὥστε ἐλύθη τὸ πρόβλημα.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται καὶ τὸ ἑπόμενον γενικώτερον πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο πλευρῶν αὐτοῦ.* Ἐν τῷ λυθέντι προβλήματι ἄγνωστον ἦτο κυρίως τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, οὗτινος αἱ γωνίαι ἦσαν 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν ΑΓ, ΓΒ ἦτο Δ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 20ον

163. *Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ κύκλος.*



ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἂς ὑποτεθῇ τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν ἀχθῶσιν ἀκτῖνες εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, ἔνθα ὁ κύκλος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, αἱ ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ, θὰ εἶνε κάθετοι ἐπ' αὐτάς, ὡς ἐφαπτομένας· ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ σημεῖον Κ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν ἑκάστης τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ· καὶ κατ' ἀκολουθίαν θὰ κεῖται ἐπὶ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας ταύτας (108).

ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Ἄς διχοτομηθῶσι δύο ἐκ τῶν γωνιῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἔστωσαν αἱ Β, Γ, καὶ ἐκ τοῦ σημείου Κ, εἰς ὃ αἱ διχοτομοῦσαι αὐτὰς τέμνονται, ἄς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν, ἔστω ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ΚΔ, ἄς γραφῇ δὲ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ· λέγω, ὅτι ὁ κύκλος οὗτος θὰ εἶνε ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον.

Διότι τὸ Κ, σημεῖον ὂν τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν Β, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῆς (108), ἤτοι αἱ κάθετοι ἐπ' αὐτὰς ΚΔ, ΚΖ εἶνε ἴσαι· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ κάθετος ΚΕ ἐπὶ τὴν ΑΓ εἶνε ἴση τῇ ΚΔ· ὥστε αἱ ἐκ τοῦ Κ ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ἀγόμεναι κάθετοι ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ εἶνε ἴσαι· καὶ διὰ τοῦτο ἡ περιφέρεια ἡ μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΔ γραφεῖσα, θὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ· αἱ δὲ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ὡς κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΚΔ, ΚΕ, ΚΖ, θὰ εἶνε ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Καθ' ὅμοιον τρόπον γράφεται κύκλος ἐφαπτόμενος μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν προσεκβολῶν τῶν δύο ἄλλων.

Ἐπομένως ὑπάρχουσι τέσσαρες κύκλοι ἐφαπτόμενοι τριῶν δεδομένων εὐθειῶν τρίγωνον ποιουσῶν.

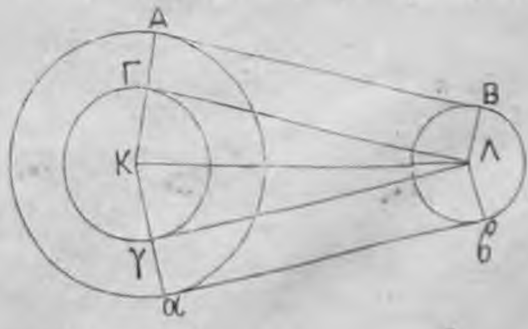
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα, ὅτι *αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τρεῖς γωνίας τριγώνου συνέρχονται εἰς ἓν σημεῖον.*

* ΠΡΟΒΛΗΜΑ 21ον

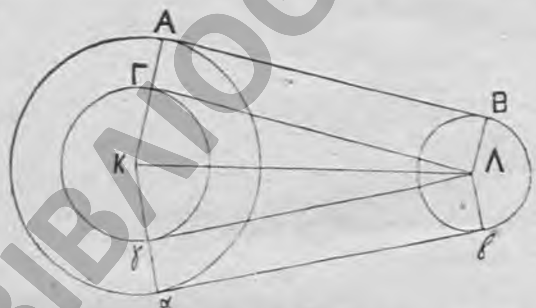
164. *Νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη κοινὴ δύο δοθέντων κύκλων.*

Ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύναται νὰ ἔχῃ τοὺς κύκλους ἢ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς ἢ ἑκατέρωθεν αὐτῆς· διὰ τοῦτο ὑποδιαιρεῖται τὸ πρόβλημα εἰς δύο.

α΄ ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω ΑΒ ἡ ζητουμένη κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο δοθέντων κύκλων Κ καὶ Λ, ἔχουσα ἀμφοτέρους πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς· ἐὰν εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς Α καὶ Β



ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΒ, καὶ ἐξ ἑνὸς τῶν κέντρων, ἔστω ἐκ τοῦ Λ, ἡ ΛΓ παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ ΑΒ, θὰ γίνῃ τὸ σχῆμα ΑΒΛΓ ὀρθογώνιον καὶ ἔχει διὰ τοῦτο ΑΓ=ΒΛ· ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ ΚΓ εἶνε ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀκτίνων ΚΑ καὶ ΛΒ· ἐὰν δὲ γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ, ἡ ΛΓ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου τούτου (ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτῖνος ΚΓ). Ἀλλ' ἡ ΛΓ δύναται νὰ εὑρεθῇ· διότι εἶνε ἐφαπτομένη γνωστοῦ κύκλου (τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν διαφορὰν ΚΑ—ΛΒ) ἐκ τοῦ γνωστοῦ σημείου Λ. Εὑρεθείσης δὲ τῆς ΛΓ, εὑρίσκεται καὶ τὸ σημεῖον Α, ὡς ἄκρον τῆς ἀκτῖνος τῆς διὰ τοῦ Γ διερχομένης, καὶ τὸ Β, ὡς ἄκρον τῆς παραλλήλου ἀκτῖνος ΛΒ· ἄρα καὶ ἡ ΑΒ.



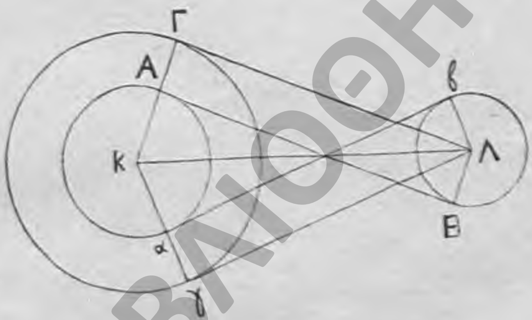
ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Μὲ κέντρον τὸ Κ (τοῦ μεγαλητέρου κύκλου) καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων ἂς γραφῇ περιφέρεια, ἂς ἀχθῇ δὲ ἐφαπτομένη αὐτῆς ἐκ τοῦ ἄλλου κέντρου Λ, ἡ ΛΓ· ἔπειτα ἂς ἀχθῇ διὰ τῆς ἐπαφῆς Γ ἡ ἀκτὶς ΚΑ τοῦ κύκλου Κ καὶ ἐκ τοῦ κέντρου Λ ἡ ἀκτὶς ΛΒ, παράλληλος τῇ ΚΑ καὶ τὴν αὐτὴν ἔχουσα φοράν· ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ εἶνε κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δύο κύκλων.

Διότι τοῦ σχήματος ΑΒΛΓ αἱ δύο πλευραὶ ΛΒ καὶ ΓΑ εἶνε παράλληλοι καὶ ἴσαι (διότι ἡ ΚΓ ἐλήφθη ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν ἀκτίνων)· ἄρα τὸ σχῆμα τοῦτο εἶνε παραλληλόγραμμον· εἶνε δὲ ὀρθογώνιον διότι ἡ γωνία αὐτοῦ Γ εἶνε ὀρθή· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας ΚΑ, ΛΒ εἰς τὰ ἄκρα αὐτῶν Α καὶ Β, θὰ εἶνε ἐφαπτομένη ἀμφοτέρων τῶν κύκλων.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἵνα ἐκ τοῦ Λ ἄγηται ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΚΓ, πρέπει τὸ σημεῖον Λ νὰ κεῖται ἢ ἐκτὸς τοῦ κύκλου τούτου ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ (οὐχὶ δὲ ἐντός)· ἤτοι νὰ εἶνε ἢ ΚΛ=ΚΓ ἢ ΚΛ>ΚΓ, πρέπει λοιπὸν τὸ ἀπόστημα τῶν κέντρων τῶν δοθέντων κύκλων νὰ μὴ εἶνε μικρότερον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων αὐτῶν. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον, ἐὰν ὁ εἷς κύκλος κεῖται ἐντὸς τοῦ ἄλλου· ἔχει δὲ μίαν λύσιν, ἐὰν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντός, δύο δὲ εἰς πᾶσαν ἄλλην θέσιν· διότι δύο ἐφαπτόμεναι ἄγονται, αἱ ΛΓ, Λγ.

β΄. ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω ἡ ΑΒ ἐφαπτομένη κοινὴ τῶν δοθέντων κύκλων καὶ ἔχουσα αὐτοὺς ἑκατέρωθεν αὐτῆς. Ἐὰν ἀχθῶσιν εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς Α καὶ Β αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΛΒ καὶ ἐκ τοῦ Λ παράλληλος τῇ ΑΒ ἡ ΛΓ, συναντῶσα εἰς τὸ Γ τὴν προσεκβολὴν τῆς ΚΑ, γίνεται τὸ σχῆμα ΑΒΓΛ ὀρθογώνιον· ἑπομένως ἡ ΛΓ θὰ ἐφάπτηται τοῦ κύκλου, τοῦ ὁποίου κέντρον εἶνε τὸ Κ καὶ ἀκτὶς ἡ ΚΓ, ἥτις ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι ΚΑ + ΛΒ τῶν ἀκτίνων· διότι ΑΓ = ΛΒ.

ΣΥΝΘΕΣΙΣ. Μὲ κέντρον τὸ Κ (τοῦ ἑνὸς κύκλου) καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῷ ἀθροίσματι τῶν ἀκτίνων ἂς γραφῇ περιφέρεια, ἂς ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ Λ ἐφαπτομένη αὐτῆς ἡ ΛΓ· ἔπειτα ἂς ἀχθῇ εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς Γ ἡ ἀκτὶς ΚΓ τέμνουσα τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὸ σημεῖον Α, καὶ ἐκ τοῦ Λ ἡ ἀκτὶς ΛΒ παράλληλος τῇ ΚΓ, ἀλλ᾽ ἐναντίαν ἔχουσα φοράν· ἡ ΑΒ θὰ εἶνε κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν δοθέντων κύκλων.



Διότι τοῦ σχήματος ΑΓΒΛ αἱ δύο πλευραὶ ΛΒ καὶ ΑΓ εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι (διότι ἐλήφθη ἡ ΚΓ ἴση τῷ ἀθροίσματι ΚΑ + ΛΒ)· ἄρα τὸ σχῆμα τοῦτο εἶνε παραλληλόγραμμον· εἶνε δὲ ὀρθογώνιον· διότι ἡ γωνία αὐτοῦ Γ εἶνε ὀρθή· καὶ ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶνε κάθετος εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων ΚΑ, ΛΒ, θὰ εἶνε ἐφαπτομένη ἀμφοτέρων τῶν κύκλων.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἵνα ἐκ τοῦ Λ ἄγηται ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου ΚΓ, πρέπει τὸ σημεῖον Λ νὰ κεῖται ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ, ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ, (οὐχὶ δὲ ἐντός)· ἤτοι νὰ εἶνε ἡ ΚΛ = ΚΓ ἢ ΚΛ > ΚΓ· πρέπει λοιπὸν τὸ ἀπόστημα ΚΛ τῶν κέντρων νὰ μὴ εἶνε μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἐὰν οἱ κύκλοι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, (διότι δύο τότε ἄγονται ἐφαπτόμεναι), μίαν δέ, ἐὰν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, οὐδεμίαν δέ, εἰς πᾶσαν ἄλλην θέσιν.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ (*)

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙ' ΑΥΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

165. Ὅταν πάντα τὰ σημεῖα, τὰ κοινήν τινα ἰδιότητα ἔχοντα, εὑρίσκωνται ἐπί τινος γραμμῆς, πάντα δὲ τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ταύτης ἔχωσι τὴν κοινὴν ἐκείνην ἰδιότητα, ἡ γραμμὴ λέγεται *γεωμετρικὸς τόπος*, ἢ ἁπλῶς *τόπος* τῶν σημείων τῶν τὴν ἰδιότητα ἐκείνην ἐχόντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1) Ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν ἡ ἀπόστασις ἀπὸ δοθέντος σημείου ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, εἶνε περιφέρεια κύκλου, κέντρον μὲν ἔχουσα τὸ δοθὲν σημεῖον, ἀκτῖνα δὲ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

2) Ὁ τόπος τῶν σημείων, ὧν ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ἰσοῦται τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α, εἶνε εὐθεῖα παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ἀπέχουσα ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην τῇ α (δύναται δὲ νὰ κεῖται ἢ πρὸς τὸ ἓν μέρος τῆς ΑΒ ἢ πρὸς τὸ ἕτερον).

3) Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσην ἀπόστασιν ἐχόντων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β εἶνε ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας ΑΒ, ἥτις συνδέει τὰ δοθέντα σημεῖα (104).

4) Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν δύο πλευρῶν δοθείσης γωνίας εἶνε ἡ διχοτομοῦσα τὴν γωνίαν ταύτην εὐθεῖα (108).

5) Ὁ τόπος τῶν σημείων, ἐξ ὧν αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς δύο δοθέντα σημεῖα Α,Β σχηματίζουσι γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ, εἶνε τὸ τόξον τοῦ τμήματος τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ γραφομένου καὶ τὴν γωνίαν Γ δεχομένου (136) (τοιαῦτα τόξα εἶνε δύο, ἓν πρὸς ἑκάτερον τῶν μερῶν τῆς εὐθείας ΑΒ).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τοῖς παραδείγμασι τούτοις, ὡς καὶ ἐν τοῖς ἑπομένοις πᾶσι, θεωροῦνται σημεῖα ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κείμενα.

ΛΥΣΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΔΙΑ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ

Ὅταν ἐν προβλήματι τὸ ζητούμενον εἶνε σημεῖόν τι (τοιαῦτα δὲ εἶνε τὰ πλεῖστα ἢ εἰς τοιαῦτα ἀνάγονται), τὸ σημεῖον τοῦτο ὀφείλει νὰ πληροῖ ἐπιτάγματά τινα, ἵνα λύῃ τὸ πρόβλημα.

Ἐν τῷ προβλήματι, παραδείγματος χάριν: «*νὰ γραφῇ περιφέρεια διὰ τριῶν σημείων δοθέντων διερχομένη*» ἄγνωστον κυρίως εἶνε τὸ κέντρον· τὸ δὲ σημεῖον τοῦτο ὀφείλει νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων.

(*) Τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους ἐπενόησεν ὁ φιλόσοφος Πλάτων.

Ἐν τῷ προβλήματι «*νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς δοθὲν τρίγωνον*» ἄγνωστον εἶνε τὸ κέντρον· ὀφείλει δὲ τοῦτο νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν.

Ὁμοίως ἐν τῷ προβλήματι «*νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου*» ἄγνωστον εἶνε τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς· ὀφείλει δὲ τοῦτο νὰ εἶνε κορυφὴ ὀρθῆς γωνίας, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ νὰ διέρχωνται, διὰ τοῦ δοθέντος σημείου ἡ μία, καὶ διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἡ ἄλλη.

Τούτων οὕτως ἐχόντων, ἐὰν εἶνε δύο τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος (ἢ δύνανται νὰ χωρισθῶσιν εἰς δύο), τὰ τὸ πρῶτον μόνον ἐπίταγμα πληροῦντα σημεῖα εἶνε ἐν γένει ἄπειρα τὸ πλῆθος καὶ ἔχουσι τόπον τινά, ὡσαύτως καὶ τὰ τὸ δεύτερον μόνον πληροῦντα· ἐπειδὴ δὲ τὸ ζητούμενον σημεῖον ὀφείλει νὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, θὰ εὑρίσκηται κατ' ἀνάγκην καὶ εἰς τὸν ἕνα τόπον καὶ εἰς τὸν ἄλλον· ἑπομένως θὰ εἶνε κοινὸν σημεῖον αὐτῶν· ἂν λοιπὸν ἐξεύρωμεν τοὺς δύο εἰρημένους τόπους, ἔχομεν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Οὕτω, παραδείγματος χάριν, ἵνα εὕρωμεν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ἔχομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον κέντρον Κ πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων· ἤτοι νὰ πληροῖ τὰ δύο ἐπιτάγματα

$$ΚΑ = ΚΒ \text{ καὶ } ΚΑ = ΚΓ$$

καὶ τὰ μὲν σημεῖα τὰ τὸ πρῶτον μόνον ἐπίταγμα πληροῦντα (ἤτοι τὰ ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τῶν δύο σημείων Α καὶ Β) ἔχουσι τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ, τὰ δὲ τὸ δεύτερον μόνον πληροῦντα ἔχουσι τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΓ· ἐπειδὴ δὲ τὸ Κ θὰ πληροῖ ἀμφότερα τὰ ἐπιτάγματα, ἀναγκαίως θὰ εὑρίσκηται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν καθέτων τούτων· ὥστε θὰ εἶνε ἡ τομὴ αὐτῶν.

Ὁμοίως, ἵνα εὕρωμεν τὸ κέντρον τῆς περιφερείας τῆς εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγραφησομένης, παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον κέντρον πρέπει νὰ ἀπέχῃ ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τριγώνου, ἤτοι νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα· 1) ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ νὰ εἶνε ἴση τῇ ἀποστάσει αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καὶ 2) ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ νὰ εἶνε ἴση τῇ ἀποστάσει αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Καὶ τὰ μὲν σημεῖα, ἅτινα πληροῦσι τὸ πρῶτον μόνον, ἔχουσι τόπον τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν Α, τὰ δὲ πληροῦντα τὸ δεύτερον μόνον ἔχουσι τόπον τὴν διχοτομοῦσαν τὴν γωνίαν Β· ἐπειδὴ δὲ τὸ κέντρον θὰ πληροῖ ἀμφότερα, θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν διχοτομουσῶν τούτων· ὥστε θὰ εἶνε ἡ τομὴ αὐτῶν.

Ὁμοίως ἐν τῷ προβλήματι: «*νὰ ἀχθῇ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου Κ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Α*» τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς ἐπαφῆς πρέπει νὰ πληροῖ τὸ ἐπίταγμα τοῦτο: αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Α νὰ σχηματίζωσιν ὀρθὴν γωνίαν· ἀλλὰ τὰ τὸ ἐπίταγμα τοῦτο πληροῦντα σημεῖα ἔχουσι τόπον τὴν ἐπὶ τῆς ΑΚ ὡς διαμέτρου γραφομένην περιφέρειαν (137)· ἐπ' αὐτῆς ἄρα θὰ κεῖται τὸ ζητούμενον σημεῖον· πρέπει δὲ νὰ εὑρίσκηται καὶ ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας· ἄρα εἶνε τομὴ αὐτῶν· ἐπειδὴ δὲ δύο τομαὶ ὑπάρχουσιν (ὅταν τὸ Α κεῖται ἐκτὸς τοῦ δοθέντος κύκλου), ἐπιδέχεται τὸ πρόβλημα δύο λύσεις.

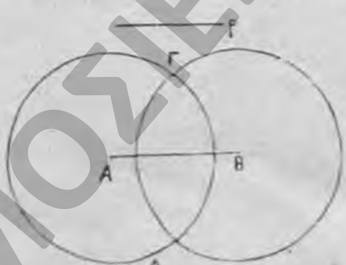
Ἐκ τούτων ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ γνῶσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἶνε χρησιμωτάτη εἰς τὴν ἀνάλυσιν τῶν προβλημάτων, ἑπομένως καὶ εἰς τὴν λύσιν αὐτῶν· τοῦτο γίνεται φανερὸν καὶ ἐκ τῶν ἑπομένων προβλημάτων· (παρατηρητέον δέ, ὅτι οἱ γεωμετρικοὶ τόποι, τοὺς ὁποίους θεωροῦμεν ἐνταῦθα, εἶνε ἡ εὐθεῖα καὶ ὁ κύκλος).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 22ον

166. *Ἐκ δύο σημείων αὐτῆς καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς νὰ γραφῇ ἡ περιφέρεια.*

Ἄγνωστον εἶνε τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἥτις πρέπει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα.

1) Νὰ διέρχηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Α καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ρ.



2) Νὰ διέρχηται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β καὶ νὰ ἔχῃ ἀκτῖνα ἴσην τῇ ρ.

Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ρ γραφομένην περιφέρειαν· ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ρ γραφομένην περιφέρειαν· ἑπομένως τὸ ζητούμενον κέντρον εἶνε τομὴ τῶν δύο τούτων περιφερειῶν καὶ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχῃ δύο μὲν λύσεις, ἂν τέμνωνται αἱ ῥηθεῖσαι περιφέρειαι, μίαν δέ, ἐὰν ἐφάπτωνται ἀλλήλων (ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἡ ΑΒ εἶνε διπλασία τῆς ρ) καὶ οὐδεμίαν, ἐὰν μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον (ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἡ ΑΒ ὑπερβαίνῃ τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ρ).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 23ον

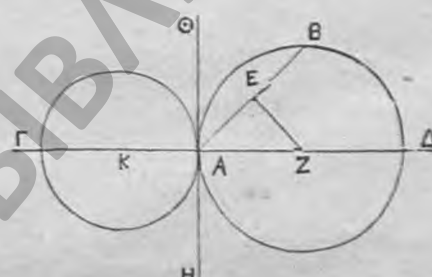
167. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ διερχομένη διὰ τοῦ δοθέντος σημείου Β.*

Ἄγνωστον εἶνε τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας· πρέπει δὲ νὰ πληροῖ αὕτη τὰ ἑξῆς δύο ἐπιτάγματα·

1) νὰ διέρχηται διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β·

2) νὰ ἐφάπτηται τοῦ κύκλου Κ εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἀλλὰ τῶν περιφερειῶν, αἵτινες πληροῦσι μόνον τὸ πρῶτον ἐπίταγμα, τὰ κέντρα ἔχουσι τόπον τὴν κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΒ (διότι ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Α καὶ Β), τῶν δὲ περιφερειῶν, αἵτινες πληροῦσι μόνον τὸ δεύτερον, τὰ κέντρα ἔχουσι τόπον τὴν εὐθεῖαν ΓΔ, ἥτις διέρχεται διὰ τῶν σημείων Κ καὶ Α· ἄρα ἡ ζητουμένη περιφέρεια θὰ ἔχῃ τὸ κέντρον της καὶ ἐπὶ τῆς ΕΖ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΔ· ὥστε ἡ τομὴ Ζ τῶν εὐθειῶν τούτων εἶνε τὸ ζητούμενον κέντρον· τούτου δὲ εὑρεθέντος, ἐλύθη τὸ πρόβλημα.



ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον, ἂν αἱ δύο εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΕΖ εἶνε παράλληλοι, ἤτοι ἂν ἡ ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ· ἂν δηλονότι τὸ Β δοθῇ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΗΘ τοῦ κύκλου Κ εἰς τὸ Α. Εἰς πᾶσαν δ' ἄλλην περίπτωσιν εἶνε δυνατόν· ἐφάπτονται δὲ οἱ κύκλοι ἀλλήλων, ἐκτὸς μέν, ὅταν τὸ Ζ πίπτῃ (ὡς ἐν τῷ σχήματι) πέραν τοῦ Α, ἐντὸς δέ, ὅταν τὸ Ζ πίπτῃ ὄπισθεν τοῦ Α.

Ἐὰν τὸ κέντρον Ζ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Κ, αἱ δύο περιφέρειαι ταὐτίζονται· συμβαίνει δὲ τοῦτο, ὅταν ἡ ΑΒ εἶνε χορδὴ τοῦ δοθέντος κύκλου, ἤτοι ὅταν τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς δοθείσης περιφερείας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 24ον

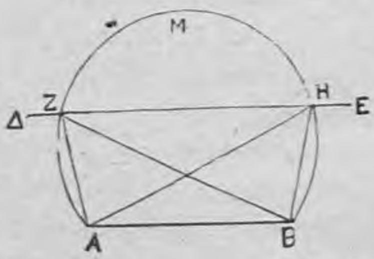
168. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος ἐδόθησαν ἡ βάσις ΑΒ, τὸ ὕψος υ καὶ ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία Γ.*

Ὕψος τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

Ἄγνωστος εἶνε ἡ κορυφὴ Γ τοῦ τριγώνου, ὅπερ ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ δύο ταῦτα·

1) νὰ ἔχῃ ὕψος ἴσον τῷ υ,

2) νὰ ἔχῃ γωνίαν ἀπέναντι τῆς βάσεως ἴσην τῇ Γ.



Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον πληροῖ, ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου ἔχει τόπον τὴν εὐθεῖαν ΔΕ, παράλληλον τῇ ΑΒ καὶ ἀπέχουσαν ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην τῷ υ· ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ ἔχει τόπον τὸ τόξον ΑΜΒ τοῦ τμήματος τοῦ ἐπὶ τῆς ΑΒ γραφομένου (πρὸς ὃ μέρος κεῖται ἡ ΔΕ) καὶ τὴν γωνίαν Γ δεχομένου. Ἐπειδὴ δὲ πρέπει να πληροῖ ἀμφότερα, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ θὰ εἶνε τομὴ τοῦ ῥηθέντος τόξου καὶ τῆς εὐθείας ΕΔ· ὥστε τὰ τὸ πρόβλημα λύοντα τρίγωνα εἶνε τὰ ΑΒΖ καὶ ΑΒΗ, ἅτινα εἶνε ἴσα· ἑπομένως ὑπάρχει μία μόνον λύσις.

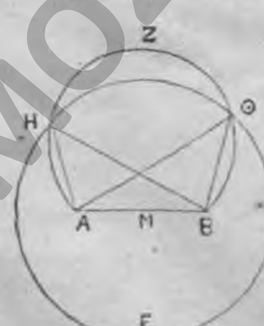
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον, ἂν τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ὑπερβαίνῃ τὸ ὕψος τοῦ τμήματος, τουτέστι τὴν ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τόξου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως ΑΒ ἀγομένην εὐθεῖαν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 25ον

169. *Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος ἐδόθησαν ἡ βάσις ΑΒ, ἡ ἀπέναντι γωνία Γ καὶ ἡ ἐξ αὐτῆς διάμεσος Δ.*

Διάμεσος τριγώνου λέγεται ἡ ἐκ μιᾶς κορυφῆς εἰς τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἠγμένη εὐθεῖα.

Ἄγνωστος εἶνε ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου, ὅπερ ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ ἑξῆς·



1ον) νὰ ἔχῃ γωνίαν ἀπέναντι τῆς βάσεως ἴσην τῇ δοθείσῃ Γ.

2ον) νὰ ἔχῃ διάμεσον τῆς βάσεως ΑΒ ἴσην τῇ δοθείσῃ Δ.

Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον πληροῖ, ἡ κορυφὴ τοῦ τριγώνου ἔχει τόπον τὸ τόξον ΑΗΖΘΒ τοῦ τμήματος, ὅπερ γράφεται ἐπὶ τῆς ΑΒ καὶ δέχεται τὴν γωνίαν Γ· ἂν δὲ μόνον τὸ δεύτερον πληροῖ, ἡ κορυφὴ αὐτοῦ, ὡς ἀπέχουσα ἀπὸ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ ἀπόστασιν ἴσην τῇ Δ, ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Μ καὶ ἀκτῖνα τὴν Δ γραφομένην περιφέρειαν· ἄρα ἡ ζητουμένη κορυφὴ εἶνε τομὴ τῶν περιφερειῶν τούτων καὶ τὰ τρίγωνα τὰ λύοντα τὸ πρόβλημα εἶνε τὰ ΑΒΗ καὶ ΑΒΘ, ἅτινα εἶνε ἴσα· ἑπομένως ὑπάρχει μία μόνη λύσις.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἵνα τὸ πρόβλημα λυθῇ, πρέπει ἡ περιφέρεια Ι νὰ τέμνῃ τὸ τόξον ΑΖΒ τοῦ τμήματος. Πρὸς τοῦτο, ἂν μὲν ἡ διάμεσος εἶνε μεγαλητέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως (ὡς ἐν τῷ σχήματι), ἀνάγκη νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὸ ὕψος τοῦ τμήματος· ἂν δὲ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως, ἀνάγκη νὰ μὴ εἶνε μικροτέρα τοῦ ὕψους τοῦ τμήματος (τουτέστι πρέπει ἡ διάμεσος νὰ περιλαμβάνηται μεταξὺ τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους τοῦ τμήματος). Ἂν δὲ τέλος ἡ διάμεσος εἶνε ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως (ὅτε αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουσι τὰ δύο σημεῖα Α καὶ Β κοινά, ἑπομένως ἢ οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν ἢ ταυτίζονται), τὸ πρόβλημα εἶνε ἀδύνατον μέν, ἐὰν ἡ δοθεῖσα γωνία διαφέρῃ τῆς ὀρθῆς, ἀόριστον δέ, ἐὰν εἶνε ὀρθή· διότι τότε αἱ δύο περιφέρειαι ταυτίζονται καὶ πᾶν σημεῖον τοῦ τόξου ΑΖΒ εἶνε κορυφὴ τριγώνου λύοντος τὸ πρόβλημα.

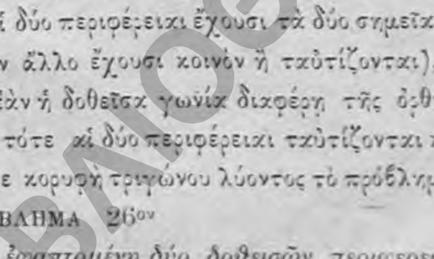
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 26ον

170. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ἐκτὸς καὶ ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α.*

Ἄγνωστον εἶνε τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἥτις ὀφείλει νὰ πληροῖ τὰ δύο ταῦτα·

1) νὰ ἐφάπτηται τῆς δοθείσης περιφερείας Κ ἐκτός, ἔχουσα ἀκτῖνα α.

2) νὰ ἐφάπτηται τῆς δοθείσης περιφερείας Λ ἐκτός, ἔχουσα ἀκτῖνα α.



Ἀλλ' ἂν μόνον τὸ πρῶτον πληροῖ, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ Κ ἀπόστασιν ἴσην τῷ ἀθροίσματι ΚΑ+α (127)· ἑπομένως ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ+α γραφομένην περιφέρειαν Γ· ἂν δὲ πάλιν πληροῖ μόνον τὸ δεύτερον, τὸ κέντρον της ἔχει τόπον τὴν μὲ κέντρον τὸ Λ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΛΒ+α γραφομένην περιφέρειαν Δ· ὥστε τὸ ζητούμενον κέντρον εἶνε τομὴ τῶν δύο περιφερειῶν Γ καὶ Δ. Ἑπομένως τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, ἂν αἱ περιφέρειαι Γ, Δ τέμνωνται (ὡς ἐν τῷ σχήματι)· μίαν μόνην, ἂν ἐφάπτωνται ἀλλήλων καὶ οὐδεμίαν, ἂν μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.

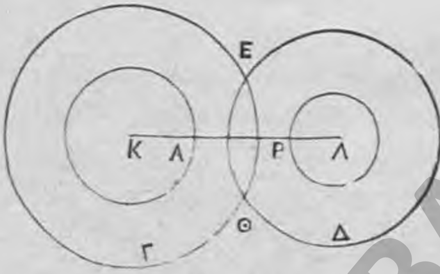
ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν δύο γραφομένων περιφερειῶν εἶνε ΚΛ, αἱ δὲ ἀκτῖνες αὐτῶν εἶνε $\alpha+ΚΑ$ καὶ $\alpha+ΛΒ$· ἑπομένως, ἵνα τέμνωνται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶνε

$$ΚΛ > ΚΑ - ΛΒ \quad \text{καὶ} \quad ΚΛ < 2\alpha + ΚΑ + ΛΒ.$$

Ἡ πρώτη ἀνισότης δεικνύει, ὅτι αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι δὲν πρέπει νὰ εἶνε ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης· ἡ δὲ δευτέρα πληροῦται ἀφ' ἑαυτῆς, ἂν εἶνε $ΚΛ \leqq ΚΑ+ΛΒ$, τουτέστιν, ἂν αἱ δύο περιφέρειαι τέμνωσιν ἀλλήλας ἢ ἂν ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός· ἂν ὅμως τοὐναντίον εἶνε $ΚΛ > ΚΑ+ΛΒ$, ἤτοι ἂν αἱ δοθεῖσαι περιφέρειαι εἶνε ἐκτὸς ἀλλήλων, ἀνάγκη νὰ εἶνε

$$2\alpha > ΚΛ - (ΚΑ + ΛΒ),$$

ἤτοι νὰ ὑπερβαίνῃ ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς διπλῆ τὸ ἐκτὸς τῶν κύκλων κείμενον μέρος τῆς εὐθείας τῶν κέντρων.



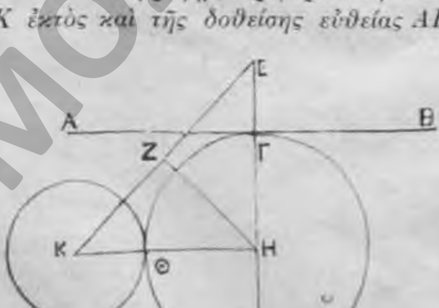
Αἱ περιφέρειαι Γ καὶ Δ ἐφάπτονται ἀλλήλων ἐντός, ἂν εἶνε $ΚΛ = ΚΑ - ΛΒ$, ἤτοι ἂν τὸ αὐτὸ ποιῶσι καὶ αἱ δοθεῖσαι.

Ἐφάπτονται δ' ἀλλήλων ἐκτός, ἐὰν εἶνε $ΚΛ = 2\alpha + ΚΑ + ΛΒ$, ἤτοι $2\alpha = ΚΛ - ΚΑ - ΛΒ$, τουτέστιν ἂν ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα διπλῆ εἶνε ἴση μὲ τὸ ἐκτὸς τῶν δοθέντων κύκλων κείμενον τμῆμα τῆς εὐθείας τῶν κέντρων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καθ' ὅμοιον τρόπον λύεται καὶ διερευνᾶται τὸ πρόβλημα, καὶ ὅταν ἐπιταχθῇ νὰ ἐφάπτηται ὁ κύκλος ἀμφοτέρων τῶν δοθέντων ἐντός, ἢ τοῦ μὲν ἐντός, τοῦ δ' ἄλλου ἐκτός.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 27ον

171. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς δοθείσης περιφερείας Κ ἐκτὸς καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ εἰς δοθὲν σημεῖον Γ.*



Ἐπειδὴ ἡ ζητουμένη περιφέρεια θὰ ἐφάπτηται τῆς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΔ, ἥτις ἐκ τοῦ Γ ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ θὰ ἐφάπτηται καὶ τοῦ κύκλου Κ ἐκτός, τὸ κέντρον αὐτῆς θὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τοῦ Κ περισσότερον ἢ ἀπὸ τοῦ Γ, καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τούτων θὰ εἶνε ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΘ τοῦ δοθέντος κύκλου· ἂν λοιπὸν προσεκβάλωμεν τὴν ΓΔ πέραν τοῦ Γ καὶ λάβωμεν ΓΕ=ΚΘ, τὸ ζητούμενον κέντρον θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Ε καὶ Κ καὶ διὰ τοῦτο θὰ εὑρίσκηται ἐπὶ τῆς ΖΗ, καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΚΕ. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας εἶνε τὸ σημεῖον Η, εἰς ὃ αἱ δύο αὗται κάθετοι τέμνονται.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται τὸ πρόβλημα, καὶ ὅταν ἐπιταχθῇ νὰ ἐφάπτηται ἡ περιφέρεια τῆς δοθείσης περιφερείας ἐντός, περιέχουσα αὐτὴν ἢ περιεχομένη ὑπ' αὐτῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται καὶ τὸ ἑξῆς·

«Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν, μιᾶς δὲ τούτων εἰς δοθὲν σημεῖον».

Διότι ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὴν περιφέρειαν ταύτην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Α'. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1) Ἡ περίμετρος κυρτοῦ σχήματος τέμνεται ὑπ' εὐθείας τὸ πολὺ εἰς δύο σημεῖα. Καὶ πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἑνώνει δύο σημεῖα κυρτοῦ σχήματος, κεῖται ὅλη (τὸ μεταξὺ τῶν δύο σημείων μέρος) ἐντὸς τοῦ σχήματος.

2) Ἐν τῷ ῥόμβῳ ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν εἶνε δι' ὅλας ἡ αὐτὴ (καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει).

3) Δοθείσης γωνίας, ὡς τῆς ΒΑΓ, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς δύο τυχόντα τμήματα ΑΔ, ΑΕ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης δύο ἄλλα ΑΔ', ΑΕ' ἴσα πρὸς τὰ ΑΔ, ΑΕ, αἱ εὐθεῖαι ΔΕ' καὶ Δ'Ε τέμνονται ἐντὸς τῆς γωνίας καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν εἶνε σημεῖον τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν· (ἐφαρμογὴ εἰς τὴν διχοτομίαν τῶν γωνιῶν).

4) Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διχοτομῇ καὶ τὴν ἀπέναντι πλευράν, τὸ τρίγωνον εἶνε ἰσοσκελές.

5) Ἐὰν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου, ἀχθῇ παράλληλος μιᾷ τῶν πλευρῶν, ἡ παράλληλος αὕτη θὰ εἶνε ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μερῶν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἅτινα περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων.

6) Ἐὰν ἐκ τριῶν κύκλων ἕκαστος ἐφάπτηται τῶν δύο ἄλλων, αἱ εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἁφῆς ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων τούτων τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον.

7) Αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν τριγώνου ἀγόμεναι παράλληλοι πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς σχηματίζουσι νέον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶνε διπλάσιαι τῶν πρὸς αὐτὰς παραλλήλων πλευρῶν τοῦ πρώτου καὶ τὸ ὁποῖον εἶνε τετραπλάσιον τοῦ πρώτου.

8) Τὰ τρία ὕψη παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον. (Διὰ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἀνάγεται τοῦτο εἰς τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 154, Σημ. β'.)

9) Παντὸς πολυγώνου περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, οὗ ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶνε ἄρτιος, τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν περιττῆς τάξεως (πρώτης, τρίτης κτλ.) εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἀρτίας τάξεως· ὡς πρώτη δὲ πλευρὰ δύναται νὰ ληφθῇ οἱαδήποτε πλευρὰ αὐτοῦ.

10) Παντὸς πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, οὗτινος ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν εἶνε ἄρτιος, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν περιττῆς τάξεως εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἀρτίας τάξεως· ὡς πρώτη δὲ γωνία δύναται νὰ ληφθῇ μία οἱαδήποτε γωνία αὐτοῦ.

11) Ἐὰν εἰς τὸ τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ ἐφ' ἑκάστης πλευρᾶς κατασκευασθῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον, $ΑΒΓ_1$, $ΒΓΑ_1$, $ΑΓΒ_1$, ἐκτὸς τούτου, καὶ ἀχθῶσιν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφὴν τοῦ τριγώνου μετὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι εἶνε ἴσαι καὶ τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς ἓν σημεῖον Ο, σχηματίζουσι δὲ εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν ἓξ γωνίας ἴσας· προσέτι δὲ εἶνε $ΟΑ + ΟΒ = ΟΓ_1$, κλπ.

12) Ἐὰν εἰς δύο περιφερείας ὑπάρχωσι δύο ἐγγεγραμμένα τρίγωνα ἴσα ἀλλήλοις, αἱ δύο περιφέρειαι εἶνε ἴσαι.

13) Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι χορδαὶ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ αἱ ἄνισοι ἀπέχουσιν ἄνισον· ἡ μεγαλητέρα ὀλιγώτερον.

14) Νὰ δειχθῇ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος (140), τουτέστιν, ὅτι, ἐὰν τετραπλεύρου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν εἶνε δύο ὀρθαί, τὸ τετράπλευρον τοῦτο εἶνε ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

15) Ἐὰν δύο παράλληλοι τέμνωσι κύκλον, τὰ μεταξὺ αὐτῶν περιεχόμενα τόξα εἶνε ἴσα.

16) Ἐὰν τριγώνου δύο ὕψη εἶνε ἴσα, καὶ αἱ πλευραί, ἐφ' ὧν ἵστανται κάθετα, εἶνε ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως.

17) Να δειχθῇ, ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουσι τὰς κορυφὰς μὲ οἱονδήποτε σημεῖον τοῦ τριγώνου, ἔχουσι ἄθροισμα μικρότερον μὲν τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου, μεγαλήτερον δὲ τοῦ ἡμίσεος τῆς περιμέτρου.

18) Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 75 ἀληθεύει καὶ περὶ παντὸς ἁπλοῦ πολυγώνου.

19) Αἱ 4 διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας παντὸς παραλληλογράμμου σχηματίζουσιν ὀρθογώνιον· αἱ δὲ 4 διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας παντὸς ὀρθογωνίου σχηματίζουσιν τετράγωνον, ἡ δὲ διαγώνιος τοῦ τετραγώνου τούτου εἶνε ἴση τῇ διαφορᾷ τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου.

Β΄. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΠΡΟΣ ΕΥΡΕΣΙΝ

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος

1) τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ δοθέντος κύκλου, αἵτινες εἶνε ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

2) τῶν μέσων τῶν χορδῶν τοῦ δοθέντος κύκλου, αἵτινες διέρχονται διὰ τοῦ δοθέντος σημείου.

3) τοῦ μέσου εὐθείας, ἥτις κινεῖται οὕτως, ὥστε τα ἄκρα αὐτῆς νὰ μένωσιν ἐπὶ δύο εὐθειῶν τεμνομένων πρὸς ὀρθάς.

4) τῶν ἄκρων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τῶν σημείων δοθείσης περιφερείας ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

5) τῶν σημείων, ἐξ ὧν αἱ ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι τοῦ δοθέντος κύκλου εἶνε ἴσαι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, ἢ σχηματίζουσι δοθεῖσαν γωνίαν.

6) τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἵτινες ἄγονται ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

7) τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἵτινες ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας.

Γ'. ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΛΥΣΙΝ

Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἐκ τῶν ἑξῆς στοιχείων αὐτοῦ:

1) Ἐκ δύο πλευρῶν καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.

2) Ἐκ δύο πλευρῶν καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

3) Ἐκ μιᾶς πλευρᾶς καὶ τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

4) Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ ἐκ μιᾶς τῶν εἰρημένων ἀκτίνων.

5) Ἐκ τῆς βάσεως, ἐκ τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν (περίπτωσις, καθ' ἣν ἡ γωνία εἶνε ὀρθή).

6) Ἐκ τῶν γωνιῶν καὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματος δύο πλευρῶν.

7) Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον, οὗ ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ νὰ ἔχωσιν ἄθροισμα ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

8) Νὰ κατασκευασθῇ ῥόμβος ἔχων διαγωνίους ἴσας πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.

9) Νὰ γραφῇ κύκλος μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.

ἢ δοθείσης περιφερείας καὶ δοθείσης εὐθείας, ἢ διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας.

10) Νὰ γραφῇ κύκλος ἔχων κέντρον δοθὲν σημεῖον καὶ τέμνων τὸν δοθέντα κύκλον οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ νὰ εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

11) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος αὐτῆς νὰ εἶνε ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

12) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζηται τρίγωνον ἰσοσκελές.

13) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου κείμενον τμῆμα αὐτῆς νὰ εἶνε ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

14) Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθέντας κύκλους οὕτως, ὥστε τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ἀπολαμβανόμενα τμήματα αὐτῆς νὰ εἶνε ἴσα πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας Α καὶ Β.

15) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

16) Δεδομένων τῶν τριῶν σημείων, ἅτινα εἶνε μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον.

17) Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ τέμνουσα δεδομένην περιφέρειαν οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ αὐτῶν χορδὴ νὰ εἶνε παράλληλος δεδομένῃ εὐθείᾳ.

18) Περὶ τὸ δοθὲν τετράπλευρον νὰ περιγραφῇ τετράγωνον.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΚΟΙΝΟΥ ΜΕΤΡΟΥ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

172. *Κοινὸν μέτρον* δύο εὐθειῶν λέγεται εὐθεῖα, ἐξ ἧς ἐπαναλαμβανομένης ἀποτελοῦνται ἀμφότεραι.

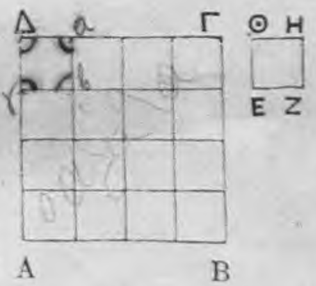
Αἱ κοινὸν μέτρον ἔχουσαι εὐθεῖαι λέγονται *σύμμετροι* πρὸς ἀλλήλας, αἱ δὲ μὴ ἔχουσαι, *ἀσύμμετροι* (ὅτι δὲ ὑπάρχουσι τοιαῦται εὐθεῖαι, θὰ δειχθῇ ἐν τοῖς ἑπομένοις).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ τὸ κοινὸν μέτρον δύο οἱωνδήποτε ποσῶν ὁμοειδῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

173. *Ἐὰν εὐθεῖα σύγκειται ἐξ ἄλλης ϱ φορὰς λαμβανομένης, τὸ τετράγωνον αὐτῆς σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου τῆς ἄλλης λαμβανομένου ϱ. ϱ φοράς.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ τετραπλασία τῆς ΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ τετράγωνον αὐτῆς, τὸ ΑΒΓΔ, εἶνε 4.4 ἤτοι 16πλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ΕΖ.



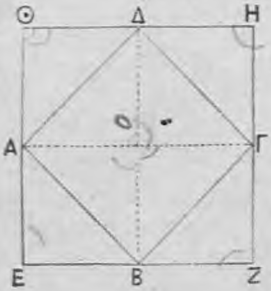
Ἂς διαιρεθῇ ἑκατέρα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ εἰς 4 ἴσα μέρη (ὧν ἕκαστον εἶνε ἴσον τῇ ΕΖ) καὶ ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας ἂς ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἄλλῃ· αἱ παράλληλοι αὗται θὰ διαιρέσωσι τὸ τετράγωνον εἰς 4.4, ἤτοι 16 μέρη (διότι αἱ μὲν παράλληλοι τῇ ΑΔ διαιροῦσι πρῶτον αὐτὸ εἰς 4 ἴσα ὀρθογώνια, αἱ δὲ παράλληλοι τῇ ΑΒ διαιροῦσιν ἔπειτα ἕκαστον τῶν ὀρθογωνίων τούτων εἰς 4), τὰ δὲ μέρη ταῦτα εἶνε τετράγωνα ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς πάσας ἴσας τῇ ΕΖ. Σύγκειται ἄρα τὸ τετράγωνον ΑΒΓΔ ἐκ 16 τετραγώνων ἴσων τῷ ΕΖΗΘ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ πάντα ἀριθμόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

174. *Τὸ ἐπὶ τῆς διαγωνίου τετραγώνου κατασκευαζόμενον τετράγωνον εἶνε διπλάσιον αὐτοῦ.*

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ καὶ διαγώνιοι αὐτοῦ αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ· ἐὰν ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΑΓ ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΒΔ καὶ τἀνάπαλιν ἀπὸ τῶν ἄκρων τῆς ΒΔ ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΑΓ, γίνεται τὸ παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ, ὅπερ εἶνε τετράγωνον· διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶνε ὀρθαί, ὡς ἴσαι (67) μὲ τὰς γωνίας τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ (αἵτινες εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας), καὶ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ εἶνε ἴσαι, ὡς ἴσαι (111) πρὸς τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΒΔ τοῦ τετραγώνου· (αἵτινες διαγώνιοι εἶνε ἴσαι).



Τὸ δὲ τετράγωνον τοῦτο ἀποτελεῖται ἐξ 8 ὀρθογωνίων τριγώνων ἴσων ἀλλήλοις (διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶνε ἴσαι, μία πρὸς μίαν), καὶ ἐκ τῶν ὁποίων τέσσαρα ἀποτελοῦσι τὸ ΑΒΓΔ. Ἄρα τὸ τετράγωνον ΕΖΗΘ εἶνε διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

175. *Ἡ διαγώνιος παντὸς τετραγώνου εἶνε ἀσύμμετρος πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ.*

Διότι ἂς ὑποτεθῇ, ὅτι τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἡ διαγώνιος ΑΓ καὶ ἡ πλευρὰ ΑΒ ἔχουσι κοινόν τι μέτρον· ἔστω δὲ τοῦτο ἡ εὐθεῖα ΠΡ, καὶ ἂς ἀποτελῇ ἡ ΠΡ τὴν μὲν διαγώνιον, ὅταν ληφθῇ μ φοράς, τὴν δὲ πλευράν, ὅταν ν φοράς· τότε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, τὸ μὲν τετράγωνον τῆς διαγωνίου θὰ σύγκειται ἐκ μ.μ ἴσων τετραγώνων ἐχόντων πλευρὰν τὴν ΠΡ, τὸ δὲ τετράγωνον ΑΒΓΔ θὰ σύγκειται ἐκ ν.ν τοιούτων τετραγώνων. Ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαγωνίου ΑΓ εἶνε διπλάσιον τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς μ. μ εἶνε διπλάσιος τοῦ ν. ν, τουτέστι $\mu . \mu = 2 . \nu . \nu$, ἢ $\mu^2 = 2\nu^2$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται $\frac{\mu^2}{\nu^2} = 2$, ἢ $\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 = 2$.

Θὰ ἦτο λοιπὸν ὁ 2 τετράγωνον ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἢ κλασματικοῦ (διότι οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν εἶνε ἀκέραιοι)· ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον· (Στοιχ. Ἀλγέβρ. σελ. 120), ὥστε συμπεραίνομεν, ὅτι *κοινὸν μέτρον τῆς πλευρᾶς τετραγώνου καὶ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ δὲν ὑπάρχει.*

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

176. *Μέτρησις* μεγέθους λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ὡρισμένον, τὸ ὁποῖον λέγεται *μονάς*. Τῆς συγκρίσεως δὲ ταύτης σκοπὸς εἶνε νὰ εὕρωμεν, πόσαι μονάδες καὶ πόσα καὶ ὁποῖα μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ μέγεθος, ἤτοι πῶς ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ μέγεθος.

177. Τὸ μέγεθος, ὅπερ ἐλήφθη ὡς μονάς, παρίσταται διὰ τῆς μονάδος 1, τὸ δὲ μετρηθὲν μέγεθος παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον ἀποτελεῖται τὸ μετρηθὲν μέγεθος ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς. Ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶνε τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, τὸ μετρηθὲν μέγεθος εὑρέθη ἀποτελούμενον ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεος αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ πέμπτου αὐτῆς, ὁ παριστῶν αὐτὸ ἀριθμὸς θὰ εἶνε

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}, \text{ ἤτοι } \frac{17}{10}.$$

178. Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως γραμμῆς προκύπτων ἀριθμός, ὁ παριστῶν αὐτήν, λέγεται *μῆκος* αὐτῆς· ὁ δὲ ἐκ τῆς καταμετρήσεως ἐπιφανείας προκύπτων, ὁ καὶ παριστῶν αὐτήν, λέγεται *ἐμβαδὸν* αὐτῆς.

Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν μέγεθός τι, δυνάμεθα προδήλως νὰ μετρήσωμεν τὰ μέρη του καὶ νὰ ἀθροίσωμεν ἔπειτα τοὺς ἐκ τῶν μετρήσεων τούτων προκύπτοντας ἀριθμούς.

179. Τὰ ἴσα σχήματα, εἴτε ἀκέραια ἐφαρμόζουσιν εἴτε διῃρημένα, παρίστανται ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν· διότι σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν. Καὶ ἀντιστρόφως τὰ ὑπὸ ἴσων ἀριθμῶν παριστώμενα ὁμοειδῆ σχήματα εἶνε ἴσα, εἴτε ἀκέραια εἴτε κατὰ μέρη· διότι ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν τῆς μονάδος.

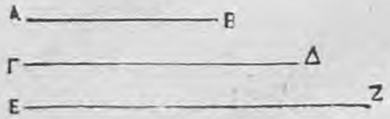
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

180. *Ἐὰν εὐθεῖα οἱαδήποτε ληφθῇ ὡς μονὰς καὶ παρασταθῇ διὰ τοῦ 1, αἱ μὲν σύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα εὐθεῖαι παρίστανται διὰ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν* (οἵτινες διὰ τοῦτο λέγονται σύμμετροι), *αἱ δὲ ἀσύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα παρίστανται δι'*

ἀριθμῶν, οἵτινες οὔτε ἀκέραιοι εἶνε οὔτε κλάσματα, ἀλλ' ἔχουσιν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ (οἵτινες διὰ τοῦτο λέγονται *ἀσύμμετροι*).

Ἔστω μονὰς τῶν εὐθειῶν ἡ ΑΒ καὶ τυχοῦσα εὐθεῖα σύμμετρος πρὸς αὐτὴν ἡ ΓΔ· ἐὰν τὸ κοινὸν αὐτῶν μέτρον περιέχηται ἐν τῇ ΑΒ τρίς, ἐν δὲ τῇ ΓΔ τετράκις, τὸ κοινὸν τοῦτο μέτρον θὰ εἶνε τὸ τρίτον τῆς μονάδος ΑΒ καὶ θὰ ἀποτελῆται ἡ ΓΔ ὑπὸ τοῦ τρίτου τῆς ΑΒ ληφθέντος τετράκις· ἑπομένως θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ



$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},\ \text{ἤτοι}\ \frac{4}{3}.$$

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν εὐθεῖά τις παριστᾶται ὑπὸ ἀκεραίου ἢ ὑπὸ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ, ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶνε σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα.

Διότι, ἄν τις παραδείγματος χάριν παριστᾶται ὑπὸ τοῦ 4, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος τετράκις ληφθείσης· εἶνε λοιπὸν σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα, καὶ κοινὸν μέτρον αὐτῶν εἶνε αὐτὴ ἡ μονάς. Ἂν δέ τις παριστᾶται ὑπὸ τοῦ $\frac{3}{5}$, ἤτοι $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$, ἡ εὐθεῖα αὕτη ἀποτελεῖται ὑπὸ τοῦ πέμπτου τῆς μονάδος τρὶς ληφθέντος· τὸ αὐτὸ δὲ πέμπτον τῆς μονάδος ἀποτελεῖ καὶ τὴν μονάδα πεντάκις ληφθέν· ὥστε εἶνε κοινὸν μέτρον τῆς μονάδος καὶ τῆς εὐθείας, ἥτις διὰ τοῦτο εἶνε σύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα.

Ἔστω νῦν εὐθεῖα ἀσύμμετρος πρὸς τὴν μονάδα ἡ ΕΖ· ἵνα μετρήσωμεν αὐτήν, παραβάλλομεν αὐτὴν πρῶτον πρὸς τὴν μονάδα ΑΒ, ὅτε θὰ εὕρωμεν (κατὰ τὸ 6ον ἀξίωμα τῆς εὐθείας), ὅτι σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου αὐτῆς (ἔστω τοῦ ρ) καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου Μ μικροτέρου τῆς ΑΒ· ἔπειτα συγκρίνομεν τὸ Μ πρὸς τὸ δέκατον τῆς ΑΒ, ὅτε θὰ εὕρωμεν, ὅτι σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου τοῦ δεκάτου τούτου (μὴ ὑπερβαίνοντος τὸ 9), ἔστω τοῦ ρ_1, καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου Σ μικροτέρου τοῦ δεκάτου. Ὡσαύτως τὸ ὑπόλοιπον Σ θὰ σύγκειται ἔκ τινος πολλαπλασίου τοῦ ἑκατοστοῦ τῆς ΑΒ (τοῦ ρ_2), καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε θὰ σύγκειται ἡ δοθεῖσα γραμμὴ ἐκ τῆς μονάδος ΑΒ ληφθείσης ρ φορὰς καὶ ἐκ τοῦ δεκάτου αὐτῆς ληφθέντος ρ_1 φορὰς καὶ ἐκ τοῦ ἑκατοστοῦ αὐτῆς ληφθέντος ρ_2 φορὰς καὶ οὕτω καθεξῆς εἰς ἄπειρον· ἑπομένως θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ

$$\rho + \frac{\rho_1}{10} + \frac{\rho_2}{100} + \ldots$$

Τὰ δεκαδικὰ ψηφία ρ_1, ρ_2, . . . τοῦ ἀριθμοῦ τούτου εἶνε ἄπειρα τὸ πλῆθος (τουτέστιν ὅλαι αἱ μετρήσεις ἀφίνουσιν ὑπόλοιπα), οὐδὲ ἔχουσι περίοδον· ἄλλως θὰ ἦτο ὁ ἀριθμὸς σύμμετρος· ἑπομένως καὶ ἡ ΕΖ σύμμετρος πρὸς τὴν ΑΒ· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν τόξων τοῦ αὐτοῦ κύκλου, διότι καὶ ταῦτα συγκρίνονται πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ (34), ἔτι δὲ καὶ περὶ τῶν γωνιῶν· ἀποδεικνύεται δὲ ὁμοίως.

Σημ. Ἀντὶ νὰ μετρήσωμεν τὸ ὑπόλοιπον Μ διὰ τοῦ δεκάτου τῆς μονάδος ΑΒ, δυνάμεθα νὰ δεκαπλασιάσωμεν πρῶτον αὐτὸ καὶ ἔπειτα νὰ μετρήσωμεν διὰ τῆς μονάδος ΑΒ· ὁμοίως καὶ τὰ ἄλλα ὑπόλοιπα.

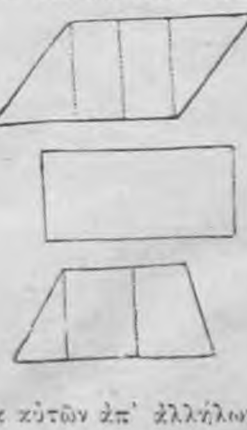
ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

181. Ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν.

Βάσις τριγώνου λέγεται μία τις τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, *ὕψος* δὲ ἡ ἐπὶ τὴν βάσιν ἐκ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς ἠγμένη κάθετος. Δύναται δὲ ἡ κάθετος αὕτη νὰ πέσῃ εἴτε ἐπ' αὐτὴν τὴν βάσιν, εἴτε ἐπὶ τὴν προσεκβολὴν αὐτῆς.

Βάσις παραλληλογράμμου λέγεται ἑκατέρα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν, *ὕψος* δὲ τὸ ἀπόστημα τῶν πλευρῶν τούτων ἀπ' ἀλλήλων. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶνε παράλληλοι, πᾶσαι αἱ μεταξὺ αὐτῶν κάθετοι εἶνε ἴσαι ἀλλήλαις καὶ δύναται οἱαδήποτε ἐξ αὐτῶν νὰ ληφθῇ ὡς ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου.



Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον εἶνε ὀρθογώνιον, βάσις καὶ ὕψος αὐτοῦ εἶνε (κατὰ τὸν ὁρισμὸν) δύο προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ.

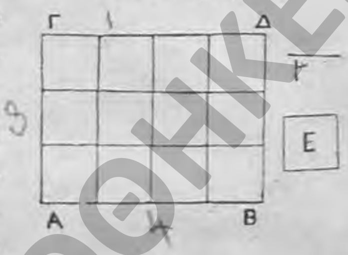
Τοῦ τραπεζίου *βάσεις* λέγονται αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ αὐτοῦ· ὕψος δὲ τὸ ἀπόστημα αὐτῶν ἀπ' ἀλλήλων.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ

ΘΕΩΡΗΜΑ

182. *Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ* (τουτέστι τῶν παριστώντων ταῦτα ἀριθμῶν)

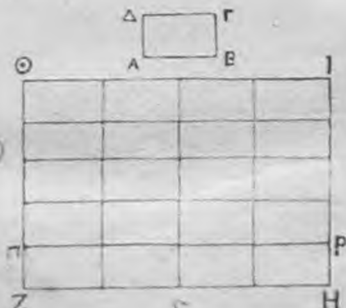
1) Ἔστωσαν πρότερον οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος παριστῶντες ἀριθμοὶ ἀμφότεροι ἀκέραιοι.



Ἂς ὑποτεθῇ, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ περιέχει τὴν μονάδα μ τῶν εὐθειῶν τετράκις, τὸ δὲ ὕψος ΑΓ περιέχει αὐτὴν τρίς· λέγω, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ θὰ περιέχῃ τὴν μονάδα Ε τῶν ἐπιφανειῶν 3×4 φορὰς ἤτοι 12άκις, καὶ ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ 12.

Διότι, ἂν διαιρεθῇ ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἰς 4 μέρη ἴσα τῇ μονάδι μ, ἡ δὲ ΑΓ εἰς 3, καὶ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἑκατέρας ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ἄλλῃ, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον εἰς 3.4 ἤτοι 12 μέρη (διότι αἱ μὲν παράλληλοι τῇ ΑΓ διαιροῦσιν αὐτὸ πρῶτον εἰς 4, αἱ δὲ παράλληλοι τῇ ΑΒ διαιροῦσιν ἔπειτα ἕκαστον τῶν τεσσάρων τούτων εἰς 3)· εἶνε δὲ τὰ μέρη ταῦτα πάντα τετράγωνα ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ὀρθὰς καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἴσας τῇ μονάδι μ. Σύγκειται ἄρα τὸ ὀρθογώνιον ἐκ τῆς μονάδος Ε τῶν ἐπιφανειῶν δωδεκάκις ληφθείσης· τουτέστι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε 12.

2) Ἔστωσαν δεύτερον οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος παριστῶντες ἀριθμοὶ ἀμφότεροι σύμμετροι. Ἂς ὑποτεθῇ, παραδείγματος χάριν, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἶνε $\frac{5}{4}$ τῆς μονάδος μ, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ εἶνε $\frac{3}{5}$ αὐτῆς. Ἐὰν τεθῶσι κατὰ σειρὰν 4 ὀρθογώνια ἴσα τῷ ΑΒΓΔ, ἀποτελοῦσι

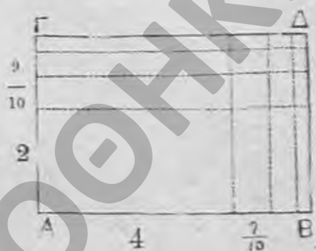


τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΡΠ, ὅπερ ἔχει βάσιν 5 καὶ ὕψος $\frac{3}{5}$· ἐὰν δὲ τεθῶσιν ἐπ' ἄλληλα 5 ὀρθογώνια ἴσα τῷ ΖΗΡΠ, ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΙΘ, ὅπερ ἔχει βάσιν 5 καὶ ὕψος 3, ἑπομένως ἔχει ἐμβαδὸν 15 μονάδας Ε

Ἐπειδὴ δὲ 20 ὀρθογώνια ἴσα τῷ ΑΒΓΔ ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ὁ τύπος Ε = βυ

ΖΗΙΘ, ὅπερ περιέχει 15 μονάδας Ε, ἕπεται, ὅτι ἕκαστον ἐξ αὐτῶν εἶνε $\frac{15}{20}$ τῆς μονάδος Ε τῶν ἐπιφανειῶν, τουτέστιν ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{15}{20}$, ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του $\frac{5}{4}$ ἐπὶ τὸ ὕψος του $\frac{3}{5}$.

3) Ἔστωσαν νῦν οἱοιδήποτε οἱ τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παριστῶντες ἀριθμοί. Ἐπειδὴ πᾶς ἀριθμὸς εἶνε ἄθροισμα δεκαδικῶν μονάδων, ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μὲν βάσις ΑΒ εἶνε 4,7841..., τὸ δὲ ὕψος ΑΓ εἶνε 2,9189.. Ἐὰν χωρίσωμεν ἐπὶ τῆς ΑΒ τὰ μέρη τῆς μονάδος μ, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ΑΒ (τουτέστι τὰς 4 μονάδας μ, τὰ 7 δέκατα αὐτῆς, τὰ 8 ἑκατοστά, τὰ 4 χιλιοστὰ κτλ.) καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ ὡσαύτως, καὶ φέρωμεν ἔπειτα ἐκ τῶν ἄκρων τῶν μερῶν τούτων παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ, διαιρεῖται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ εἰς πλῆθος ὀρθογωνίων ἐχόντων πλευρὰς συμμέτρους τῇ μονάδι καὶ τῶν ὁποίων τὰ ἐμβαδὰ εἶνε κατὰ σειρὰν



$$4.2+\frac{7}{10}\cdot 2+\frac{8}{100}\cdot 2+\frac{4}{1000}\cdot 2+\frac{1}{10000}\cdot 2+\cdots$$

$$4.\frac{9}{10}+\frac{7}{10}\cdot\frac{9}{10}+\frac{8}{100}\cdot\frac{9}{10}+\frac{4}{1000}\cdot\frac{9}{10}+\frac{1}{10000}\cdot\frac{9}{10}+\cdots$$

$$4.\frac{1}{100}+\frac{7}{10}\cdot\frac{1}{100}+\frac{8}{100}\cdot\frac{}{100}+\frac{4}{1000}\cdot\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}\cdot\frac{1}{100}+\cdots\cdots$$

$$4.\frac{8}{1000}+\frac{7}{10}\cdot\frac{8}{1000}+\frac{8}{100}\cdot\frac{8}{1000}+\frac{4}{1000}\cdot\frac{8}{1000}+\frac{1}{10000}\cdot\frac{8}{1000}+\cdots$$

. . . .

Ἀλλὰ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀποτελεῖ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν 4,7841. . . καὶ 2,9189. . . , διότι ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἑνὸς πολλαπλασιάζεται ἐφ' ἕκαστον ψηφίον τοῦ ἄλλου· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, εἶνε καὶ πάλιν ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ὀρθογωνίου παριστῶνται ὑπὸ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ γινομένου α.β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ α, ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ α.α, ἤτοι $α^2$, διὰ τοῦτο ἡ δευτέρα δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται καὶ *τετράγωνον* αὐτοῦ.

4

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΚΑΙ ΚΑΤΑΜΕΤΡΗΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

183. *Πᾶν παραλληλόγραμμον εἶνε ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ ἔχοντι τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

Ἔστω πρότερον ἡ βάσις ΑΒ ἴση ἢ μεγαλητέρα τῆς προσκειμένης πλευρᾶς ΑΓ.

Ἐὰν ἐκ τῶν ἄκρων τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καταβιβασθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν, ἡ μὲν ἐκ τῆς ἀμβλείας γωνίας, ἡ ΓΕ, θὰ πέσῃ ἐντὸς τοῦ παραλληλογράμμου (διότι ἡ κάθετος αὕτη θὰ κεῖται ἐν τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ Γ, ὡς σχηματίζουσα μετὰ τῆς ΓΔ ὀρθὴν γωνίαν, καὶ ὁ πούς αὐτῆς Ε θὰ εὑρεθῇ μεταξὺ Α καὶ Β ἐπὶ τῆς ΑΒ· διότι ἐν τῷ σχηματιζομένῳ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΓΕ ἡ πλευρὰ ΑΕ εἶνε μικροτέρα τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ· ἄρα μικροτέρα καὶ τῆς ΑΒ), ἡ δὲ ἐκ τῆς ὀξείας Δ, ἡ ΔΖ, θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς τῆς βάσεως. Θὰ εἶνε δὲ τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΖ ἴσα, ὡς ἔχοντα τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Α καὶ Β ἴσας. Ἀλλ' ἂν τὸ τρίγωνον ΑΓΕ ἀποτμηθῇ ἀπὸ τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἴσου του ΒΔΖ, τὸ παραλληλόγραμμον μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ· ἐπομένως τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶνε ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν· ἔχει δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΕΓΔΖ βάσιν μὲν τὴν ΕΖ, ἴσην τῇ ΓΔ, ἴσην τῇ ΑΒ, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ΓΕ.

Ἔστω ἔπειτα ἡ βάσις ΑΒ μικροτέρα τῆς προσκειμένης πλευρᾶς ΑΓ· τότε, ἂν μὲν πίπτῃ ἡ κάθετος ΓΕ ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ, ἰσχύουσι τὰ προειρημένα· εἰ δὲ μή, διαι-

42

ροῦμεν πρῶτον τὴν ΑΓ εἰς μέρη μικρότερα τῆς ΑΒ, καὶ ἐκ τῶν σημείων Ε, Ζ τῆς διαιρέσεως ἄγομεν παραλλήλους τῇ ΑΒ· τὸ παραλληλόγραμμον διαιρεῖται τότε εἰς ἄλλα, ΑΕΗΒ, ΕΗΘΖ, ΖΘΔΓ, ἔχοντα βάσεις ΕΗ, ΖΘ ἴσας τῇ ΑΒ καὶ τὰ ὁποῖα, ὡς προηγουμένως ἐρρήθη, μετασχηματίζονται εἰς τὰ ὀρθογώνια ΕΙΗΚ, ΖΛΘΜ, ΝΡΓΔ, ἅτινα πάντα ἔχουσι βάσεις ἴσας τῇ ΑΒ. Τὰ ὀρθογώνια ταῦτα, τιθέμενα κατὰ σειρὰν ἐπ' ἄλληλα, ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ικδγ, ἑπομένως τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶνε ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν· ἔχει δὲ τὸ ὀρθογώνιον τὴν βάσιν ικ ἴσην τῇ ΙΚ, ἴσην τῇ ΑΒ, καὶ τὸ ὕψος ιγ ἴσον τῷ ἀθροίσματι ΓΝ + ΖΛ + ΕΙ, ὅπερ ἰσοῦται πρὸς τὸ ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου· διότι αἱ παράλληλοι ΓΔ, ΖΘ, ΕΗ, ΑΒ διαιροῦσι τὸ ὕψος τοῦτο εἰς τμήματα ἴσα τοῖς ΓΝ, ΖΛ, ΕΙ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δυνάμεθα διὰ μιᾶς μόνον τομῆς νὰ μετασχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς ἰσοδύναμον ὀρθογώνιον, ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν ὡς βάσιν αὐτοῦ τὴν μεγαλητέραν τῶν πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

184. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς παραλληλογράμμου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Διότι ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ ἰσοῦται τῇ ἐπιφανείᾳ ὀρθογωνίου ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

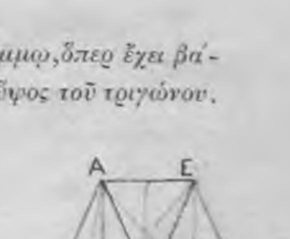
185. *Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶνε ἰσοδύναμα.*

Διότι μετασχηματίζονται εἰς τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

186. *Πᾶν τρίγωνον εἶνε ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.*

Ἔστω βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ ΒΓ· ἐκ τοῦ μέσου Δ τῆς ΒΓ ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΒ καὶ ἐκ τοῦ Α παράλληλος τῇ ΒΓ. Οὕτω σχηματίζεται παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΔΕ ἔχον βάσιν μὲν τὴν ΒΔ, ἤτοι τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὴν ἐκ τοῦ Α κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἤτοι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου. Εἶνε δὲ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦτο ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ· διότι



τὰ δύο τρίγωνα ΔΖΓ καὶ ΑΖΕ εἶνε ἴσα ὡς ἔχοντα τὴν ΑΕ ἴσην τῇ ΔΓ (ὡς ἴσας ἀμφοτέρας τῇ ΒΔ) καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Γ (διὰ τὰς παραλλήλους ΑΕ καὶ ΒΓ), ἔτι δὲ καὶ τὴν γωνίαν Ε ἴσην τῇ Δ (δι' ὅμοιον λόγον). Ἀλλ' ἐὰν τὸ τρίγωνον ΔΖΓ ἀποτμηθῇ ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ τεθῇ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἴσου του ΖΕΑ, μετασχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ· εἶνε λοιπὸν ἰσοδύναμα.

5

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

187. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ἡμίσεος τῆς βάσεως αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ* $\left(\frac{1}{2}\beta.\upsilon\right)$,

ἢ τῷ γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους $\left(\beta.\frac{1}{2}\upsilon\right)$,

ἢ τῷ ἡμίσει γινομένῳ τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος $\left(\frac{1}{2}\beta\upsilon\right)$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

188. *Πᾶν τρίγωνον εἶνε ἰσοδύναμον ὀρθογωνίῳ ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.*

Διότι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΕ, ὅπερ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ, μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον ἔχον τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΔ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

189. *Τὰ ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη ἔχοντα τρίγωνα εἶνε ἰσοδύναμα.*

Διότι κατατεμνόμενα μετασχηματίζονται εἰς τὸ αὐτὸ ὀρθογώνιον· ἑπομένως ἐφαρμόζουσιν, ἀφοῦ διαιρεθῶσιν εἰς μέρη.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος ἀναλύοντες αὐτὸ εἰς τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο ἄγομεν ἔκ τινος κορυφῆς τοῦ σχήματος τὰς διαγωνίους αὐτοῦ, ἢ καὶ ἐκ σημείου ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένου ἄγομεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ.

Ήαρχα

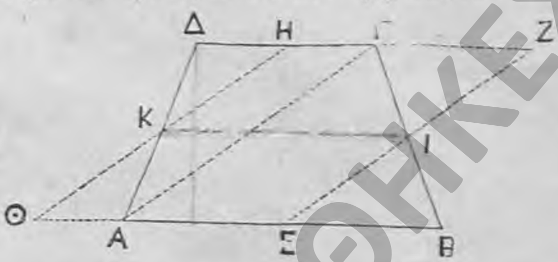
ΘΕΩΡΗΜΑ

6

44 190. *Πᾶν τραπέζιον εἶνε ἰσοδύναμον παραλληλογράμμῳ, ὅπερ ἔχει ὕψος μὲν τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου.*

Ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ ἔχον βάσεις μὲν τὰς παραλλήλους ΑΒ, ΓΔ, ὕψος δὲ τὸ ἀπόστημα αὐτῶν.

Ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖ τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα, τὰ ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, ἔχοντα βάσεις τὰς τοῦ τραπεζίου καὶ ὕψος τὸ αὐτό, τουτέστι τὸ ἀπόστημα τῶν παραλλήλων. Καὶ τὸ μὲν ΑΒΓ μετασχηματίζεται, κατὰ τὰ προηγουμένως εἰρημένα, εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΕΖΓ, τὸ δὲ ΑΓΔ εἰς τὸ παραλληλόγραμμον ΑΓΗΘ· ἑπομένως τὸ τραπέζιον εἶνε ἰσοδύναμον τῷ παραλληλογράμμῳ ΘΕΖΗ· ἔχει δὲ τοῦτο ὕψος μὲν τὸ τοῦ τραπεζίου, βάσιν δὲ τὴν ΘΕ, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν ἡ ΑΘ, ἥμισυ τῆς ΓΔ (διότι ΑΘ=ΗΓ), καὶ ἡ ΑΕ, ἥμισυ τῆς ΑΒ, τουτέστι τὰ ἡμίση ἀμφοτέρων τῶν βάσεων· ὥστε εἶνε



$$ΘΕ=\frac{1}{2}ΑΒ+\frac{1}{2}ΓΔ=\frac{1}{2}(ΑΒ+ΓΔ).$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ σημεῖον Ι εἶνε μέσον τῶν εὐθειῶν ΕΖ καὶ ΒΓ (ὡς συνάγεται ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΕΙΒ καὶ ΓΙΖ), τὸ δὲ Κ εἶνε μέσον τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΘΗ· ἄρα ἡ ΕΙ εἶνε ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΘΚ· ἑπομένως, ἂν ἀχθῇ ἡ ΚΙ, τὸ σχῆμα ΘΚΙΕ θὰ εἶνε παραλληλόγραμμον, ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι *ἡ τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου συνδέουσα εὐθεῖα ΚΙ εἶνε ἴση τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν παραλλήλων βάσεων αὐτοῦ καὶ παράλληλος αὐταῖς.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

191. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ ὕψους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ,*

$$E=\text{ἤτοι}\ \frac{(\beta+\beta')}{2}.\upsilon$$

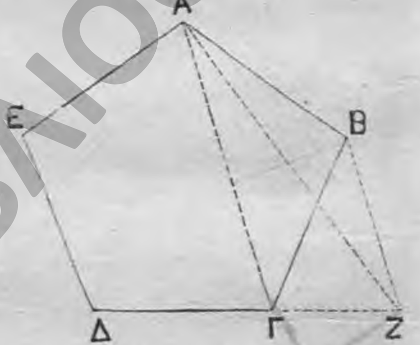
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται διὰ τῆς διαγωνίου ΑΓ· τῷ ὄντι τὸ μὲν τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν τὴν ΑΒ (=β) καὶ ὕψος υ τὸ τοῦ τραπεζίου· ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε $\frac{1}{2}\beta.\upsilon$· τὸ δὲ τρίγωνον ΑΓΔ ἔχει βάσιν τὴν ΓΔ (=β′), ὕψος δὲ τὸ τοῦ τραπεζίου υ· ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε $\frac{1}{2}$ β΄.υ· ὅθεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶνε $\frac{1}{2}$ βυ $+ \frac{1}{2}$ β΄.υ, ἢ $\frac{1}{2}$ (β + β΄).υ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

192. *Ἐκ τοῦ δοθέντος πολυγώνου νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ἔχον ἐπιφάνειαν μὲν τὴν αὐτήν, μίαν δὲ πλευρὰν ὀλιγώτερον.*

Ἔστω τὸ δοθὲν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ.

Ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν, ἔστω ἐκ τῆς Α, ἂς ἀχθῇ διαγώνιος, ὡς ἡ ΑΓ, χωρίζουσα ἀπὸ τοῦ πολυγώνου τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς Β ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ ἂς προσεκβληθῇ ἡ ἑτέρα τῶν εἰς τὴν ΑΓ προσκειμένων πλευρῶν (ΔΓ ἢ ΕΑ), ἔστω ἡ ΔΓ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν παράλληλον τῆς ΑΓ κατὰ τὸ Ζ, τέλος ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΖ.



Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ εἶνε ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ καὶ ὕψη ἴσα· διότι αἱ κορυφαὶ αὐτῶν Β καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει ΑΓ· ὅθεν αἱ ἐξ αὐτῶν κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν εἶνε ἴσαι. Καὶ ἂν μὲν τὸ σχῆμα ΑΓΔΕ προστεθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, προκύπτει τὸ δοθὲν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, ἂν δὲ τὸ αὐτὸ σχῆμα ΑΓΔΕ προστεθῇ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΓΖ, γίνεται τὸ σχῆμα ΑΖΔΕ. Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ δοθὲν πολύγωνον εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ΑΖΔΕ· ἔχει δὲ τοῦτο μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον ἢ τὸ δοθέν· διότι ἀντὶ τῶν δύο πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ ἔχει τοῦτο μίαν μόνον, τὴν ΑΖ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

193. *Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τρίγωνον* (ἑπομένως καὶ ὀρθογώνιον) *ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ.*

Ἀρκεῖ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὰ προειρημένα εἰς τὸ πολύγωνον πολλάκις, ἐλαττοῦντες ἑκάστοτε κατὰ μίαν τὰς πλευρὰς αὐτοῦ, μέχρις οὗ φθάσωμεν εἰς τρίγωνον.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

194. Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται, ὅτι αἱ εὐθεῖαι γραμμαὶ καὶ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν εὐθυγράμμων σχημάτων καταμετροῦνται καὶ παρίστανται δι' ἀριθμῶν· κατ' ἀκολουθίαν πᾶσα ἰσότης μεταξὺ εὐθειῶν γραμμῶν ἢ μεταξὺ ἐπιφανειῶν εὐθυγράμμων σχημάτων τρέπεται εἰς ἰσότητα ἀριθμῶν· διὸ τοῦτο ἡ ἰσότης τῶν σχημάτων (εἴτε ἀκεραίων εἴτε διῃρημένων) ἔχει πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος τῶν ἀριθμῶν. Τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει προφανῶς καὶ ἐπὶ τῶν ἀνισοτήτων.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ὡς μονάδα τῶν εὐθειῶν λαμβάνομεν ἐν τοῖς ἑπομένοις τὸν βασιλικὸν πῆχυν, ἤτοι τὸ γαλλικὸν μέτρον, (ὅπερ εἶνε περίπου τὸ $\frac{1}{40000000}$ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς).

Τὸ τετράγωνον, ὅπερ ἔχει πλευρὰν ἕνα πῆχυν, λέγεται *τετραγωνικὸς πῆχυς*· τοῦτο δὲ λαμβάνομεν ὡς μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν (181).

Παλάμη λέγεται τὸ δέκατον τοῦ πήχεως· τὸ δὲ τετράγωνον τὸ ἔχον αὐτὴν πλευρὰν λέγεται *τετραγωνικὴ παλάμη*· εἶνε δὲ ἡ τετραγωνικὴ παλάμη τὸ ἑκατοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως (173)

Δάκτυλος λέγεται τὸ ἑκατοστὸν τοῦ πήχεως· τὸ δὲ τετράγωνον τὸ ἔχον αὐτὸν πλευρὰν λέγεται *τετραγωνικὸς δάκτυλος* εἶνε δὲ ὁ τετραγωνικὸς δάκτυλος τὸ δεκάκις χιλιοστὸν ἢ μυριοστὸν τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως (173).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶνε 14π, τὸ δὲ ὕψος 7π, 3

('Απ. 102ττ, 2, ἤτοι 102 τετρ. πήχεις καὶ 20 τετραγωνικαὶ παλάμαι).

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μὲν βάσις εἶνε 13π, 8, τὸ δὲ ὕψος 5π, 17.

('Απ. 35ττ, 673, ἤτοι 35 τετρ. πήχεις, 67 τετρ. παλάμαι καὶ 30 τετρ. δάκτυλοι).

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, ὅπερ ἔχει βάσιν 12π, 5 καὶ ὕψος 4π, 7.

('Απ. 58ττ, 75, ἤτοι 58 τετρ. πήχεις καὶ 75 τετρ. παλάμαι).

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, ὅπερ ἔχει ὕψος 8π, αἱ δὲ βάσεις αὐτοῦ εἶνε ἡ μὲν 25π, 2, ἡ δὲ 9π, 15.

('Απ. 173ττ, 40 ττλ).

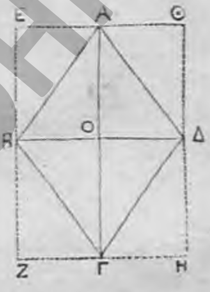
(40 [5,3] = 40 τ) $\frac{1}{10}^{\tau\pi} = 10^{\tau\pi}$

5) Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὅπερ εἶνε τὸ δέκατον τοῦ τετραγωνικοῦ πήχεως.

('Απ. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ἢ $\frac{1}{10}\sqrt{10}$, ἤτοι 0^{π}, 3162...).

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου ἐκ τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

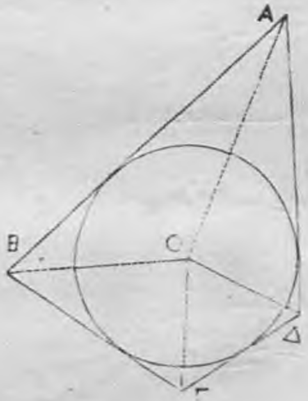
Ὁ ῥόμβος μετασχηματίζεται εἰς ὀρθογώνιον καὶ διὰ τῶν διαγωνίων του· διότι διαιρεῖται ὑπ' αὐτῶν εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα (ὡς ἔχοντα τὰς πλευράς των ἴσας)· ἐὰν δὲ τὰ τρίγωνα ταῦτα τεθῶσιν, ὡς δεικνύει τὸ ἀπέναντι σχῆμα (τὸ ΟΔΓ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ΕΑΒ καὶ τὸ ΟΒΓ εἰς τὴν θέσιν τοῦ ΘΑΔ), ἀποτελοῦσι τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΘΕ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν μίαν διαγώνιον τοῦ ῥόμβου καὶ ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης.



Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο διαγωνίων του.

Ἐάν, παραδείγματος χάριν, αἱ διαγώνιοι εἶνε ἡ μὲν μία 8^{π},15, ἡ δὲ ἄλλη 6^{π}, 12, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ῥόμβου θὰ εἶνε $24^{\tau\pi}$, 939.

7) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν πολυγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον, ὡς τοῦ ΑΒΓΔ.



Ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, ἀναλύεται τὸ πολύγωνον (189, Σημείωσις) εἰς τρίγωνα ἔχοντα ὕψος τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (119)· ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εἶνε (ἐὰν διὰ ρ παρασταθῇ ἡ ἀκτίς)

$$\frac{1}{2}\text{ΑΒ}.\rho,\quad \frac{1}{2}\text{ΒΓ}.\rho,\quad \frac{1}{2}\text{ΓΔ}.\rho,\quad \frac{1}{2}\text{ΔΑ}.\rho,$$

καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου εἶνε ἑπομένως

$$\frac{1}{2}\text{ΑΒ}.\rho, \ \frac{1}{2}\text{ΒΓ}.\rho+\frac{1}{2}\text{ΓΔ}.\rho+\frac{1}{2}\text{ΔΑ}.\rho,$$

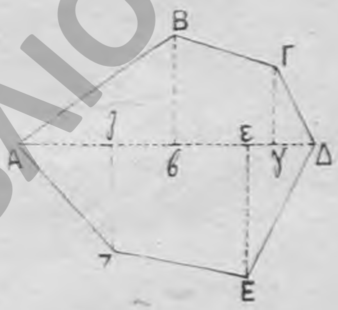
$$\text{ἤτοι}\ \frac{1}{2}\rho(\text{ΑΒ}+\text{ΒΓ}+\text{ΓΔ}+\text{ΔΑ}).$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι τὸ *ἐμβαδὸν παντὸς πολυγώνου περιγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶνε τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένου κύκλου.*

Καὶ ἐπειδὴ εἰς πᾶν τρίγωνον ἐγγράφεται κύκλος (163), συνάγεται, ὅτι

Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶνε γινόμενον τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ εἰς αὐτὸ ἐγγραφομένου κύκλου.

Ἂς ὑποθέσωμεν, παραδείγματος χάριν, ὅτι πολύγωνόν τι εἶνε περιγεγραμμένον εἰς κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς εἶνε 3μ καὶ ὅτι ἔχει περίμετρον 37μ, 8· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε $37,8 \times 3 \times \frac{1}{2}$, ἤτοι 56τμ, 7.



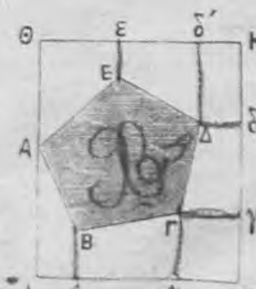
8) Εἰς τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ ἤχθη ἡ μεγαλητέρα διαγώνιος ΑΔ καὶ ἔπειτα κάθετοι ἐπ' αὐτὴν ἐκ τῶν κορυφῶν αἱ Ββ, Γγ, Εε, Ζζ· εὑρέθη δὲ ἐκ τῆς μετρήσεως, ὅτι εἶνε

Αζ=2,3 ζβ=1,8, βε=1,9,
εγ=0,91, γΔ=1,52,
Ββ=3,75 Γγ=2,91,
Εε=4, Ζζ=3,65·

ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου· (Ἀπ. 42τμ, 4664).

Ὁ τρόπος οὗτος τῆς ἀναλύσεως τῶν πολυγώνων καὶ τῆς καταμετρήσεως αὐτῶν εἶνε συνήθης εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

9) Νὰ μετρηθῇ ἡ ἐπιφάνεια ΑΒΓΔΕ, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα νὰ ἐμβῶμεν.



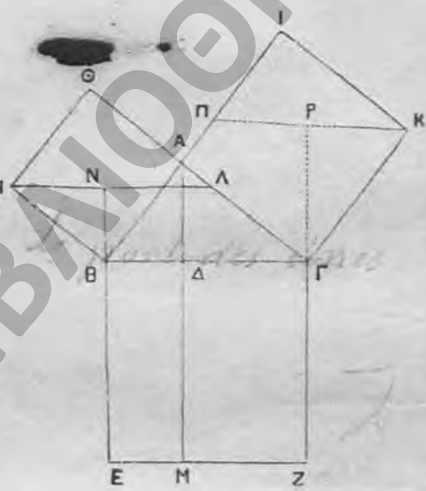
Σχηματίζομεν πέριξ αὐτῆς εὐθύγραμμόν τι σχῆμα περιέχον αὐτήν· ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΖΗΘΙ ἔπειτα ἐκ τῶν κορυφῶν Α,Β,.., ἄγομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ μετροῦντες τὰς καθέτους ταύτας, ὡς καὶ τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα τέμνουσιν ἀπὸ τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, εὑρίσκομεν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τραπεζίων ΑΒΙβ, ΒΓβγ, ..., ἀφαιροῦντες τότε τὰ ἐμβαδὰ ταῦτα ἀπὸ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ΖΗΘΙ, θὰ εὕρωμεν προφανῶς τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓΔΕ.

ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΞΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

195. *Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου εἶνε ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.*

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν γωνίαν Α. Ἐὰν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ κατασκευασθῶσι τετράγωνα, τὰ ΒΓΕΖ, ΑΓΚΙ, ΑΒΗΘ, λέγω, ὅτι τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης κατασκευασθέν, τὸ ΒΓΕΖ, ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἄλλων.



Ἐκ τοῦ Α ἃς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΒΕ, ἡ ΑΔΜ καὶ ἐκ τοῦ Η παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ ΗΛ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΒΝ κάθετος ἐπὶ τὴν ΗΛ. Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΗΒΝ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι τὰς ὑποτεινούσας αὐτῶν ΗΒ καὶ ΒΑ ἴσας (ὡς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου ΒΑΘΗ) καὶ τὰς ὀξείας γωνίας ΗΒΝ καὶ ΑΒΔ ἴσας (ὡς ὑπόλοιπα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν ΗΒΑ καὶ ΝΒΔ, ἀφ' ὧν ἀφῃρέθη ἡ ΝΒΑ)· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῶν συνάγεται ΒΝ=ΒΔ. Τούτου τεθέντος, τὸ τετράγωνον ΗΒΑΘ καὶ τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒΓΛ εἶνε ἰσοδύναμα, ὡς ἔχοντα τὴν αὐτὴν βάσιν ΗΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΑ· ἀλλὰ πάλιν τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒΓΛ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΔΜΕ εἶνε ἰσοδύναμα· διότι ἔχουσι βάσεις ΒΓ, ΒΕ ἴσας (ὡς πλευρὰς τετραγώνου) καὶ ὕψη ΒΝ, ΒΔ ἴσα, ὡς προηγουμένως ἀπεδείχθη· ἄρα τὸ τετράγωνον ΗΒΑΘ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΒΕΜΔ εἶνε ἰσοδύναμα.

Ὁμοίως ἀγομένης τῆς ΚΠ παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ τῆς ΓΡ καθέτου ἐπ' αὐτήν, ἀποδεικνύεται ἡ ΓΡ ἴση τῇ ΓΔ, μετὰ δὲ ταῦτα, ὅτι τὸ τετράγωνον ΑΓΚΙ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ ΔΓΖΜ. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τετραγώνων ΗΒΑΘ καὶ ΑΓΚΙ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀρθογωνίων ΒΕΜΔ καὶ ΔΜΖΓ, ἤτοι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

196. *Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων τετραγώνων.*

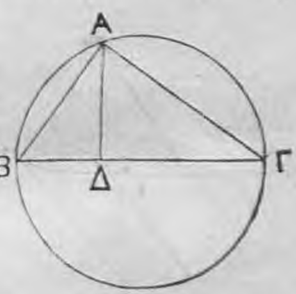
Διότι, ἂν εἰς αὐτὸ προστεθῇ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης πλευρᾶς τῆς ὀρθῆς γωνίας, προκύπτει ἄθροισμα τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

197. *Ἐν ὀρθογων*[redacted]*ν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν ὅλην τὴν ὑποτείνουσαν, ὕψος δὲ τὸ εἰς τὴν πλευρὰν ταύτην προσκείμενον μέρος τῆς ὑποτεινούσης.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

198. *Ἐὰν ἐκ σημείου περιφερείας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ διάμετρον αὐτῆς καὶ χορδαὶ εἰς τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου, τὸ τετράγωνον ἑκατέρας τῶν χορδῶν τούτων εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν διάμετρον, ὕψος δὲ τὸ εἰς τὴν χορδὴν ταύτην προσκείμενον τμῆμα τῆς διαμέτρου.*



Διότι ἡ γωνία ΒΑΓ εἶνε ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶνε ὀρθογώνιον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν μετροῦντες τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ διὰ τῆς μονάδος, δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἐγκλειομένων εἰς παρένθεσιν, οἷον (ΑΒ), (ΒΓ), (ΓΑ)· τότε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν γραμμῶν θὰ εἶνε $(AB)^2$, $(B\Gamma)^2$, $(\Gamma A)^2$. Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα καὶ τὰ πορίσματα αὐτοῦ ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑπομένων ἰσοτήτων·

Θεώρημα $\quad (B\Gamma)^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2$

Πόρισμα 1ον $\quad \begin{cases} (AB)^2=(B\Gamma)^2-(A\Gamma)^2 \\ (A\Gamma)^2=(B\Gamma)^2-(AB)^2 \end{cases}$

Πόρισμα 2ον καὶ 3ον $\quad \begin{cases} (AB)^2=(B\Gamma).(B\Delta) \\ (A\Gamma)^2=(B\Gamma).(\Gamma\Delta) \end{cases}$

Παρατηρητέον δέ, ὅτι ἐκ τῆς ἰσότητος $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2$, ἥτις συνδέει τὰς τρεῖς πλευρὰς παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, δυνάμεθα, δοθεισῶν δύο ἐξ αὐτῶν (ἤγουν τῶν μετρούντων αὐτὰς ἀριθμῶν), νὰ εὕρωμεν τὴν τρίτην· ἄν, παραδείγματος χάριν, δοθῇ $(ΑΓ)=3$, $(ΑΒ)=4$,

εὑρίσκομεν $(ΒΓ)^2=3^2+4^2=25$, ὅθεν $(ΒΓ)=5$.

Ἐὰν δὲ δοθῇ $(ΑΓ)=12$, $(ΑΒ)=5$,

εὑρίσκομεν $(ΒΓ)^2=12^2+5^2=169$, ὅθεν $(ΒΓ)=13$.

Ἐὰν δὲ δοθῇ $(ΒΓ)=29$, $(ΑΓ)=(20)$,

εὑρίσκομεν $(ΑΒ)^2=29^2-20^2=441$, ὅθεν $(ΑΒ)=21$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο [redacted] εὗρεν ὁ Πυθαγόρας· ἐκφράζει δὲ τοῦτο τὴν μόνην σχέσιν, δι' ἧς συνδέονται πρὸς ἀλλήλας αἱ τρεῖς πλευραὶ παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅταν θεωρῶνται ὡς μεγέθη. Ἐπειδὴ δὲ καὶ πᾶν ἄλλο τρίγωνον ἀναλύεται εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα, ἔτι δὲ καὶ πᾶν πολύγωνον εἰς τρίγωνα, εὐκόλως ἐννοεῖ τις τὴν μεγάλην σημασίαν τοῦ θεωρήματος τούτου ἐν ὅλῃ τῇ γεωμετρίᾳ.

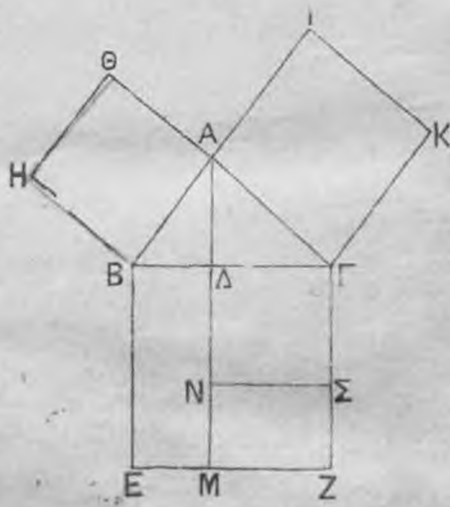
9

ΘΕΩΡΗΜΑ

48 199. *Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, τὸ ἀπὸ τῆς καθέτου ταύτης τετράγωνον εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.*

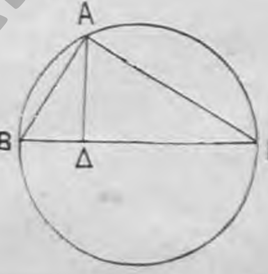
Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι εἶνε

$$(ΑΔ)^2=(ΒΔ).(ΔΓ).$$



Διότι, τοῦ τριγώνου ΑΔΓ ὄντος ὀρθογωνίου, τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ΑΔ εἶνε διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΑΓ καὶ ΔΓ. Καὶ τὸ μὲν τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ΑΓ εἶνε τὸ ΑΓΚΙ, καί, ὡς προηγουμένως ἀπεδείχθη μετασχηματίζεται εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΓΔΜΖ, τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ΔΓ κατασκευάζομεν λαμβάνοντες τὴν ΓΣ ἴσην τῇ ΓΔ καὶ ἄγοντες τὴν ΣΝ παράλληλον τῇ ΓΔ· ἐπομένως τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΔΓ ἔχουσι διαφορὰν τὸ ὀρθογώνιον ΝΣΖΜ· ἀλλὰ τὰ αὐτὰ τετράγωνα ἔχουσι διαφορὰν καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ. Ἐντεῦθεν συμπεραίνεται, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΝΣΖΜ ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδὰ καὶ διὰ τοῦτο εἶνε ἰσοδύναμα. Ἔχει δὲ τὸ ὀρθογώνιον ΝΣΖΜ βάσιν μὲν τὴν ΜΖ, ἴσην τῇ ΔΓ, ὕψος δὲ τὴν ΖΣ, ἥτις ἰσοῦται τῇ ΔΒ· διότι ἀμφότεραι εἶνε ὑπόλοιπα τῶν ἴσων εὐθειῶν ΓΒ καὶ ΓΖ, ἀφ' ὧν ἀφῃρέθησαν ἴσαι [illegible], αἱ ΓΔ καὶ ΓΣ. Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ΑΔ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης.

ΠΟΡΙΣΜΑ



49 200. *Ἐὰν ἐκ σημείου περιφερείας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ διάμετρον, τὸ τετράγωνον τῆς καθέτου ταύτης θὰ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ δύο τμήματα τῆς διαμέτρου.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

49 201. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι δύο δοθέντων τετραγώνων.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δοθέντων τετραγώνων. Ἐὰν κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας τὰς εὐθείας Α καὶ Β, ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου τούτου θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν, τὴν ΔΓΕ, καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν αὐτῆς τὴν ΓΗ ἴσην τῇ Α καὶ τὴν ΓΖ ἴσην τῇ Β καὶ ἐπιζευγνύομεν τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ διὰ τῆς ΖΗ. Ἡ ΖΗ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητου-

μένου τετραγώνου· διότι εἶνε ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΓΗ·

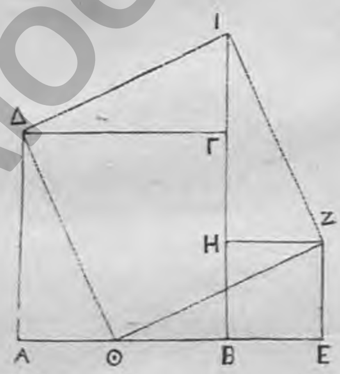
$$\text{ὅθεν} \quad (ZH)^2 = (\Gamma H)^2 + (\Gamma Z)^2,$$

$$\text{ἤτοι} \quad (ZH)^2 = (A)^2 + (B)^2.$$

Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν αὐτὴν κατασκευὴν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι ὁσωνδήποτε τετραγώνων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ζητῆται ἐκ τῶν μερῶν τῶν δοθέντων τετραγώνων νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἰσοδύναμον αὐτοῖς τετράγωνον, δυνάμεθα τεμαχίζοντες αὐτὰ νὰ μετασχηματίσωμεν εἰς ὀρθογώνια κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματος 195. Ἀλλὰ ταχύτερον ἐκτελεῖται τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς.

Θέτομεν τὰ δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καὶ ΗΖΕΒ, ὡς ἐν τῷ σχήματι δεικνύεται, καὶ λαμβάνομεν ΑΘ ἴσην τῇ ΒΕ, ἄγομεν τὰς εὐθείας ΔΘ καὶ ΘΖ καὶ ἀποτέμνομεν τὰ προκύπτοντα τρίγωνα ΔΑΘ καὶ ΘΖΕ, τὰ ὁποῖα θέτομεν ὡς ἑξῆς· τὸ μὲν πρῶτον εἰς τὴν θέσιν ΔΙΓ (τὴν ΔΑ ἐπὶ τῆς ΔΓ), τὸ δὲ δεύτερον εἰς τὴν θέσιν ΙΗΖ (τὴν ΖΕ ἐπὶ τὴν ΖΗ)· οὕτως ἀποτελεῖται τὸ σχῆμα ΔΘΖΙ, ὅπερ εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶνε τετράγωνον.



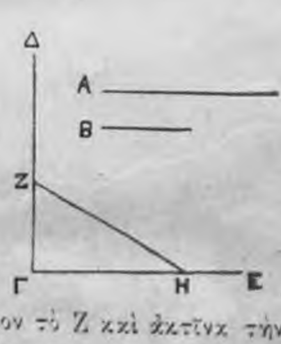
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

202. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσον τῇ διαφορᾷ δύο δοθέντων τετραγώνων.*

Ἔστωσαν πάλιν Α καὶ Β αἱ πλευραὶ τῶν δοθέντων τετραγώνων, ἔστω δὲ ἡ Α μεγαλητέρα.

Ἐὰν κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν Α καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην τῇ Β, ἡ τρίτη πλευρὰ αὐτοῦ θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν, τὴν ΔΓΕ, καὶ ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν πλευρῶν αὐτῆς, ἔστω ἐπὶ τῆς ΓΔ, λαμβάνομεν τὴν ΓΖ ἴσην τῇ Β, ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν Α



γράφομεν περιφέρειαν· ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν πλευρὰν ΓΕ εἴς τι σημεῖον Η (διότι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Ζ ἀπὸ τῆς ΓΕ, τουτέστιν ἡ Β, εἶνε μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος Α) καὶ ἡ εὐθεῖα ΓΗ θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΓΗ εὑρίσκομεν

$$(ΖΗ)^2=(ΓΖ)^2+(ΓΗ)^2,$$

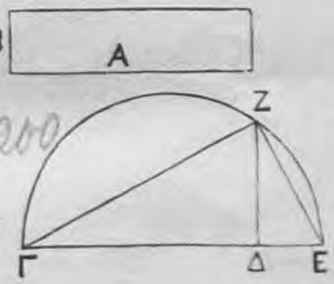
ὅθεν ἔπεται $(ΓΗ)^2=(ΖΗ)^2-(ΓΖ)^2$,

τουτέστι $(ΓΗ)^2=(Α)^2-(Β)^2$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

203. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου. Κατὰ τὸ θεώρημα 199, ἐὰν κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἐν τῷ ὁποίῳ ἡ ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν κάθετος νὰ διαιρῇ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο μέρη ἴσα τοῖς Α καὶ Β, ἡ κάθετος αὕτη θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

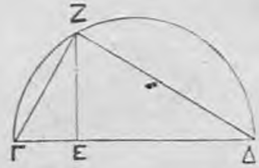


Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας τὴν ΓΔ ἴσην τῇ Α καὶ τὴν ΔΕ ἴσην τῇ Β καὶ ἐπὶ τῆς ΓΕ γράφομεν ἡμικύκλιον· ἐκ τοῦ σημείου Δ ἄγομεν τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΕ μέχρι τῆς περιφερείας· ἡ ΔΖ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Διότι ἀχθεισῶν τῶν ΓΖ καὶ ΕΖ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΓΖΕ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $(ΖΔ)^2=(ΓΔ).(ΔΕ)$,

ἤτοι $(ΖΔ)^2=(Α).(Β)$.

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δύναται νὰ λυθῇ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον. Τῷ ὄντι τὸ πόρισμα 197, ἐὰν κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν Α (ὑποτίθεται $Α>Β$) καὶ ἓν τῶν τμημάτων αὐτῆς (εἰς ἃ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς καθέτου, ἥτις ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας) ἴσον τῇ Β, ἡ πρὸς τὸ τμῆμα τοῦτο προσκειμένη πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου θὰ ἔχῃ τετράγωνον ἴσον τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν εὐθεῖαν ἴσην τῇ Α, ἔστω τὴν ΓΔ, καὶ ἐπ' αὐτῆς ἀπὸ τοῦ ἑτέρου τῶν ἄκρων Γ τὴν ΓΕ ἴσην τῇ Β· ἐπὶ τῆς ΓΔ ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμικύκλιον καὶ ἐκ τοῦ Ε ἄγομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ μέχρι τῆς περιφερείας, τὴν ΕΖ, ἐκ δὲ τοῦ σημείου Ζ, εἰς ὃ ἡ κάθετος συναντᾷ τὴν περιφέρειαν, ἄγομεν τὰς εὐθείας ΖΓ καὶ ΖΔ· ἡ ΖΓ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου. Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΖΔ εὑρίσκομεν



$$(ΓΖ)^2=(ΓΔ).(ΓΕ)=(Α).(Β).$$

11 (197)

ΠΟΡΙΣΜΑ

204. *Παντὸς εὐθυγράμμου σχήματος δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον τετράγωνον.*

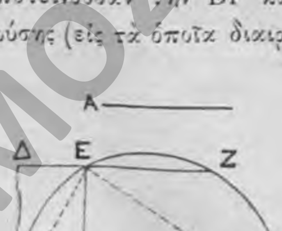
Διότι ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι σχήματι καὶ ἔπειτα τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τούτῳ.

* ΠΡΟΒΛΗΜΑ

205. *Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ καὶ ἔχον περίμετρον ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

Ἔστω πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἡ Α καὶ τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης περιμέτρου (τουτέστι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου) ἡ ΒΓ.

Κατὰ τὸ θεώρημα 199, ἐὰν κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν ΒΓ καὶ ὕψος ἴσον τῇ Α, τὰ δύο μέρη τῆς ὑποτεινούσης (εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ αὐτὴν τὸ ὕψος) θὰ εἶνε αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου. Ἡ κορυφὴ τοῦ ὀρθογωνίου τούτου θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις γράφεται ἐπὶ τῆς ΒΓ ὡς διαμέτρου, θὰ κεῖται δὲ καὶ ἐπ' εὐθείας παραλλήλου τῇ ΒΓ καὶ ἀπεχούσης ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀπόστασιν ἴσην τῇ εὐθείᾳ Α· ἄρα θὰ εἶνε τομὴ αὐτῶν.



Διὰ ταῦτα γράφομεν ἡμικύκλιον ἐπὶ τῆς ΒΓ ὡς διαμέτρου καὶ ἔκ τινος σημείου τῆς ΒΓ, ἔστω ἐκ τοῦ Β, ὑψοῦμεν ἐπ' αὐτῆς κάθετον τὴν ΒΔ ἴσην τῇ Α, ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν παράλληλον τῇ ΒΓ, τὴν ΔΕΖ, καὶ ἐκ τοῦ ἑτέρου τῶν σημείων, εἰς ἃ αὕτη τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἔστω ἐκ τοῦ Ε, ἄγομεν τὴν ΕΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὰ δύο τμήματα ΒΗ καὶ ΗΓ θὰ εἶνε αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Διότι τὸ ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου προσκείμεναι πλευραὶ εἶνε αἱ ΒΗ, ΗΓ, θὰ ἔχῃ περίμετρον μὲν ἴσην τῇ $2.ΒΗ+2.ΗΓ$ ἤτοι $2.ΒΓ$, ἐμβαδὸν δὲ ἴσον τῷ $(ΕΗ)^2$ ἢ $(ΔΒ)^2$ ἤτοι $Α^2$.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἵνα τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐπιδέχηται λύσιν, πρέπει ἡ ἐκ τοῦ Δ ἀγομένη παράλληλος τῇ ΒΓ νὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν ἢ τοὐλάχιστον νὰ ἐφάπτηται αὐτῆς· πρέπει δηλονότι ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τοῦ κέντρου, ἥτις ἰσοῦται τῇ ΒΔ, νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα·

ἤτοι νὰ εἶνε $Α \leqq \frac{1}{2} ΒΓ$, ἐξ οὗ $4Α \leqq 2.ΒΓ$,

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα λύεται μόνον, *ὅταν ἡ περίμετρος τοῦ δοθέντος τετραγώνου δὲν ὑπερβαίνῃ τὴν δοθεῖσαν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου.*

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι, *ὅταν ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον εἶνε ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν, ἡ περίμετρος τοῦ τετραγώνου εἶνε μικροτέρα τῆς τοῦ ὀρθογωνίου·* ἑπομένως *ἐκ πάντων τῶν τὴν αὐτὴν περίμετρον ἐχόντων ὀρθογωνίων μέγιστον εἶνε τὸ τετράγωνον.*

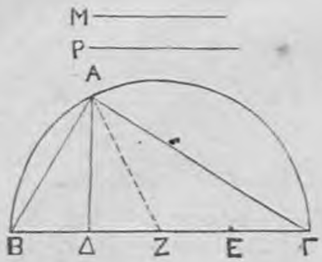
* ΠΡΟΒΛΗΜΑ

206. *Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

Ἔστω πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἡ Μ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ Ρ.

Κατὰ τὸ θεώρημα 199, ἐὰν κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὕψος ἴσον τῇ εὐθείᾳ Μ καὶ ἐν τῷ ὁποίῳ τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης (εἰς ἃ διαιρεῖ αὐτὴν τὸ ὕψος) νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ Ρ, τὰ τμήματα ταῦτα θὰ εἶνε αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω τοιοῦτο τὸ τρίγωνον ΒΑΓ· τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖ αὐτὴν τὸ ὕψος ΑΔ, ἔστωσαν ΒΔ καὶ ΔΓ· ἐὰν ληφθῇ ἀπὸ τοῦ Γ ἡ ΓΕ ἴση τῇ ΒΔ, ἡ ΔΕ θὰ εἶνε διαφορὰ τῶν δύο τμημάτων (ἑπομένως ἴση τῇ Ρ) καὶ τὸ μέσον αὐτῆς Ζ θὰ εἶνε μέσον καὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ· ἐὰν δὲ μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΒ ἢ τὴν ΖΓ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, αὕτη θὰ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ σημείου Α, διότι ἡ γωνία Α εἶνε ὀρθή· ἑπομένως θὰ εἶνε ΖΑ=ΖΒ=ΖΓ.



Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΖΔΑ δύναται νὰ κατασκευασθῇ· διότι ἔχει τὴν ΔΑ=Μ καὶ τὴν $ΔΖ = \frac{1}{2}Ρ$, εἶνε δὲ καὶ ὀρθογώνιον· ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν τὴν ἑπομένην λύσιν.

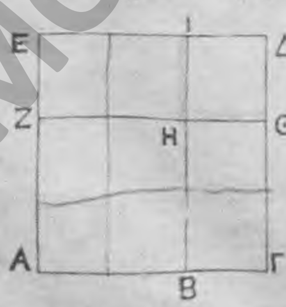
Ἐπὶ τῆς τυχούσης εὐθείας καὶ ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου Δ αὐτῆς ὑψοῦμεν κάθετον τὴν ΔΑ ἴσην τῇ εὐθείᾳ Μ, λαμβάνομεν ἔπειτα τὴν ΔΖ ἴσην τῷ ἡμίσει τῆς δοθείσης διαφορᾶς Ρ καὶ ἄγομεν τὴν ΑΖ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΖΑ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν εὐθεῖαν ΔΖ εἰς δύο σημεῖα Β καὶ Γ· λέγω, ὅτι αἱ προσκείμεναι πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου εἶνε αἱ ΒΔ, ΔΓ· διότι εἶνε

$$(ΒΔ).(ΔΓ)=(ΔΑ)^2=Μ^2$$

καὶ ἂν ληφθῇ ΖΕ=ΖΔ, θὰ εἶνε ἡ ΕΓ ἴση τῇ ΒΔ (ὡς ὑπόλοιπα ἴσων, τῶν ΒΖ, ΓΖ, ἀπὸ ἴσων, τῶν ΔΖ, ΕΖ), ἑπομένως αἱ ΔΓ, ΔΒ διαφέρουσι κατὰ τὴν ΔΕ, ἥτις εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Ρ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

207. *Ἐὰν εὐθεῖα σύγκειται ἐκ δύο ἄλλων, τὸ τετράγωνον αὐτῆς σύγκειται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων καὶ ἐκ δύο ὀρθογωνίων βάσιν μὲν ἐχόντων τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὕψος δὲ τὴν ἄλλην.*



Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΓ συγκειμένη ἐκ τῶν δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΒΓ. Ἂς κατασκευασθῇ τετράγωνον ἐπ' αὐτῆς τὸ ΑΓΔΕ καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΕ ἡ ΑΖ, ἴση τῇ ΑΒ, ἂς ἀχθῶσι δὲ ἡ ΒΙ παράλληλος τῇ ΑΕ καὶ ἡ ΖΘ παράλληλος τῇ ΑΓ· αἱ εὐθεῖαι αὗται διαιροῦσι τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἰς τέσσαρα μέρη. Τὸ πρῶτον ἐκ τούτων τὸ ΑΒΗΖ, εἶνε τὸ τετράγωνον τῆς ΑΒ. Τὸ δὲ δεύτερον ΗΙΔΘ εἶνε τετράγωνον ἔχον πλευρὰς ἴσας τῇ ΒΓ· διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ εἶνε πᾶσαι ὀρθαί, αἱ δὲ προσκείμεναι πλευραὶ αὐτοῦ ΔΘ καὶ ΔΙ εἶνε ἴσαι ἀλλήλαις· διότι ΔΘ=ΕΖ καὶ ΔΙ=ΒΓ (ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων), αἱ δὲ ΕΖ καὶ ΒΓ εἶνε ἴσαι, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων ΑΓ, ΑΕ, ἀφ' ὧν ἀφῃρέθησαν ἴσαι, αἱ ΑΒ, ΑΖ. Τὰ δὲ λοιπὰ σχήματα ΒΓΗΘ καὶ ΖΗΙΕ εἶνε ὀρθογώνια· ἔχει δὲ τὸ μὲν ΖΗΙΕ βάσιν τὴν ΖΗ, ἴσην τῇ ΑΒ, καὶ ὕψος τὴν ΕΖ, ἴσην τῇ ΒΓ, τὸ δὲ ΒΓΗΘ ἔχει βάσιν τὴν ΗΒ, ἴσην τῇ ΑΒ καὶ ὕψος τὴν ΒΓ. Ἐδείχθη ἄρα τὸ θεώρημα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῶν ἐμβαδῶν. Ἐὰν τῷ ὄντι παραστήσωμεν τὰ μήκη τῶν δύο γραμμῶν ΑΒ, ΒΓ διὰ α καὶ β, τὸ ἄθροισμα ΑΓ τῶν δύο γραμμῶν θὰ ἔχῃ μῆκος $\alpha+\beta$, καὶ τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $(\alpha+\beta)^2$. Ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2,$$ 1

ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΓ σύγκειται ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ (ὅπερ ἐμβαδὸν εἶνε α^2) καὶ ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΓ (ὅπερ εἶνε β^2) καὶ ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ δύο ὀρθογωνίων, ὧν βάσις ἡ ΑΒ καὶ ὕψος ἡ ΒΓ· ἐπομένως τὸ τετράγωνον τῆς ΑΓ εἶνε ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῆς ΑΒ καὶ τοῦ τετραγώνου τῆς ΒΓ καὶ τῶν δύο ὀρθογωνίων.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ἰσότητος

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$ 2

ἀποδεικνύεται τὸ ἑπόμενον θεώρημα:

208. *Ἐὰν εὐθεῖα εἶνε διαφορὰ δύο ἄλλων, τὸ τετράγωνον αὐτῆς ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, ἀφοῦ ἀφαιρεθῶσιν ἀπ' αὐτῶν δύο ὀρθογώνια βάσιν μὲν ἔχοντα τὴν μίαν τῶν εὐθειῶν, ὕψος δὲ τὴν ἄλλην.* 3

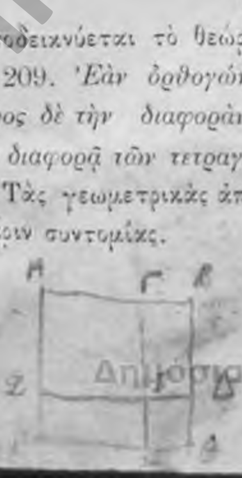
Ὁμοίως ἐκ τῆς ἰσότητος

$$(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$$

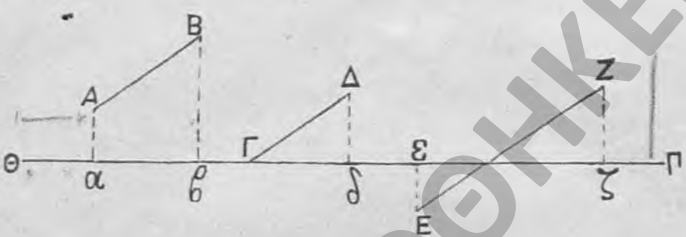
ἀποδεικνύεται τὸ θεώρημα:

209. *Ἐὰν ὀρθογώνιον ἔχῃ βάσιν μὲν τὸ ἄθροισμα δύο εὐθειῶν, ὕψος δὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶνε ἰσοδύναμον τῇ διαφορᾷ τῶν τετραγώνων τῶν αὐτῶν εὐθειῶν.*

Τὰς γεωμετρικὰς ἀποδείξεις τῶν θεωρημάτων τούτων παραλείπομεν χάριν συντομίας.



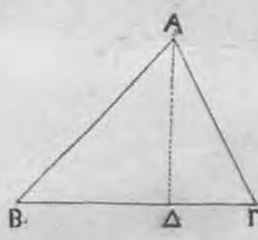
210. *Προβολὴ* εὐθείας ἐπὶ ἄλλην λέγεται, ἐὰν ἀπὸ τῶν ἄκρων αὐτῆς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἄλλην, τὸ μεταξὺ τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τούτων περιεχόμενον τμῆμα.



Οἷον προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΘΠ εἶνε ἡ αβ, τῆς ΓΔ ἡ Γδ καὶ τῆς ΕΖ ἡ εζ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

211. *Ἐν παντὶ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον πλευρᾶς ἐχούσης ἀπέναντι ὀξεῖαν γωνίαν εἶνε μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν κατὰ δύο ὀρθογώνια ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.*



Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ πλευρὰ ἀπέναντι ὀξείας γωνίας ἡ ΑΒ, προβολὴ δὲ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἡ ΔΓ· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε $(AB)^2=(A\Gamma)^2+(B\Gamma)^2-2(B\Gamma).(\Delta\Gamma)$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ εὑρίσκομεν

$$(AB)^2=(A\Delta)^2+(B\Delta)^2$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $B\Delta=B\Gamma-\Delta\Gamma$,

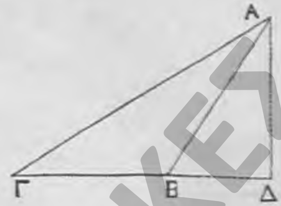
ἕπεται $(B\Delta)^2=(B\Gamma)^2+(\Delta\Gamma)^2-2\,(B\Gamma).(\Delta\Gamma)$,

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(B\Delta)^2$ εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα εὑρίσκομεν

$$(AB)^2=(A\Delta)^2+(B\Gamma)^2+(\Gamma\Delta)^2-2\,(B\Gamma)\cdot(\Gamma\Delta).$$

καὶ ἐπειδὴ $(A\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2$ ἰσοῦται τῷ $(A\Gamma)^2$ (διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ), συμπεραίνομεν τὴν ἰσότητα

$$(AB)^2=(A\Gamma)^2+(B\Gamma)^2-2(B\Gamma).(\Delta\Gamma).$$

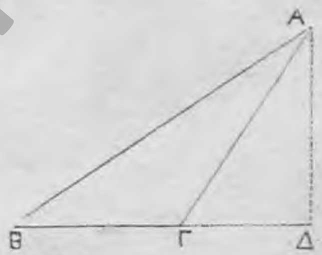


Ἐὰν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου (ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ἡ γωνία ΑΒΓ εἶνε ἀμβλεῖα), θὰ εἶνε ΒΔ=ΓΔ—ΒΓ, κατὰ δὲ τὰ ἄλλα ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτή.

ΘΕΩΡΗΜΑ

212. *Ἐν ἀμβλυγωνίῳ τριγώνῳ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς, ἥτις ἔχει ἀπέναντι τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, εἶνε μεγαλήτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν κατὰ δύο ὀρθογώνια ἔχοντα βάσιν μὲν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ ταύτην.*

Ἔστω τρίγωνον ἀμβλυγώνιον, τὸ ΑΒΓ, ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν γωνίαν Γ καὶ ΓΔ ἡ προβολὴ τῆς ΑΓ ἐπὶ τὴν ΒΓ· λέγω, ὅτι εἶνε



$(ΑΒ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΓ)^2+2(ΒΓ).(ΔΓ)$·

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ, εὑρίσκομεν

$$(ΑΒ)^2=(ΑΔ)^2+(ΒΔ)^2$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε ΒΔ=ΒΓ+ΓΔ,

ἕπεται, $(ΒΔ)^2=(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+2(ΒΓ).(ΓΔ)$·

ἀντικαθιστῶντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(ΒΔ)^2$ εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα, εὑρίσκομεν $(ΑΒ)^2=(ΑΔ)^2+(ΒΓ)^2+(ΓΔ)^2+2(ΒΓ).(ΓΔ)$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $(ΑΔ)^2+(ΓΔ)^2=(ΑΓ)^2$, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$(ΑΒ)^2=(ΑΓ)^2+(ΒΓ)^2+2(ΒΓ).(ΔΓ).$$ ὃ. ἔ. δ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

213. *Ἐὰν εἰς τρίγωνον μία πλευρὰ ἔχῃ τετράγωνον ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων, ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶνε ὀρθή.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ τὰς πλευρὰς παντὸς ὀρθογωνίου τριγώνου συνδέουσα ἰσότης $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2$ ἐπαληθεύεται, ἐὰν λάβωμεν

$$(ΒΓ)=\alpha^2+\beta^2, \quad (ΑΒ)=\alpha^2-\beta^2, \quad (ΑΓ)=2\alpha\beta,$$

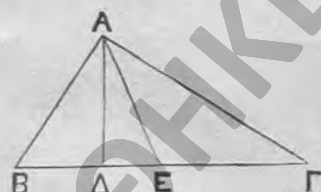
ἔνθα α καὶ β εἶνε τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί· ἑπομένως μεταχειριζόμενοι τοὺς τύπους τούτους δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅσα θέλωμεν ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα πλευρὰς δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν παριστωμένας (ἑπομένως συμμέτρους πρὸς ἀλλήλας). Τὸ ἁπλούστατον πάντων εἶνε τὸ ἔχον πλευρὰς 3, 4, 5 (ἰδὲ Στ. Ἀλγ. σελ. 180).

ΘΕΩΡΗΜΑ

214 214. *Ἐὰν εἰς τρίγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓ, ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς τὸ μέσον Ε τῆς βάσεως ἡ εὐθεῖα ΑΕ, θὰ εἶνε*

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2=2(\mathrm{AE})^2+2(\mathrm{BE})^2.$$

Διότι ἄγοντες τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, εὑρίσκομεν ἐκ τῶν δύο τριγώνων ΑΒΕ καὶ ΑΓΕ κατὰ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα:



ἐκ τοῦ ΑΒΕ (οὗ ἡ γωνία Ε εἶνε ὀξεῖα)

$$(\mathrm{AB})^2=(\mathrm{AE})^2+(\mathrm{BE})^2-2(\mathrm{BE}).(\Delta\mathrm{E})\cdot$$

ἐκ δὲ τοῦ ΑΓΕ (οὗ ἡ γωνία Ε εἶνε ἀμβλεῖα)

$$(\mathrm{A\Gamma})^2=(\mathrm{AE})^2+(\Gamma\mathrm{E})^2+2(\Gamma\mathrm{E}).(\Delta\mathrm{E}).$$

προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐνθυμούμενοι ὅτι εἶνε ΒΕ = ΓΕ, εὑρίσκομεν

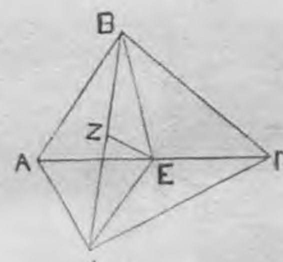
$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{A\Gamma})^2=2.(\mathrm{AE})^2+2.(\mathrm{BE})^2. \qquad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

16

ΘΕΩΡΗΜΑ

53 215. *Ἐν παντὶ τετραπλεύρῳ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων πλέον τετράκις τὸ τετράγωνον τῆς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.*

Ἔστω τυχὸν τετράπλευρον τὸ ΑΒΓΔ καὶ διαγώνιοι αὐτοῦ αἱ ΑΓ, ΒΔ, μέσα δὲ αὐτῶν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε $(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{B\Gamma})^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta\mathrm{A})^2=(\mathrm{A\Gamma})^2+(\mathrm{B}\Delta)^2+4(\mathrm{EZ})^2$.



Διότι ἄγοντες τὰς εὐθείας ΒΕ, ΔΕ εὑρίσκομεν ἐκ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{B\Gamma})^2=2(\mathrm{BE})^2+2(\mathrm{E\Gamma})^2,$$
$$(\mathrm{A}\Delta)^2+(\Delta\Gamma)^2=2(\Delta\mathrm{E})^2+2(\mathrm{E\Gamma})^2$$

καὶ προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{AB})^2+(\mathrm{B\Gamma})^2+(\Gamma\Delta)^2+(\Delta\mathrm{A})^2=2(\mathrm{BE})^2+2(\Delta\mathrm{E})^2+4(\mathrm{E\Gamma})^2. \qquad (1)$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΕΔ εὑρίσκομεν πάλιν κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα

$$(\mathrm{BE})^2+(\Delta\mathrm{E})^2=2(\Delta\mathrm{Z})^2+2(\mathrm{EZ})^2$$

καὶ διπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἔχομεν

$$2(ΒΕ)^2 + 2(ΔΕ)^2 = 4(ΔΖ)^2 + 4(ΕΖ)^2.$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (ι) τὸ ἄθροισμα $2(ΒΕ)^2 + 2(ΔΕ)^2$ διὰ τοῦ ἴσου του $4(ΔΖ)^2 + 4(ΕΖ)^2$, εὑρίσκομεν

$$(ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2 + (ΓΔ)^2 + (ΔΑ)^2 = 4(ΔΖ)^2 + 4(ΕΖ)^2 + 4(ΕΓ)^2$$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε ΑΓ = 2(ΕΓ) καὶ ΒΔ = 2(ΔΖ), ἕπεται $(ΑΓ)^2 = 4(ΕΓ)^2$ καὶ $(ΒΔ)^2 = 4(ΔΖ)^2$· ὅθεν ἀντικαθιστῶντες τὰ $4(ΕΓ)^2$ καὶ $4(ΔΖ)^2$ διὰ τῶν ἴσων των $(ΑΓ)^2$ καὶ $(ΒΔ)^2$, εὑρίσκομεν

$$(ΑΒ)^2 + (ΒΓ)^2 + (ΓΔ)^2 + (ΔΑ)^2 = (ΑΓ)^2 + (ΒΔ)^2 + 4(ΕΖ)^2.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

216. *Ἐν παντὶ παραλληλογράμμῳ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο διαγωνίων.*

Διότι ἐν τῷ παραλληλογράμμῳ τὰ μέσα Ε, Ζ τῶν διαγωνίων συμπίπτουσιν, ἐπομένως ἡ ΕΖ μηδενίζεται.

Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶνε 12 πήχεις καὶ ἡ μία τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας 3 πήχεις· ζητεῖται ἡ ἄλλη πλευρὰ καὶ τὸ ἐμβαδόν. (Ἀπ. Ἡ πλευρὰ εἶνε $\sqrt{135}$, ἤτοι 11,61895 . . . . , τὸ ἐμβαδὸν $\frac{3}{2}\sqrt{135}$, ἤτοι 17,42842 . . . .).

2) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ὑποτείνουσα εἶνε 40 πήχεις· ζητοῦνται αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.
(Ἀπ. Αἱ πλευραὶ εἶνε $20\sqrt{2}$, $20\sqrt{2}$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν 400).

3) Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον τὰ δύο τμήματα τῆς ὑποτεινούσης, εἰς ἃ αὕτη διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους, εἶνε τὸ μὲν 8, τὸ δὲ ἄλλο 2 πήχεις· ζητοῦνται τὸ ὕψος, αἱ ἄλλαι πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.
(Ἀπ. ὕψος 4, αἱ πλευραὶ $\sqrt{80}$ ἢ $4.\sqrt{5}$ καὶ $\sqrt{20}$ ἢ $2.\sqrt{5}$, ἐμβαδὸν 20).

4) Παραλληλογράμμου τινὸς αἱ δύο προσκείμεναι πλευραὶ εἶνε ἡ μὲν 8 πήχεις, ἡ δὲ 3, ἡ δὲ ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένη γωνία εἶνε $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς· ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. (Ἀπ. $12\sqrt{2}$).

5) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶνε 7, 7, καὶ 9 πήχεις· ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. (Ἀπ. $\frac{9}{4}\sqrt{115}$).

92

6) Τριγώνου τινὸς αἱ τρεῖς πλευραὶ εἶνε ἡ μὲν 12 πήχεις, ἡ δὲ 8, ἡ δὲ 16· ζητοῦνται αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου. (Ἀπ. $\sqrt{124}$, $\sqrt{184}$, $\sqrt{40}$).

7) Ὀρθογωνίου τινὸς ἡ μὲν βάσις εἶνε 15 μ, τὸ δὲ ὕψος 4· ἐὰν κατασκευασθῇ τετράγωνον ἴσην ἔχον περίμετρον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο, κατὰ πόσον θὰ εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου μεγαλήτερον; (Ἀπ. κατὰ 30τ.μ,25).

93

8) Τραπεζίου τινὸς αἱ δύο βάσεις εἶνε ἡ μὲν μία 100 πήχεις, ἡ δὲ ἄλλη 40, αἱ δὲ ἄλλαι πλευραὶ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας καὶ ἑκάστη εἶνε 50 πήχεις· ζητεῖται τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. (Ἀπ. 2800τ.π).

9) Ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ περίμετρος εἶνε 50 πήχεις· ζητοῦνται αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδόν.

ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΜΕΓΕΘΟΥΣ ΕΠΙ ΑΡΙΘΜΟΝ

217. *Γινόμενον μεγέθους τινὸς Α ἐπὶ ἀριθμὸν οἱονδήποτε* λέγεται τὸ μέγεθος τὸ συγκείμενον ἐκ τοῦ Α καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ, καθὼς σύγκειται ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς.

Παραδείγματος χάριν, τὸ γινόμενον Α.3 εἶνε Α+Α+Α, τὸ δὲ γινόμενον $A.\frac{3}{5}$ εἶνε $\frac{A}{5}+\frac{A}{5}+\frac{A}{5}$ (διότι $\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}$) καὶ τὸ γινόμενον Α.(2,31...) εἶνε

$$A+A+\frac{A}{10}+\frac{A}{10}+\frac{A}{10}+\frac{A}{100}+\ldots,\quad \text{ἢ } A.2+\frac{A}{10}3+\frac{A}{100}+\ldots$$

Παρατήρησις. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς μεγέθους ἐπὶ ἀριθμὸν ἔχει τὰς ἑξῆς γενικὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀριθμῶν·

$$M\ (\alpha+\beta)=(M.\alpha)+(M.\beta),$$
$$(M+M')\cdot\alpha=(M.\alpha)+(M'\alpha)$$
$$(M.\alpha).\beta=M.\ (\alpha.\beta).$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς εἶνε πολλαπλασιαστής, ἔπρεπε νὰ γράφωμεν Α.3, Α.5 κτλ., ἀλλ' ἐπεκράτησεν ἡ γραφὴ 3.Α, 5.Α, διότι ἐν τοῖς ἀλγεβρικοῖς λογισμοῖς προτάσσομεν τοὺς ἀριθμητικοὺς παράγοντας.

ΛΟΓΟΣ ΔΥΟ ΜΕΓΕΘΩΝ

218. *Λόγος μεγέθους πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς* (οἷον γραμμῆς πρὸς γραμμήν, ἐπιφανείας πρὸς ἐπιφάνειαν κτλ.) λέγεται *ὁ ἀριθμός, ὅστις δηλοῖ, πῶς ἀποτελεῖται τὸ μέγεθος τοῦτο ἐκ τοῦ ἄλλου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ· τοῦτ' ἔστιν, ὁ ἀριθμός, ὅστις σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθὼς σύγκειται τὸ πρῶτον μέγεθος ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ.*

Ἐὰν π. χ. εἶνε $A=3.B+\frac{B}{10}+8.\frac{B}{100}+2.\frac{B}{1000}+\ldots$ ἤτοι $A=(3,182..).B$, ὁ ἀριθμὸς 3,182... λέγεται λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β.

Ὁ ἐκ τῆς μετρήσεως τοῦ μεγέθους Α διὰ τῆς μονάδος του Μ προκύπτων ἀριθμός, ὁ παριστῶν αὐτό, εἶνε ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὴν μονάδα του (ἰδὲ ἐδ. 177).

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν προηγουμένων γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β εἶνε ὁ ἀριθμός, *ἐφ' ὃν πολλαπλασιαζόμενον τὸ Β δίδει τὸ Α.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

219. *Ὁ λόγος δύο μεγεθῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν* (ὅταν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος).

Διότι ἔστω λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β ὁ ἀριθμὸς 2,152...· τότε θὰ εἶνε κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ λόγου

$$A=2B+\frac{B}{10}+\frac{5B}{100}+\frac{2B}{1000}+\ldots$$

καὶ ἂν μετρήσωμεν τὰ δύο ἴσα μεγέθη (τὰ ἀποτελοῦντα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης) διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος Μ, θὰ εὕρωμεν ἴσους ἀριθμούς· ἔστω λοιπὸν α ὁ ἀριθμός, ὃν εὑρίσκομεν μετροῦντες τὸ μέγεθος Α καὶ β ὁ ἀριθμός, ὃν εὑρίσκομεν μετροῦντες τὸ Β· τὸ δέκατον τοῦ Β, ἤτοι τὸ $\frac{B}{10}$, μετρηθὲν θὰ δώσῃ τὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{10}$ (διότι τὸ $\frac{B}{10}$ δεκάκις ληφθὲν γίνεται Β· ἄρα καὶ ὁ ἀριθμός, ὅστις παριστᾷ αὐτό, δεκάκις ληφθείς, πρέπει νὰ γίνηται β· ἑπομένως εἶνε ὁ $\frac{\beta}{10}$)· ὁμοίως τὸ $\frac{B}{100}$ μετρηθὲν δίδει τὸν ἀριθμὸν $\frac{\beta}{100}$ κτλ.· ὅθεν ἕπεται

$$\alpha=2\beta+\frac{\beta}{10}+\frac{5\beta}{100}+\frac{2\beta}{1000}+\ldots=\beta.(2,152\ldots),$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ μεγέθους Α πρὸς τὸ μέγεθος Β ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν παριστώντων αὐτὰ ἀριθμῶν α καὶ β, ὅταν μετρηθῶσι διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. Ἐὰν δύο ὀρθογώνια (ἢ παραλληλόγραμμα ἢ τρίγωνα) ἔχωσιν ἴσας βάσεις, ὁ λόγος αὐτῶν εἶνε ἴσος τῷ λόγῳ τῶν ὑψῶν αὐτῶν· ἐὰν δὲ ἔχωσιν ἴσα ὕψη, ὁ λόγος αὐτῶν εἶνε ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν βάσεών των.

Τοῦτο ἕπεται ἀμέσως ἐκ τῶν ἀριθμῶν, δι' ὧν ἐκφράζονται αἱ ἐπιφάνειαι τῶν σχημάτων τούτων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους εὑρίσκομεν μετροῦντες τὰ μεγέθη Α καὶ Β, δυνάμεθα νὰ παριστῶμεν διὰ τῶν αὐτῶν γραμμάτων ἐγκλειομένων εἰς παρένθεσιν· οἷον (Α). (Β)· τότε ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Β παρίσταται διὰ τοῦ πηλίκου $\frac{(A)}{(B)}$ ἢ καὶ ἁπλῶς διὰ τοῦ $\frac{A}{B}$· Ὅταν δὲ δὲν θέλωμεν νὰ ὑποθέσωμεν τὰ μεγέθη μεμετρημένα, θὰ παριστῶμεν τὸν λόγον αὐτῶν ὡς ἑξῆς Α: Β.

ΠΕΡΙ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

220. *Ἀναλογία* λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων·
οἷον Α: Β=Γ: Δ, ἢ $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ εἶνε ἀναλογία.

Εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν οἱ δύο ὅροι ἑκάστου λόγου πρέπει νὰ εἶνε ἢ ἀριθμοὶ ἢ μεγέθη ὁμοειδῆ (ἵνα ἔχωσι λόγον), δύνανται ὅμως οἱ δύο πρῶτοι ὅροι νὰ εἶνε ἑτεροειδεῖς πρὸς τοὺς δύο τελευταίους.

Ἐὰν τὰ τέσσαρα μεγέθη Α, Β, Γ, Δ εἶνε ὁμοειδῆ, ἡ ἀναλογία Α:Β=Γ:Δ δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς Α:Γ=Β:Δ.

Ἐὰν τῷ ὄντι μετρηθῶσι τὰ μεγέθη ταῦτα διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος (οἱασδήποτε), θὰ εἶνε

$$\frac{(A)}{(B)}=\frac{(\Gamma)}{(\Delta)}.$$

Ἐὰν δὲ ἀπαλλάξωμεν τὴν ἰσότητα ταύτην ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν εὑρίσκομεν τὴν ἑξῆς (Α). (Δ)=(Β). (Γ)·
καὶ ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ ἴσα διὰ τοῦ γινομένου (Γ). (Δ), εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\frac{(A)}{(\Gamma)}=\frac{(B)}{(\Delta)}$,
ἐξ ἧς γίνεται φανερόν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ Α πρὸς τὸ Γ εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ Β πρὸς τὸ Δ· τουτέστιν Α : Γ=Β : Δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Πᾶσα ἀναλογία μεταξὺ μεγεθῶν τρέπεται εἰς ἀναλογίαν ἀριθμῶν, ἐὰν τὰ μεγέθη αὐτῆς μετρηθῶσι καὶ παρασταθῶσι δι' ἀριθμῶν (ἡ μονάς, δι' ἧς μετροῦμεν τοὺς ὅρους ἑκάστου λόγου, πρέπει (ἐδ. 219) νὰ εἶνε ἡ αὐτή) διὰ τοῦτο πᾶσα ἀναλογία ὑπάγεται εἰς τὴν ἰσότητα τῶν ἀριθμῶν καὶ ἔχει τὰς γενικὰς ἰδιότητας αὐτῆς.

Ἐὰν οἱ δύο μέσοι τῆς ἀναλογίας εἶνε ἴσοι, ἡ ἀναλογία λέγεται *συνεχὴς* καὶ ὁ μέσος λέγεται *μέσος ἀνάλογος* τῶν δύο ἄκρων· οἷον ἐν τῇ ἀναλογίᾳ Α: Β=Β: Γ ὁ Β λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν Α καὶ Γ.

221. Δύο ἢ περισσότερα μεγέθη λέγονται *ἀνάλογα* πρὸς ἄλλα ἰσάριθμα, ἐὰν προκύπτωσιν ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων κατὰ σειρὰν ἐφ᾽ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· τουτέστιν, ἂν ὁ λόγος τοῦ πρώτου πρὸς τὸ πρῶτον, τοῦ δευτέρου πρὸς τὸ δεύτερον κτλ. εἶνε εἷς καὶ ὁ αὐτὸς ἀριθμός.

Ἂν δηλαδὴ εἶνε $A=B\rho$, $A'=B'\rho$, $A''=B''\rho$, ἢ $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}=\frac{A''}{B''}$, τότε τὰ μεγέθη A, A', A'' λέγονται ἀνάλογα πρὸς τὰ B, B', B''.

Ἐὰν τὰ μεγέθη A, A', A'' εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰ B, B' B'', καὶ ἀντιστρόφως τὰ B, B', B'' θὰ εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰ A, A', A''. Διότι ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\frac{A}{B}=\frac{A'}{B'}=\frac{A''}{B''}$ ἕπεται $\frac{B}{A}=\frac{B'}{A'}=\frac{B''}{A''}$.

Τὰ δύο μεγέθη, ἅτινα προκύπτουσιν ἐξ ἀλλήλων διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, λέγονται *ἀντίστοιχα* ἢ *ὁμόλογα*.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἀναλόγων μεγεθῶν, εἰς πᾶσαν ἀναλογίαν $A:B=\Gamma:\Delta$ ἢ $\frac{A}{B}=\frac{\Gamma}{\Delta}$ οἱ δύο ἡγούμενοι εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο ἑπομένους (ἢ οἱ ἀριθμηταὶ πρὸς τοὺς παρονομαστάς)· ἐὰν δὲ καὶ οἱ τέσσαρες ὅροι εἶνε ὁμοειδεῖς, οἱ δύο πρῶτοι εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο δευτέρους.

Σημείωσις. Καὶ ὅταν οἱ τέσσαρες ὅροι τῆς ἀναλογίας $A:B=\Gamma:\Delta$ δὲν εἶνε πάντες ὁμοειδεῖς, δυνάμεθα καὶ πάλιν νὰ λέγωμεν, ὅτι οἱ δύο πρῶτοι εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς δύο τελευταίους· διότι οἱ ἀριθμοὶ οἱ παριστῶντες τοὺς δύο πρώτους (μετρηθέντας διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μονάδος) εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμούς, οἵτινες παριστῶσι τοὺς δύο τελευταίους (μετρηθέντας καὶ τούτους διὰ μιᾶς μονάδος). Τῷ ὄντι θὰ εἶνε $(A):(B)=(\Gamma):(\Delta)$ ἐξ ἧς καὶ $(A):(\Gamma)=(B):(\Delta)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι A, B, Γ, Δ συνιστῶσι τὴν ἀναλογίαν $A:B=\Gamma:\Delta$, θὰ εἶνε κατὰ τὰ ἀνωτέρω ῥηθέντα $(A).(\Delta)=(B).(\Gamma)$· καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $(A).(\Delta)$ εἶνε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν τὴν A καὶ ὕψος τὴν Δ, τὸ δὲ γινόμενον $(B).(\Gamma)$ εἶνε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου ἔχοντος βάσιν τὴν B καὶ ὕψος τὴν Γ, συνάγεται ἡ πρότασις:

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι A, B, Γ, Δ συνιστῶσιν ἀναλογίαν, τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν μέσων.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

Ἐὰν εἶνε $B=\Gamma$, ἐὰν δηλαδὴ ἡ B εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν A καὶ Δ, τὸ τετράγωνον τῆς B εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τῶν ἄκρων A καὶ Δ. Ὥστε τὸ πρόβλημα:

«*Εὑρεῖν τὴν μέσην ἀνάλογον δύο δοθεισῶν εὐθειῶν*» ἀνάγεται εἰς τὸ ἑξῆς: «*Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι ὀρθογωνίῳ*» (ἐδ. 203).

ΠΕΡΙ ΠΟΣΩΝ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Μεταβλητὸν ποσὸν λέγεται τὸ διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις λαμβάνον.

Δύο ποσὰ λέγεται ὅτι ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, ὅταν ἡ μεταβολὴ τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν προξενῇ μεταβολὴν καὶ τοῦ ἄλλου· οἷον τόξον τι κύκλου καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων· ὁμοίως ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἐν κύκλῳ καὶ τὸ τόξον, ἐφ' οὗ βαίνει· ὁμοίως ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ· κτλ.

Δύο ποσὰ λέγεται, ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἐάν, πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζηται καὶ τὸ ἄλλο πάντοτε ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· τοῦτ' ἔστιν, *ἐὰν πάντοτε αἱ νέαι τιμαὶ αὐτῶν εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς παλαιάς.*

Ἐὰν δηλαδὴ Α καὶ Β εἶνε δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν καὶ μεταβληθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου ἀπὸ Α εἰς Α.ρ, καὶ ἡ τιμὴ τοῦ δευτέρου πρέπει νὰ μεταβληθῇ ἀπὸ Β εἰς Β.ρ· ὥστε αἱ νέαι τιμαὶ Αρ, Βρ εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς παλαιὰς Α, Β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑποτίθεται, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀλλήλας μία πρὸς μίαν.

Ποσόν τι δὲ λέγεται, ὅτι μεταβάλλεται *ἀναλόγως πρὸς πολλὰ ἄλλα*, ἐὰν μεταβάλληται ἀναλόγως πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ὅταν τὰ λοιπὰ δὲν μεταβάλλωνται. Παραδείγματος χάριν, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου μεταβάλλεται ἀναλόγως καὶ πρὸς τὴν βάσιν καὶ πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ. Διότι, ὅταν ἡ βάσις μένῃ ἀμετάβλητος, τὸ ἐμβαδὸν μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ ὕψους· καὶ πάλιν, ὅταν τὸ ὕψος μένῃ ἀμετάβλητον, τὸ ἐμβαδὸν μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς βάσεως.

ΘΕΩΡΗΜΑ

222. *Ἐὰν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ πρώτου ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ δευτέρου.*

Ἔστωσαν Α καὶ Α' δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ πρώτου ποσοῦ καὶ Β, Β' αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ δευτέρου· λέγω ὅτι θὰ εἶνε $\frac{(A')}{(A)}=\frac{(B')}{(B)}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι, ἵνα ἡ τιμὴ Α μεταβληθῇ εἰς τὴν τιμὴν Α', ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ τὸν λόγον Α' : Α, ὅν τινα παριστῶ διὰ ρ (ἐδ. 218, Παρ.)· ἀλλὰ τότε καὶ ἡ τιμὴ Β θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ρ καὶ θὰ γίνῃ Β', τοῦτ' ἔστιν εἶνε

$$A' = A.\rho \text{ καὶ } B' = B.\rho,$$

ἐξ ὧν συνάγεται $\dfrac{(A')}{(A)} = \dfrac{(B')}{(B)}$.

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

ΘΕΩΡΗΜΑ

223. *Ἐὰν δύο ὁμοειδῆ ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ὁ λόγος αὐτῶν μένει πάντοτε ὁ αὐτός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Διότι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶνε

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B}, \quad \frac{A''}{A} = \frac{B''}{B}, \quad \frac{A'''}{A} = \frac{B'''}{B}.$$

ἐπειδὴ δὲ τὰ μεγέθη ταῦτα εἶνε ὁμοειδῆ, αἱ ἀναλογίαι αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς (ἐδ. 221):

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B}, \quad \frac{A''}{B''} = \frac{A}{B}, \quad \frac{A'''}{B'''} = \frac{A}{B}, \text{ τουτέστιν } \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'} = \frac{A''}{B''} = \frac{A'''}{B'''},$$

ἢ καὶ $A = B.\rho$, $A' = B'.\rho$, $A'' = B''.\rho$, $A''' = B'''.\rho$,

ρ ὄντος τοῦ λόγου Α : Β.

Ὅτι δὲ καὶ τἀνάπαλιν ἀληθεύει, εἶνε πρόδηλον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

224. *Δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἐὰν διπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς διπλασιάζηται καὶ τὸ ἄλλο, καὶ τριπλασιαζομένου τριπλασιάζηται, καὶ γενικῶς, ἐὰν ὁσαπλάσιον γίνῃ τὸ ἕν, τοσαπλάσιον γίνηται καὶ τὸ ἄλλο.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὑποτίθεται, ὅτι αἱ τιμαὶ αὐτῶν ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀλλήλας μία πρὸς μίαν.

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν· λέγω, ὅτι, ἐὰν ἡ πρώτη πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, οἷον τὸν 5,2741.... καὶ ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς, ἡ Β, θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως τὰ δύο ποσὰ θὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως.

ΑΠΟΔΕΙΞΙΣ. Εἰς τὴν τιμὴν Α τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ Β τοῦ δευτέρου· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν 5Α τοῦ πρώτου θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ 5Β.

Εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{10}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{B}{10}$ τοῦ δευτέρου (διότι, ὅταν δεκαπλασιασθῇ τὸ $\frac{A}{10}$ καὶ γίνῃ Α, πρέπει νὰ δεκαπλασιασθῇ καὶ ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ καὶ νὰ γίνῃ Β· ἡ δὲ τιμή, ἥτις δεκαπλασιαζομένη γίνεται Β, εἶνε ἡ $\frac{B}{10}$)· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν (5,2).Α. ἤτοι $52\cdot\frac{A}{10}$, θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ (5,2).Β.

Εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{100}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{B}{100}$ τοῦ δευτέρου· (διότι, ὅταν ἑκατονταπλασιασθῇ ἡ τιμὴ $\frac{A}{100}$ καὶ γίνῃ Α, πρέπει νὰ ἑκατονταπλασιασθῇ καὶ ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ καὶ νὰ γίνῃ Β)· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν (5,27).Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ (5,27)Β.

Εἰς τὴν τιμὴν $\frac{A}{1000}$ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{B}{1000}$ τοῦ δευτέρου· ἄρα εἰς τὴν τιμὴν (5,274). Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ (5,274). Β.

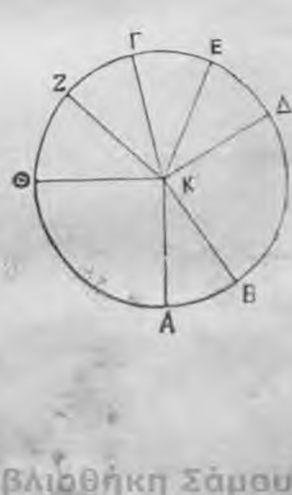
Ἐξακολουθοῦντες τοιουτοτρόπως ἀποδεικνύομεν, ὅτι εἰς τὴν τιμὴν (5,2741. .)Α θὰ ἀντιστοιχῇ ἡ τιμὴ (5,2741...)Β, ἐξ οὗ γίνεται φανερόν, ὅτι τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου εὐκολύνεται μεγάλως τὸ ζήτημα: «*νὰ διακρίνωμεν, ἂν δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως ἢ οὔ*», διότι ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι πᾶς ἀκέραιος πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς προξενεῖ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τοῦ ἄλλου, ἵνα ἐκ τούτου καὶ μόνου συμπεράνωμεν, ὅτι καὶ διὰ πάντα πολλαπλασιασμὸν συμβαίνει τὸ αὐτὸ καὶ ἑπομένως τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως. Ἡ εὐκολία αὕτη γίνεται φανερὰ ἐκ τῶν ἑπομένων δύο θεωρημάτων.

(Χάριν συντομίας θὰ λέγωμεν, ὅτι δύο ποσὰ *εἶνε ἀνάλογα*, ἀντὶ νὰ λέγωμεν, ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως).

ΘΕΩΡΗΜΑ

225. *Ἐν κύκλῳ ἡ ἐπίκεντρος γωνία μεταβάλλεται ἀναλόγως τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βαίνει.*



Διότι εἰς διπλάσιον τόξον ἀντιστοιχεῖ διπλασία ἐπίκεντρος γωνία, καὶ εἰς τριπλάσιον τριπλασία καὶ οὕτω καθεξῆς. Ἐάν, παραδείγματος χάριν, τὸ τόξον ΓΔ εἶνε διπλάσιον τοῦ τόξου ΑΒ, ἤτοι σύγκειται ἐκ δύο μερῶν ΓΕ, ΕΔ ἴσων τῷ ΑΒ, καὶ ἡ γωνία ΓΚΔ εἶνε διπλασία τῆς ΑΚΒ, ἤτοι σύγκειται ἐκ δύο γωνιῶν, ΓΚΕ, ΕΚΔ ἴσων πρὸς τὴν ΑΚΒ· (διότι βαίνουσιν ἐπὶ ἴσων τόξων).

Ἐὰν δὲ τὸ τόξον ΔΖ εἶνε τριπλάσιον τοῦ ΑΒ, καὶ ἡ γωνία ΔΚΖ εἶνε τριπλασία τῆς ΑΚΒ· καὶ οὕτω καθεξῆς. Τούτου δὲ συμβαίνοντος, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ ἐπίκεντρος γωνία καὶ τὸ τόξον αὐτῆς μεταβάλλονται ἀναλόγως· ἐπομένως δύο τυχοῦσαι ἐπίκεντροι γωνίαι, ἔστωσαν αἱ ΑΚΒ καὶ ΒΚΔ, ἔχουσι λόγον τὸν αὐτόν, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ τόξα ΑΒ καὶ ΒΔ, ἐφ' ὧν βαίνουσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

226. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, τὰ ἀντίστοιχα τμήματα αὐτῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως.*

Λέγω δὲ *ἀντίστοιχα* τμήματα τὰ μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων περιεχόμενα.

Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι εἰς διπλάσιον τμῆμα τῆς πρώτης ἀντιστοιχεῖ διπλάσιον τμῆμα τῆς δευτέρας, καὶ εἰς τριπλάσιον, τριπλάσιον· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἔστω ΑΓ τυχὸν τμῆμα τῆς πρώτης καὶ ΔΒ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ ἐν τῇ δευτέρα· ἐὰν τὸ τμῆμα ΗΚ εἶνε διπλάσιον τοῦ ΑΓ, ἤτοι σύγκειται ἐκ δύο μερῶν ΗΙ, ΙΚ ἴσων τῷ ΑΓ, καὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ, τὸ ΘΜ, θὰ εἶνε διπλάσιον τοῦ ΒΔ· διότι, ἀχθείσης τῆς ΙΛ παραλλήλου ταῖς ΑΒ, ΓΔ, . ., ΗΘ, ΚΜ, διαιρεῖται τὸ ΘΜ εἰς δύο μέρη ΘΛ, ΛΜ, ἅτινα εἶναι ἴσα τῷ ΒΔ (διότι εἰς ἴσα τμήματα ΑΓ, ΗΙ, ΙΚ τῆς μιᾶς ἀντιστοιχοῦσιν (148) ἴσα τῆς ἄλλης, τὰ ΒΔ, ΘΛ, ΛΜ).

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἂν τὸ τμῆμα ΗΝ εἶνε τριπλάσιον τοῦ ΑΓ, καὶ τὸ ἀντίστοιχον αὐτοῦ, τὸ ΘΠ, θὰ εἶνε τριπλάσιον τοῦ ΒΔ· καὶ οὕτω καθεξῆς διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἄρα τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῶν δύο εὐθειῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως καὶ διὰ τοῦτο δύο οἱαδήποτε τμήματα τῆς πρώτης ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα τμήματα τῆς δευτέρας.

Παραδείγματος χάριν εἶνε ΑΓ : ΑΕ = ΒΔ : ΒΖ

ΑΓ : ΓΕ = ΒΔ : ΔΖ

ΓΕ : ΑΕ = ΔΖ : ΒΖ

κτλ. κτλ. κτλ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

227. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων, ὁσαδήποτε τμήματα τῆς μιᾶς εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης.*

Διότι αἱ προηγούμεναι ἀναλογίαι δύνανται νὰ γραφῶσι καὶ ὡς ἑξῆς (ἐδ. 221):

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{ΑΕ}{ΒΖ},\quad \frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{ΓΕ}{ΔΖ},$$

ἢ

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{ΑΕ}{ΒΖ}=\frac{ΓΕ}{ΔΖ}$$

καὶ ἂν εἷς ἐκ τῶν λόγων τούτων παρασταθῇ διὰ τοῦ λ, θὰ εἶνε

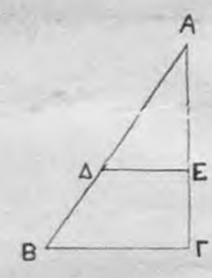
$$ΑΓ=λ.\,ΒΔ,\ ΑΕ=λ.\,ΒΖ,\ ΓΕ=λ.ΔΖ,$$

τοῦτ' ἔστι τὰ τυχόντα τμήματα ΑΓ, ΑΕ, ΓΕ τῆς εὐθείας ΑΝ εἶνε ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης (παράβ. ἐδ. 223).

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

. 228. *Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ τὰς δύο πλευρὰς τριγώνου, παράλληλος οὖσα τῇ τρίτῃ, τέμνει αὐτὰς εἰς μέρη ἀνάλογα.*

Ἐὰν δηλονότι ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ ΔΕ εἶνε παράλληλος τῇ ΒΓ, θὰ εἶνε



$$\frac{ΑΔ}{ΔΒ}=\frac{ΑΕ}{ΕΓ} \qquad (1)$$

καὶ

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ} \qquad (2)$$

καὶ

$$\frac{ΑΒ}{ΔΒ}=\frac{ΑΓ}{ΕΓ} \qquad (3)$$

Διότι ἡ ΒΓ καὶ ἡ ΔΕ καὶ ἡ παράλληλος αὐτῶν, ἡ ἐκ τοῦ Α ἀγομένη, τέμνουσι τὰς δύο εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, καὶ τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΒ, ΑΒ τῆς πρώτης εἶνε ἀντίστοιχα τῶν τμημάτων ΑΕ, ΕΓ, ΑΓ τῆς δευτέρας.

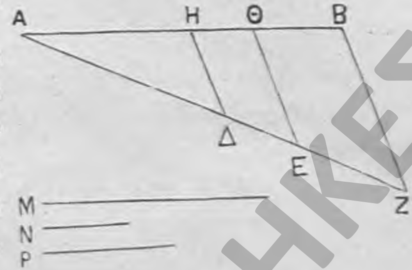
§ 232

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

229. *Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Ρ·*

τουτέστι τοιαῦτα, ὥστε πολλαπλασιαζόμενα ἐπί τινα ἀριθμὸν νὰ γίνωνται ἴσα πρὸς τὰς δοθείσας εὐθείας Μ, Ν, Ρ.

Ἐκ τοῦ σημείου Α ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα σχηματίζουσα γωνίαν μετὰ τῆς ΑΒ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς ἡ ΑΔ ἴση τῇ Μ, ἡ ΔΕ ἴση τῇ Ν καὶ ἡ ΕΖ ἴση τῇ Ρ· ἂς ἀχθῇ δὲ ἐκ τοῦ Ζ ἡ ΒΖ καὶ ἐκ τῶν σημείων Δ,Ε, παράλληλοι αὐτῆς αἱ ΔΗ, ΕΘ. Αὗται διαιροῦσι τὴν ΑΒ εἰς τὰ μέρη ΑΗ, ΗΘ, ΘΒ, ἅτινα κατὰ τὸ πόρισμα 227 εἶνε ἀνάλογα τῶν ΑΔ, ΔΕ, ΕΖ, ἤτοι τῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Ρ, τουτέστιν εἶνε



$$Μ=λ.\ ΑΗ,\ Ν=λ.\ ΗΘ,\ Ρ=λ.\ ΘΒ,$$

λ ὄντος τοῦ λόγου δύο οἱωνδήποτε ἀντιστοιχούντων τμημάτων.

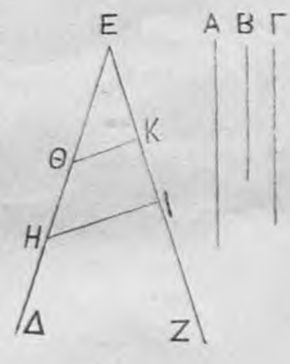
ΠΡΟΒΛΗΜΑ

230. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Α, Β, Γ*

τουτέστιν εὐθεῖά τις Δ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶνε

$$Α:\ Β=Γ:\ Δ.$$

Ἂς σχηματισθῇ τυχοῦσα γωνία ἡ ΔΕΖ καὶ ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἡ ΕΗ ἴση τῇ Α καὶ ἡ ΕΘ ἴση τῇ Β, ἐπὶ δὲ τῆς ἄλλης ἡ ΕΙ ἴση τῇ Γ· ἂς ἐπιζευχθῇ ἔπειτα ἡ ΗΙ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΘΚ παράλληλος τῇ ΗΙ· λέγω, ὅτι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα Δ εἶνε ἡ ΕΚ.



Διότι κατὰ τὸ θεώρημα 226 εἶνε

$$ΕΗ:\ ΕΘ=ΕΙ:\ ΕΚ$$

τουτέστιν

$$Α:\ Β=Γ:\ ΕΚ.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

231. *Δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐπὶ τὸν λόγον δύο ἄλλων.*

Διότι, ἵνα πολλαπλασιάσωμεν τὴν εὐθεῖαν Θ ἐπὶ τὸν λόγον Μ: Ν τῶν εὐθειῶν Μ καὶ Ν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον Σ τῶν εὐθειῶν Ν, Μ καὶ Θ· διότι ἐκ τῆς ἀναλογίας Ν: Μ=Θ: Σ ἕπεται

$$Σ=Θ.\ \frac{(Μ)}{(Ν)}.$$

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

232. *Ὅμοια* λέγονται δύο εὐθύγραμμα σχήματα, ἐὰν αἱ μὲν γωνίαι αὐτῶν εἶνε ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ αὐτῶν (ἤτοι αἱ τὰς κορυφὰς ἴσων γωνιῶν ἐπιζευγνύουσαι) εἶνε ἀνάλογοι.

Αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ τῶν ὁμοίων σχημάτων λέγονται καὶ *ὁμόλογοι*.

25

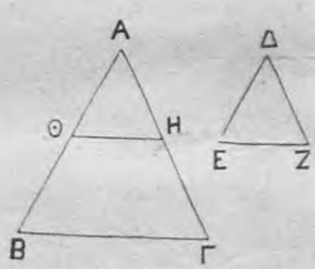
ΘΕΩΡΗΜΑ

233. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶνε ὅμοια.*

Ἔστωσαν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ, ἐν οἷς ὑποτίθεται

$$Α=Δ,\ Β=Ε,\ Γ=Ζ\cdot$$

λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ὅμοια.



Διότι, ἂν ἐφαρμοσθῇ ἡ γωνία Δ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Α οὕτως, ὥστε νὰ τεθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτῆς ἐπὶ τῶν ὁμολόγων των, τὸ τρίγωνον ΔΕΖ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν ΑΘΗ καὶ θὰ εἶνε ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΒΓ· διότι αἱ γωνίαι Β καὶ ΑΘΗ εἶνε ἴσαι,+ ὡς ἴσαι τῇ αὐτῇ γωνίᾳ Ε. Ἐκ τούτου ἕπεται (228) ἡ ἰσότης

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΑΘ)}=\frac{(ΑΓ)}{(ΑΗ)}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΘ εἶνε ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΔΖ, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)}=\frac{(ΑΓ)}{(ΔΖ)}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ἂν ἐφαρμοσθῇ ἡ γωνία Ε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ Β,

$$\frac{(ΑΒ)}{(ΔΕ)}=\frac{(ΒΓ)}{(ΕΖ)}.$$

+) έχουσι τας εκτός και εντός γωνίας ίσας άρα είναι παράλληλοι.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι οἱ τρεῖς λόγοι τῶν ἀντοιστοιχουσῶν πλευρῶν

$$\frac{(\mathrm{AB})}{(\Delta\mathrm{E})},\quad \frac{(\mathrm{A}\Gamma)}{(\Delta\mathrm{Z})},\quad \frac{(\mathrm{B}\Gamma)}{(\mathrm{EZ})}$$

εἶνε ἴσοι· εἶνε δὲ καὶ $\mathrm{A}=\Delta$, $\mathrm{B}=\mathrm{E}$, $\Gamma=\mathrm{Z}$, ἑπομένως τὰ τρίγωνα εἶνε ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ

234. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι δύο γωνίας ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, εἶνε ὅμοια.*

Διότι καὶ τὴν τρίτην γωνίαν ἔχουσιν ἴσην (74).

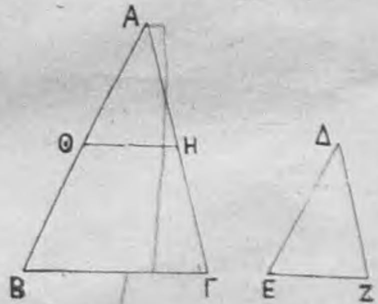
ΘΕΩΡΗΜΑ

235. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους, εἶνε ὅμοια.*

Ἔστωσαν ἀνάλογοι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ· ἤτοι ἔστωσαν οἱ τρεῖς λόγοι

$$\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}},\quad \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\Delta\mathrm{Z}},\quad \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{EZ}} \qquad (1)$$

ἴσοι· λέγω, ὅτι καὶ αἱ γωνίαι, αἱ ὑπὸ ἀναλόγων πλευρῶν περιεχόμεναι, θὰ εἶνε ἴσαι, καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα θὰ εἶνε ὅμοια.



Ἄς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΘ ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ παράλληλος τῇ ΒΓ ἡ ΘΗ· τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΑΒΓ εἶνε ὅμοια (ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν)· ἑπομένως οἱ τρεῖς λόγοι

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Theta},\quad \frac{\mathrm{A}\Gamma}{\mathrm{AH}},\quad \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\Theta\mathrm{H}} \qquad (2)$$

εἶνε ἴσοι· ἐπειδὴ δὲ ἐλήφθη $\mathrm{A}\Theta=\Delta\mathrm{E}$, θὰ εἶνε καὶ $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A}\Theta}=\frac{\mathrm{AB}}{\Delta\mathrm{E}}$, ἄρα καὶ οἱ ἓξ λόγοι (1) καὶ (2) εἶνε ἴσοι· καὶ οἱ ἔχοντες ἀριθμητὰς ἴσους θὰ ἔχωσι καὶ τοὺς παρονομαστὰς ἴσους· ὅθεν ἕπεται $\Theta\mathrm{H}=\mathrm{EZ}$, καὶ $\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{AH}$.

Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΖ καὶ ΑΘΗ, ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς των ἴσας κατὰ μίαν, εἶνε ἴσα· ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶνε ὅμοια

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων βλέπομεν, ὅτι ἐν τοῖς τριγώνοις ἡ ἰσότης τῶν γωνιῶν συνεπάγεται τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν· καὶ ἀντιστρόφως, ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν. Ἀλλὰ τοῦτο δὲν συμβαίνει καὶ εἰς τὰ ἔχοντα περισσοτέρας πλευρὰς σχήματα.

Διότι παραδείγματος χάριν ὀρθογώνιον καὶ τετράγωνον ἔχουσιν ἴσας τὰς γωνίας αὐτῶν, οὐχὶ δὲ καὶ τὰς πλευρὰς ἀναλόγους. Ὁμοίως ῥόμβος καὶ τετράγωνον ἔχουσι τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ἀλλὰ τὰς γωνίας ἀνίσους. Ὁμοίως ἐὰν ἐν τῷ τυχόντι πολυγώνῳ ΑΒΓΔΕ ἀχθῇ ἔκ τινος σημείου τῆς ΑΒ παράλληλος τῇ ΒΓ, ἡ Β′ Γ′, τὰ δύο σχήματα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ′ Γ′ ΔΕ ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν. ἀλλ' αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πλευραὶ αὐτῶν δὲν εἶνε ἀνάλογοι· διότι ἡ μὲν ΑΕ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ἴσην της ΑΕ τοῦ δευτέρου, ἡ δὲ ΑΒ τοῦ πρώτου ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν ΑΒ′ ἄνισον πρὸς αὐτήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

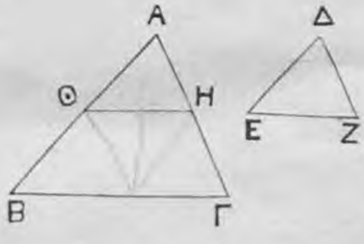
236. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ὅμοια.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα

$$Α=Δ$$

$$\text{καὶ } \frac{ΔΕ}{ΑΒ}=\frac{ΔΖ}{ΑΓ} \qquad (1)$$

λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ὅμοια.



Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΘ ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΘΗ εἶνε ὅμοια καὶ διὰ τοῦτο εἶνε·

$$\frac{ΑΘ}{ΑΒ}=\frac{ΑΗ}{ΑΓ} \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη $ΑΘ=ΔΕ$, εἶνε καὶ $\frac{ΑΘ}{ΑΒ}=\frac{ΔΕ}{ΑΒ}$· ἄρα ἐκ τῶν ἰσοτήτων

(1) καὶ (2) προκύπτει

$$\frac{ΔΖ}{ΑΓ}=\frac{ΑΗ}{ΑΓ}, \qquad \text{ὅθεν} \quad ΔΖ=ΑΗ.$$

Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΔΕΖ, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην (Α=Δ) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας, εἶνε ἴσα· ὅθεν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶνε ὅμοια.

ΠΟΡΙΣΜΑ

237. *Ἐὰν εὐθεῖα, ὡς ἡ ΘΗ, τέμνῃ τὰς πλευρὰς τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶνε παράλληλος τῇ βάσει τοῦ τριγώνου.*

Διότι τὸ ὑπὸ τῆς τεμνούσης χωριζόμενον τρίγωνον εἶνε ὅμοιον τῷ ὅλῳ τριγώνῳ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

238. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἀνὰ δύο ἢ καθέτους ἀνὰ δύο, τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ὅμοια καὶ ὁμόλογοι πλευραὶ θὰ εἶνε αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι.*

Ἔστωσαν Α, Β, Γ αἱ γωνίαι τοῦ ἑνὸς καὶ Α', Β', Γ' αἱ τοῦ ἄλλου, ἂς σημειωθῶσι δὲ διὰ τοῦ αὐτοῦ γράμματος, αἱ γωνίαι αἱ τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἔχουσαι, ἢ καθέτους.

Ἐπειδὴ δύο γωνίαι, ἔχουσαι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους ἢ καθέτους, εἶνε ἢ ἴσαι ἢ παραπληρωματικαὶ (67 καὶ 68), διὰ τοῦτο δύνανται νὰ γίνωσι περὶ τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων μόνον αἱ ἑξῆς τρεῖς ὑποθέσεις:

ἢ 1) $Α+Α'=2^{ορθ.}$ $\quad Β+Β'=2^{ορθ.}$ $\quad Γ+Γ'=2^{ορθ.}$
ἢ 2) $Α=Α'$ $\quad Β+Β'=2^{ορθ.}$ $\quad Γ+Γ'=2^{ορθ.}$
ἢ 3) $Α=Α'$ $\quad Β=Β'$ ἄρα (74) καὶ $Γ=Γ'$

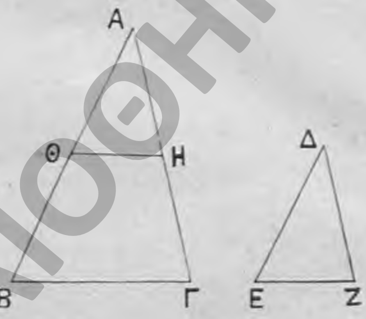
Ἀλλ' ἂν τὸ πρῶτον συνέβαινε, τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων θὰ ἦτο ἓξ ὀρθαί· ὅπερ ἀδύνατον· ἂν δὲ τὸ δεύτερον συνέβαινε, τὸ αὐτὸ ἄθροισμα θὰ ἦτο μεγαλήτερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ὅπερ καὶ τοῦτο ἀδύνατον. Ἄρα μόνη ἡ τρίτη ὑπόθεσις ἀληθεύει· ἤτοι τὰ τρίγωνα ἔχουσι τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν· ἄρα εἶνε ὅμοια.

* ΘΕΩΡΗΜΑ

239. *Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχωσι μίαν γωνίαν ἴσην μιᾷ γωνίᾳ, τὰς δὲ πλευράς, τὰς περιεχούσας δύο ἄλλας γωνίας, ἀναλόγους, ἢ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ὅμοια, ἢ αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι αὐτῶν εἶνε παραπληρωματικαί.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχοντα:

$$Α = Δ \text{ καὶ } \frac{ΕΔ}{ΒΑ} = \frac{ΕΖ}{ΒΓ} \qquad (1)$$



λέγω, ὅτι ἢ εἶνε τὰ τρίγωνα ταῦτα ὅμοια, ἢ εἶνε

$$Γ + Ζ = 2^{ὀρθ.}$$

Ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡ ΑΘ ἴση τῇ ΔΕ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Θ ἡ ΘΗ παράλληλος τῇ ΒΓ· τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΑΒΓ εἶνε ὅμοια καὶ διὰ ταῦτα εἶνε

$$\frac{ΑΘ}{ΑΒ} = \frac{ΘΗ}{ΒΓ} \qquad (2)$$

καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη ΑΘ=ΔΕ, θὰ εἶνε καὶ $\frac{ΑΘ}{ΑΒ} = \frac{ΔΕ}{ΑΒ}$· ἄρα ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγεται $\frac{ΘΗ}{ΒΓ} = \frac{ΕΖ}{ΒΓ}$, ὅθεν καὶ ΘΗ=ΕΖ.

Ἀλλὰ τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΘΗ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην, Α=Δ, καὶ δύο πλευρὰς ἴσας, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ (ΑΘ=ΔΕ καὶ ΘΗ=ΕΖ) καὶ ἑπομένως (88) ἢ τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα (ὅτε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶνε ὅμοια), ἢ αἱ γωνίαι Η καὶ Ζ συναποτελοῦσι δύο ὀρθάς· ὅτε καὶ αἱ Γ καὶ Ζ ἀποτελοῦσι δύο ὀρθὰς (διότι Η=Γ).

18

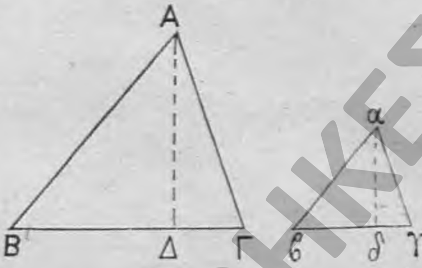
ΘΕΩΡΗΜΑ

240. *Τὰ ὅμοια τρίγωνα εἶνε πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν.*

Ἔστωσαν ὅμοια τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ· ἤτοι ἔστω $Α = α$, $Β = β$, $Γ = γ$ καὶ οἱ τρεῖς λόγοι $\frac{αβ}{ΑΒ}$, $\frac{βγ}{ΒΓ}$, $\frac{γα}{ΓΑ}$ ἴσοι τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ρ, ἤτοι ἔστω

$αβ = ρ.ΑΒ$, $\quad αγ = ρ.ΑΓ$, $\quad βγ = ρ.ΒΓ$.

Ἐκ τῶν κορυφῶν δύο ἴσων γωνιῶν, Α καὶ α, ἂς ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς αἱ ΑΔ καὶ αδ· τότε εἶνε



$$(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}(ΒΓ).(ΑΔ).$$

καὶ $(αβγ)=\frac{1}{2}(βγ).(αδ)$,

ὅθεν

$$\frac{(αβγ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(βγ)}{(ΒΓ)}\cdot\frac{(αδ)}{(ΑΔ)}. \qquad (1)$$

ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ αβδ εἶνε ὅμοια, ὡς ἔχοντα δύο γωνίας ἴσας, Β=β καὶ Δ=δ, ἐπομένως εἶνε $\frac{(αδ)}{(ΑΔ)}=\frac{(αβ)}{(ΑΒ)}$, ἄρα ἴσον καὶ τῷ $\frac{(βγ)}{(ΒΓ)}$.

Ἐὰν δὲ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸν λόγον $\frac{(αδ)}{(ΑΔ)}$ διὰ τοῦ ἴσου αὐτῷ $\frac{(βγ)}{(ΒΓ)}$, εὑρίσκομεν

$$\frac{(αβγ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(βγ)^2}{(ΒΓ)^2} \text{ ἢ } =\left(\frac{βγ}{ΒΓ}\right)^2.$$

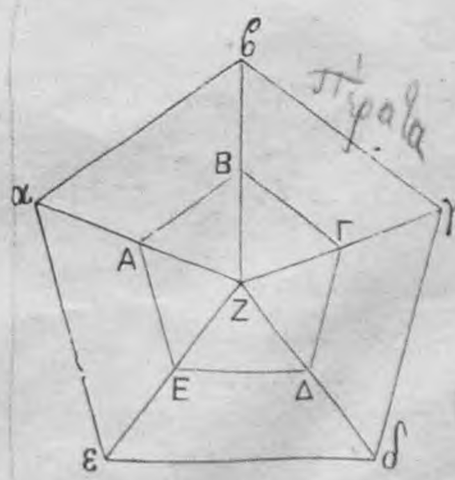
$$\text{ἢ} \quad (αβγ)=ρ^2.(ΑΒΓ).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

241. *Ἐὰν αἱ πλευραὶ τριγώνου πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ρ, ἤτοι ἐπὶ $ρ^2$.*

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

242. *Δοθέντος πολυγώνου νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον.*



Ἔστω δοθὲν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕ. Ἂς ληφθῇ τυχὸν σημεῖον τοῦ πολυγώνου τούτου, τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ Ζ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου αἱ εὐθεῖαι ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ, ὅτε γίνονται Ζα, Ζβ, Ζγ, Ζδ, Ζε· ἂς ἐπιζευχθῶσι δὲ τὰ ἄκρα των διὰ τῶν εὐθειῶν αβ, βγ, γδ, δε, εα· λέγω, ὅτι τὸ πολύγωνον αβγδε εἶνε ὅμοιον πρὸς τὸ δοθέν.

Ἐπειδὴ ἐλήφθη $Z\alpha = \rho . ZA$, $Z\beta = \rho . ZB$, οἱ λόγοι $\frac{Z\alpha}{ZA}$, $\frac{Z\beta}{ZB}$ εἶνε ἴσοι τῷ ρ καὶ τὰ τρίγωνα ΖΑΒ, Ζαβ εἶνε ὅμοια, ὡς ἔχοντα μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν Ζ) περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἀναλόγων· ὅθεν ἕπεται, ὅτι καὶ ὁ λόγος $\frac{\alpha\beta}{AB}$ ἰσοῦται τῷ ρ, καὶ ὅτι ἡ αβ εἶνε παράλληλος τῇ ΑΒ.

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται ὅμοια τὰ τρίγωνα ΖΒΓ καὶ Ζβγ, ΖΓΔ καὶ Ζγδ, ΖΔΕ καὶ Ζδε, ΖΕΑ καὶ Ζεα· ἑπομένως πάντες οἱ λόγοι

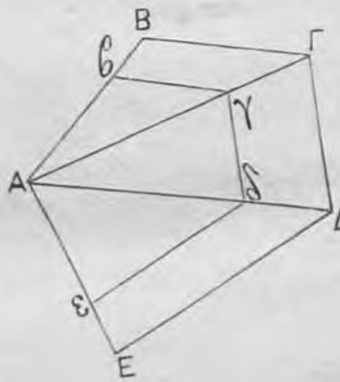
$$\frac{\alpha\beta}{AB},\ \frac{\beta\gamma}{B\Gamma},\ \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta},\ \frac{\delta\varepsilon}{\Delta E},\ \frac{\varepsilon\alpha}{EA}$$

ἰσοῦνται τῷ ἀριθμῷ ρ. Καὶ ἡ γωνία Α τοῦ δοθέντος πολυγώνου ἰσοῦται τῇ α, διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶνε παράλληλοι καὶ φέρονται πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη.

Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶνε ἡ Β ἴση τῇ β, καὶ καθεξῆς.

Ὥστε τὰ δύο πολύγωνα ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶνε ὅμοια.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς ρ εἶνε ὅλως ἀόριστος, δύνανται νὰ κατασκευασθῶσιν ἄπειρα πολύγωνα ὅμοια τῷ δοθέντι· καὶ ἂν μὲν ληφθῇ $\rho < 1$, τὸ κατασκευαζόμενον πολύγωνον εἶνε μικρότερον τοῦ δοθέντος, ἂν δὲ $\rho > 1$, μεγαλήτερον. Καὶ τὸ σημεῖον Ζ δύναται νὰ ληφθῇ ὁπουδήποτε. Ἀποβαίνει δὲ τὸ πρόβλημα ὡρισμένον, ὅταν δοθῇ μία πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ ορισθῇ, πρὸς ποίαν τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος θὰ ἀντιστοιχῇ, ὡς παραδείγματος χάριν ἡ αβ· τότε λαμβάνομεν τὸ Ζ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Α, ὅτε ἡ αβ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒ, αἱ δὲ πλευραὶ βγ, γδ, δε θὰ εἶνε παράλληλοι πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ.

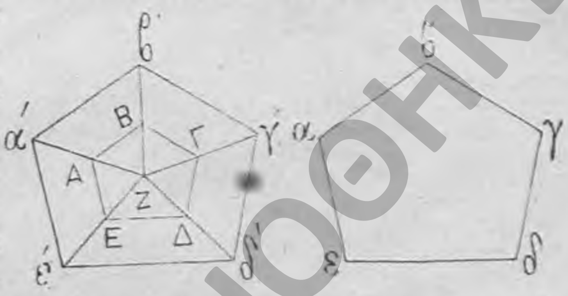


ΘΕΩΡΗΜΑ

243. *Δύο ὅμοια πολύγωνα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς τρίγωνα ἴσα τὸ πλῆθος, ὅμοια καθ' ἓν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένα.*

Ἔστωσαν ὅμοια τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε, ἤτοι ἔστωσαν οἱ λόγοι $\frac{\alpha\beta}{AB}, \frac{\beta\gamma}{B\Gamma}, \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}, \frac{\delta\varepsilon}{\Delta E}, \frac{\varepsilon\alpha}{EA}$ πάντες ἴσοι τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ρ καὶ πρὸς τούτοις $A=\alpha$, $B=\beta$, $\Gamma=\gamma$, $\Delta=\delta$ καὶ $E=\varepsilon$.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ζ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ, ὅτε γίνονται Ζα΄, Ζβ΄... Ζε΄, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ πέρατα αὐτῶν, ὥστε νὰ γίνῃ πολύγωνον ὅμοιον



τῷ ΑΒΓΔΕ, τὸ α΄β΄γ΄δ΄ε΄· τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶνε ἴσον τῷ αβγδε· διότι αἱ γωνίαι αὐτῶν (ὡς ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ΑΒΓΔΕ) εἶνε ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν· ἤτοι

$$\alpha'=\alpha,\quad \beta'=\beta,\quad \gamma'=\gamma,\quad \delta'=\delta,\quad \varepsilon'=\varepsilon,$$

αἱ δὲ πλευραὶ αὐτῶν εἶνε ἴσαι ὡσαύτως κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν· διότι πάντες οἱ λόγοι

$$\frac{\alpha\beta}{AB},\ \frac{\beta\gamma}{B\Gamma},\ldots,\frac{\varepsilon\alpha}{EA},\ \frac{\alpha'\beta'}{AB},\ \frac{\beta'\gamma'}{B\Gamma},\ldots,\frac{\varepsilon'\alpha'}{EA}$$

εἶνε ἴσοι τῷ ἀριθμῷ ρ (οἱ μὲν πρῶτοι ἐξ ὑποθέσεως, οἱ δὲ δεύτεροι ἐκ κατασκευῆς κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα)· ἐπομένως εἶνε

$$\alpha\beta=\alpha'\beta',\quad \beta\gamma=\beta'\gamma'\quad \gamma\delta=\gamma'\delta',\quad \delta\varepsilon=\delta'\varepsilon',\quad \varepsilon\alpha=\varepsilon'\alpha'.$$

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὰ δύο πολύγωνα αβγδε καὶ α΄β΄γ΄δ΄ε΄ ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἄλληλα, ἐὰν ἐφαρμόσῃ ἡ γωνία βαε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ β΄α΄ε΄· διότι τότε θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς α΄β΄ καὶ ἡ γωνία αβγ ἐπὶ τῆς α΄β΄γ΄, καὶ καθεξῆς· τούτου δὲ γενομένου, θὰ εὑρεθῇ τὸ αβγδε διῃρημένον εἰς τὰ τρίγωνα Ζα΄β΄, Ζβ΄γ΄,..., Ζε΄α΄, ἅτινα εἶνε τόσα, ὅσα εἶνε καὶ τὰ ΖΑΒ, ΖΒΓ,..., ΖΕΑ καὶ ὅμοια πρὸς αὐτὰ καθ' ἓν καὶ ὁμοίως κείμενα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

244. *Ἐὰν πολύγωνον εἶνε ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, καὶ πᾶν ὅμοιον αὐτῷ εἶνε ἐπίσης ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.*

Διότι, ἂν αἱ ΖΑ, ΖΒ,..., ΖΕ εἶνε ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ αἱ Ζα', Ζβ',... Ζε' εἶνε ἐπίσης ἴσαι ἀλλήλαις.

ΘΕΩΡΗΜΑ

245. *Τῶν ὁμοίων πολυγώνων αἱ μὲν περίμετροι εἶνε πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.*

Ἔστωσαν ὅμοια τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε, ἤτοι ἔστω

$$Α=α,\ Β=β,\ Γ=γ,\ Δ=δ,\ Ε=ε.$$

καὶ οἱ λόγοι $\frac{αβ}{ΑΒ}, \frac{βγ}{ΒΓ}, \frac{γδ}{ΓΔ}, \frac{δε}{ΔΕ}, \frac{εα}{ΕΑ}$

πάντες ἴσοι ἑνὶ ἀριθμῷ ρ· τότε θὰ εἶνε

$$\begin{aligned} αβ&=ρ.ΑΒ\\ βγ&=ρ.ΒΓ\\ γδ&=ρ.ΓΔ\\ δε&=ρ.ΔΕ\\ εα&=ρ.ΕΑ, \end{aligned}$$

ὅθεν καὶ $αβ+βγ+γδ+δε+εα=ρ\,(ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΑ)$, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι καὶ αἱ περίμετροι ἔχουσι τὸν λόγον ρ, ἤτοι τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ λόγου, ὃν ἔχουσιν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν πολυγώνων, διαιροῦμεν τὸ ἕτερον τούτων, ἔστω τὸ ΑΒΓΔΕ, εἰς τρίγωνα ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ζ καὶ κατασκευάζομεν, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ θεωρήματι, περὶ τὸ Ζ πολύγωνον ἴσον τῷ αβγδε. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΖΑΒ, ΖΒΓ,... εἶνε κατὰ σειρὰν ὅμοια πρὸς τὰ Ζαβ, Ζβγ,... καὶ ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶνε ρ, ἔχομεν (240)

$$\begin{aligned} (Ζαβ)&=ρ^2.(ΖΑΒ)\\ (Ζβγ)&=ρ^2.(ΖΒΓ)\\ (Ζγδ)&=ρ^2.(ΖΓΔ)\\ (Ζδε)&=ρ^2.(ΖΔΕ)\\ (Ζεα)&=ρ^2(ΖΕΑ)· \end{aligned}$$

προσθέτοντες δὲ κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, λαμβάνομεν

$$(αβγδε)=ρ^2.(ΑΒΓΔΕ)$$

ἢ $$\frac{(αβγδε)}{(ΑΒΓΔΕ)}=ρ^2=\frac{(αβ)^2}{(ΑΒ)^2},$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῶν ὁμοίων πολυγώνων ἔχουσι τὸν λόγον $ρ^2$, ἤτοι τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

246. *Ἐὰν αἱ πλευραὶ πολυγώνου πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπί τινα ἀριθμὸν ρ, αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ μείνωσιν ἀμετάβλητοι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ρ, ἤτοι ἐπὶ ϱ^2.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

247. *Ἐὰν τὰ ὅμοια πολύγωνα εἶνε ἐγγράψιμα εἰς κύκλον, αἱ μὲν περίμετροι αὐτῶν εἶνε πρὸς ἀλλήλας, ὡς αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, αἱ δὲ ἐπιφάνειαι αὐτῶν, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.*

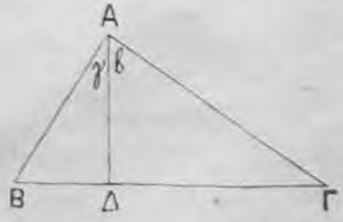
Διότι, ἂν τὸ Ζ ληφθῇ εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ὁ λόγος ρ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν ἀκτίνων $\frac{Z\alpha}{ZA}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

248. *Ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ, ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ὅλον· εἶνε δὲ ἡ μὲν ἀχθεῖσα κάθετος μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτεινούσης· ἑκατέρα δὲ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὅλου τριγώνου μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τοῦ εἰς αὐτὴν προσκειμένου τμήματος.*

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ καὶ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας Α κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἡ ΑΔ· λέγω, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶνε ὅμοια πρὸς ἄλληλα καὶ πρὸς τὸ ΑΒΓ.



Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουσι τὴν γωνίαν Β κοινὴν καὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας Α καὶ Δ ἴσας· ἄρα εἶνε ὅμοια καὶ ἡ γωνία Γ ἰσοῦται τῇ γ.

Καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὴν γωνίαν Γ κοινὴν καὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας Δ καὶ Α ἴσας· ἄρα εἶνε ὅμοια καὶ ἡ γωνία Β ἰσοῦται τῇ β.

Καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εἶνε ὅμοια· διότι ἐδείχθη ἡ γωνία Β ἴση τῇ β καὶ ἡ γωνία Γ ἴση τῇ γ.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ εὑρίσκομεν νῦν $\frac{\mathrm{Β\Delta}}{\mathrm{Α\Delta}}=\frac{\mathrm{Α\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}}$ ἢ ΒΔ:ΑΔ=ΑΔ:ΔΓ, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ κάθετος ΑΔ εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων ΒΔ, ΔΓ τῆς ὑποτεινούσης.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ εὑρίσκομεν

$$\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\mathrm{ΑΒ}}=\frac{\mathrm{ΑΒ}}{\mathrm{Β\Delta}}, \quad \text{ἢ } \mathrm{Β\Gamma}:\mathrm{ΑΒ}=\mathrm{ΑΒ}:\mathrm{Β\Delta}\cdot$$

ἐκ δὲ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ

$$\frac{\mathrm{Β\Gamma}}{\mathrm{Α\Gamma}}=\frac{\mathrm{Α\Gamma}}{\mathrm{Δ\Gamma}}, \quad \text{ἢ } \mathrm{Β\Gamma}:\mathrm{Α\Gamma}=\mathrm{Α\Gamma}:\mathrm{\Delta\Gamma}\cdot$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι ἑκατέρα τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τοῦ ΑΒΓ εἶνε μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ τοῦ εἰς αὐτὴν προσκειμένου τμήματος.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

1) Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων, ἐὰν ἀπαλλάξωμεν αὐτὰς ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}(\mathrm{Α\Delta})^2&=(\mathrm{Β\Delta})\,(\mathrm{\Delta\Gamma})\\(\mathrm{ΑΒ})^2&=(\mathrm{Β\Gamma}).(\mathrm{Β\Delta})\\(\mathrm{Α\Gamma})^2&=(\mathrm{Β\Gamma}).(\mathrm{\Delta\Gamma})\end{aligned}\qquad (1)$$

καὶ προσθέτοντες τὰς δύο τελευταίας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\mathrm{ΑΒ})^2+(\mathrm{Α\Gamma})^2=(\mathrm{Β\Gamma})\left\{(\mathrm{Β\Delta})+(\mathrm{\Delta\Gamma})\right\}$$

ἤτοι $(\mathrm{ΑΒ})^2+(\mathrm{Α\Gamma})^2=(\mathrm{Β\Gamma}).(\mathrm{Β\Gamma})=(\mathrm{Β\Gamma})^2$.

Ἡ ἰσότης αὕτη ἐκφράζει τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρου· αἱ δὲ προηγούμεναι τρεῖς ἐκφράζουσι τὰ θεωρήματα τῶν ἐδαφίων 199 καὶ 197, τὰ ὁποῖα τοιουτοτρόπως ἀποδεικνύονται ἐκ δευτέρου διὰ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.

2) Ἐκ τῆς δευτέρας καὶ τῆς τρίτης τῶν ἐξισώσεων (1) εὑρίσκομεν προσέτι

$$\frac{(\mathrm{ΑΒ})^2}{(\mathrm{Α\Gamma})^2}=\frac{(\mathrm{Β\Delta})}{(\mathrm{\Delta\Gamma})} \quad \text{ἢ } (\mathrm{ΑΒ})^2:(\mathrm{Α\Gamma})^2=\mathrm{Β\Delta}:\mathrm{\Delta\Gamma},$$

ἤτοι τὰ τετράγωνα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ εἰς αὐτὰς προσκείμενα τμήματα τῆς ὑποτεινούσης.

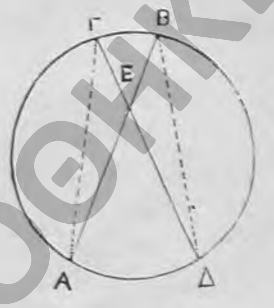
ΘΕΩΡΗΜΑ

249. *Ἐὰν ἐν κύκλῳ τέμνωνται δύο χορδαί, τὰ δύο ὀρθογώνια*

τὰ ὑπὸ τῶν τμημάτων ἑκατέρας τῶν χορδῶν περιεχόμενα εἶνε ἰσοδύναμα.

Τουτέστιν (ΕΑ) (ΕΒ)=(ΕΓ) (ΕΔ).

Διότι, ἀχθεισῶν τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΒΔ, γίνονται δύο ὅμοια τρίγωνα, τὰ ΑΓΕ καὶ ΒΔΕ· διότι ἔχουσι τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Δ (ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸν κύκλον καὶ βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΓΒ), δι' ὅμοιον λόγον ἔχουσι καὶ τὴν γωνίαν Γ ἴσην τῇ Β (καὶ τὰς εἰς τὸ Ε γωνίας ἴσας ὡς κατὰ κορυφήν)· ἄρα εἶνε ὅμοια καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα



$$\frac{ΕΑ}{ΕΔ}=\frac{ΕΓ}{ΕΒ},$$

ὅθεν καὶ (ΕΑ) (ΕΒ)=(ΕΓ)(ΕΔ).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τούτου εἶνε τὸ ἑπόμενον. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται κατά τι σημεῖον Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶνε (ΕΑ) (ΕΒ)=(ΕΓ) (ΕΔ), τὰ ἄκρα αὐτῶν Α, Β, Γ, Δ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.*

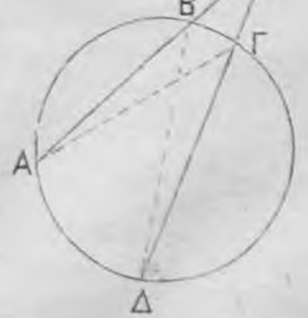
Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

250. *Ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθῶσι δύο τέμνουσαι περατούμεναι εἰς τὴν περιφέρειαν αὐτοῦ, τὰ δύο ὀρθογώνια, τὰ περιεχόμενα ὑφ' ἑκατέρας τῶν τεμνουσῶν τούτων καὶ ὑπὸ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου κειμένου μέρους αὐτῆς, εἶνε ἰσοδύναμα.*

τουτέστιν (ΕΑ) (ΕΒ)=(ΕΓ) (ΕΔ).

Διότι, ἀχθεισῶν τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΔΒ, γίνονται τὰ τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΕ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια· διότι ἔχουσι τὴν γωνίαν Ε κοινὴν καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ Δ (ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸν κύκλον καὶ βαινούσας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΒΓ). Ἐκ δὲ τῶν τριγώνων τούτων εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα



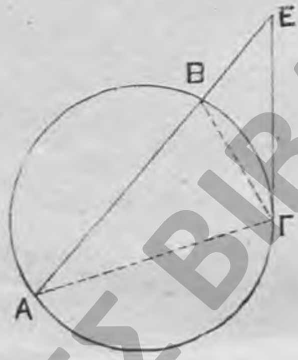
$$\frac{ΕΑ}{ΕΔ}=\frac{ΕΓ}{ΕΒ},$$

ἐξ ἧς καὶ (ΕΑ).(ΕΒ)=(ΕΓ).(ΕΔ).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τούτου εἶνε τὸ ἑπόμενον. *Ἐὰν αἱ προσεκβολαὶ δύο εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται κατά τι σημεῖον Ε καὶ ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης (ΕΑ)·(ΕΒ)=(ΕΓ)·(ΕΔ), τὰ τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. Ἀποδεικνύεται δὲ εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

251. *Ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς κύκλου ἀχθῶσιν ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου καὶ τέμνουσα, περατούμεναι ἀμφότεραι εἰς τὴν περιφέρειαν, τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθογωνίῳ τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς·* τουτέστιν εἶνε $(ΕΓ)^2=(ΕΑ).(ΕΒ)$.



Διότι, ἀχθεισῶν τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΒΓ, γίνονται τὰ δύο τρίγωνα ΑΕΓ καὶ ΒΕΓ, τὰ ὁποῖα εἶνε ὅμοια, διότι ἔχουσι τὴν γωνίαν Ε κοινὴν καὶ τὴν γωνίαν Α ἴσην τῇ ΒΓΕ· (διότι ἡ ΒΓΕ σχηματίζεται ὑπὸ τῆς χορδῆς ΓΒ καὶ ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης ΓΕ καὶ διὰ τοῦτο ἰσοῦται τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ Α, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ). Ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ὅμοια, καὶ ἐξ αὐτῶν πορίζόμεθα τὴν ἰσότητα

$$\frac{ΕΑ}{ΕΓ}=\frac{ΕΓ}{ΕΒ},$$

ἐξ ἧς καὶ $(ΕΓ)^2=(ΕΑ).(ΕΒ)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τούτου εἶνε τὸ ἑξῆς (ὅπερ ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς).

Ἐὰν εὐθεῖά τις ΑΒ προσεκβληθῇ μέχρι τοῦ τυχόντος σημείου Ε καὶ ἐκ τοῦ Ε ἀχθῇ εὐθεῖά τις ΕΓ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶνε $(ΕΓ)^2=(ΕΑ)(ΕΒ)$, ἡ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α,Β,Γ διερχομένη περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς ΕΓ κατὰ τὸ Γ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

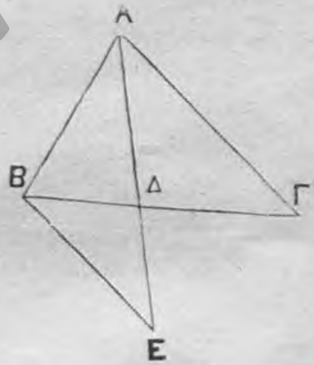
Τῶν τριῶν τούτων θεωρημάτων εἶνε προφανὴς ἡ συγγένεια· ἐν τῷ πρώτῳ αἱ χορδαὶ τέμνονται ἐντὸς τοῦ κύκλου, ἐν δὲ τῷ δευτέρῳ τέμνονται ἐκτός, κατὰ δὲ τὰ ἄλλα οὐδόλως διαφέρουσιν· ἐν δὲ τῷ τρίτῳ μία τῶν ἐκτὸς τοῦ κύκλου τεμνομένων χορδῶν, ἡ ΓΔ, ἐλαττουμένη κατήντησε μηδέν, ὅτε ἡ ὅλη τέμνουσα ΕΔ καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου κείμενον μέρος αὐτῆς ΕΓ ἔγιναν ἴσαι τῇ ἐφαπτομένῃ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

252. *Ἡ διχοτομοῦσα γωνίαν τριγώνου διαιρεῖ τὴν ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰν εἰς δύο τμήματα ἀνάλογα τῶν εἰς αὐτὰ προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.*

Ἐὰν δηλονότι ἡ ΑΔ διχοτομῇ τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, λέγω, ὅτι θὰ εἶνε

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$



Ἂς προσεκβληθῇ ἡ διχοτομοῦσα καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Β παράλληλος τῇ ΑΓ ἡ ΒΕ.

Τὰ δύο τρίγωνα ΔΒΕ καὶ ΔΑΓ εἶνε ὅμοια· διότι ἔχουσι τὰς περὶ τὸ Δ γωνίας αὐτῶν ἴσας, ὡς κατὰ κορυφήν, καὶ τὴν γωνίαν Ε ἴσην τῇ ΔΑΓ καὶ τὴν Γ ἴσην τῇ ΔΒΕ διὰ τὰς παραλλήλους ΑΓ καὶ ΒΕ· ἄρα εἶνε ὅμοια καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν

$$\frac{BE}{A\Gamma}=\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}\cdot$$

ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶνε ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ Α καὶ Ε εἶνε ἴσαι, ὡς ἴσαι ἀμφότεραι τῇ ΔΑΓ· ἄρα εἶνε ΑΒ=ΒΕ, καὶ διὰ τοῦτο ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

Καὶ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

ΘΕΩΡΗΜΑ

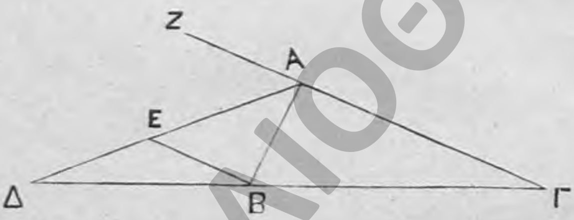
253. *Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσά τινα τῶν ἐκτὸς γωνιῶν τριγώνου τέμνῃ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν προσεκβαλλομένην, αἱ ἀποστάσεις τῆς τομῆς ἀπὸ*

τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ταύτης εἶνε ἀνάλογοι τῶν εἰς αὐτὰς προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

Ἐὰν δηλονότι ἡ ΑΔ διχοτομῇ τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΒΑΖ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, λέγω, ὅτι θὰ εἶνε

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$

Ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Β παράλληλος τῇ ΑΓ ἡ ΒΕ.



Τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΒ καὶ ΔΑΓ εἶνε ὅμοια καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΕΒ}{ΑΓ}.$$

ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΕ εἶνε ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι αὐτοῦ Α καὶ Ε εἶνε ἴσαι, ὡς ἴσαι ἀμφότεραι τῇ γωνίᾳ ΔΑΖ· ἄρα εἶνε ΕΒ=ΑΒ καὶ διὰ τοῦτο ἡ εὑρεθεῖσα ἰσότης γίνεται

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$

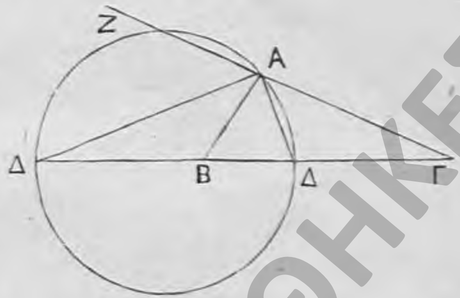
Καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν ἡ διχοτομοῦσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν ΒΑΖ, ἡ ΑΕ, εἶνε παράλληλος τῇ ΒΓ, θὰ εἶνε
γωνία ΕΑΖ=γωνίᾳ Γ, καὶ γωνία ΕΑΒ=γωνίᾳ ΑΒΓ· ἄρα θὰ εἶνε καὶ γωνία ΑΒΓ=γωνίᾳ Γ. Ἐπομένως θὰ εἶνε καὶ ΑΒ=ΑΓ, ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ εἶνε ἰσοσκελές. Ὅτι δὲ τότε ἀληθῶς ἡ ΑΕ εἶνε παράλληλος τῇ ΒΓ, ἀποδεικνύεται εὐκόλως.

ΘΕΩΡΗΜΑ

254. *Τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουσι λόγον δοθέντα ἀριθμόν, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.*

Ἔστωσαν Β καὶ Γ τὰ δοθέντα σημεῖα, ἀφ' ὧν λαμβάνονται αἱ ἀποστάσεις· ἔστω προσέτι Α ἓν τῶν εἰρημένων σημείων καὶ ρ ὁ δοθεὶς λόγος τῶν ἀποστάσεων ΑΒ καὶ ΑΓ, τουτέστιν ἔστω $\frac{AB}{A\Gamma}=\rho$.



Ἐὰν διχοτομηθῶσιν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΖΑΒ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΔ καὶ ΑΔ', θὰ εἶνε κατὰ τὰ προηγούμενα

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}=\rho \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Delta' B}{\Delta'\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}=\rho,$$

ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι τὰ δύο σημεῖα Δ καὶ Δ', εἰς τὰ ὁποῖα αἱ διχοτομοῦσαι τέμνουσι τὴν ΒΓ, μένουσιν ἀμετάβλητα, ὅταν ἀντὶ τοῦ Α ληφθῇ οἱονδήποτε ἄλλο σημεῖον ἐκ τῶν ἐχόντων τὴν ῥηθεῖσαν ἰδιότητα· διότι πάντοτε θὰ εἶνε $\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\rho$ καὶ $\frac{\Delta' B}{\Delta'\Gamma}=\rho$.

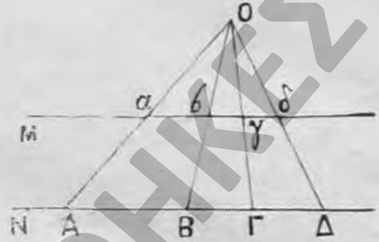
Ἀλλ' ἡ γωνία Δ'ΑΔ εἶνε ὀρθὴ γωνία, διότι εἶνε τὸ ἥμισυ τῶν δύο γωνιῶν ΖΑΒ καὶ ΒΑΓ, αἵτινες ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς· ἐὰν λοιπὸν ἐπὶ τῆς Δ'Δ ὡς διαμέτρου γραφῇ περιφέρεια κύκλου, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ σημείου Α· ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ παντὸς ἄλλου σημείου τὴν αὐτὴν ἔχοντος ἰδιότητα, συνάγεται, ὅτι πάντα τὰ τοιαῦτα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις γράφεται ἐπὶ τῆς διαμέτρου Δ'Δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἵνα εὕρωμεν σημεῖόν τι Α, τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶνε $\frac{AB}{A\Gamma}=\rho$, γράφομεν μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα οἱανδήποτε α περιφέρειαν κύκλου, ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Β καὶ μὲ ἀκτῖνα ρ.α γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν· αἱ τομαὶ αὐτῶν θὰ εἶνε σημεῖα ἔχοντα τὴν ῥηθεῖσαν ἰδιότητα. Θὰ τέμνωνται δὲ αἱ δύο περιφέρειαι, ἐὰν ἡ ἀκτὶς α περιλαμβάνηται ἐντὸς ὁρίων τινῶν εὐκόλως εὑρισκομένων διὰ τοῦ θεωρήματος 129.

ΘΕΩΡΗΜΑ

255. *Ἐὰν δύο παράλληλοι τέμνωνται ὑπὸ εὐθειῶν ἐξ ἑνὸς σημείου ἐρχομένων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.*

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι Μ καὶ Ν τεμνόμεναι ὑπὸ τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ,...· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε



$$(\iota)\qquad \frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}=\frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\ldots$$

Διότι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ,... εἶνε κατὰ σειρὰν ὅμοια πρὸς τὰ Οαβ, Οβγ, Ογδ..., καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπονται αἱ ἰσότητες

$$\frac{\mathrm{O}\alpha}{\mathrm{OA}}=\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{O}\beta}{\mathrm{OB}}$$ ἐκ τῶν ὁμοίων ΟΑΒ, Οαβ·

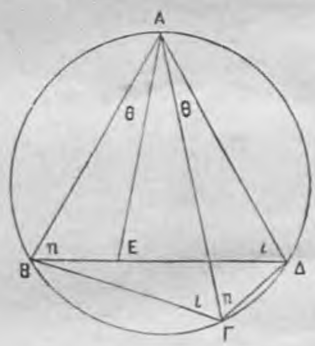
$$\frac{\mathrm{O}\beta}{\mathrm{OB}}=\frac{\beta\gamma}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{O}\gamma}{\mathrm{O\Gamma}}$$ ἐκ τῶν ΟΒΓ, Οβγ·

$$\frac{\mathrm{O}\gamma}{\mathrm{O\Gamma}}=\frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}=\frac{\mathrm{O}\delta}{\mathrm{O}\Delta}$$ ἐκ τῶν ΟΓΔ, Ογδ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων δὲ τούτων συνάγονται αἱ ἰσότητες (ι)

ΘΕΩΡΗΜΑ

256. *Παντὸς εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων εἶνε ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν*.*



Ἔστω τυχὸν τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ ΑΒΓΔ· ἄγομεν τὴν ΑΕ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἡ γωνία ΒΑΕ ἴση τῇ γωνίᾳ ΔΑΓ· τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΓΔ εἶνε ὅμοια (διότι ἔχουσι τὰς γωνίας θ ἴσας ἐκ κατασκευῆς καὶ τὰς γωνίας η ἴσας ὡς ἐγγεγραμμένας εἰς τὸ αὐτὸ τμῆμα)· ὅθεν συνάγεται

$$\frac{(\mathrm{BE})}{(\Gamma\Delta)}=\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})}\ \text{ἢ}\ (\mathrm{BE})=(\Gamma\Delta)\frac{(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})}.$$

Ἀλλὰ καὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΔ καὶ ΑΒΓ εἶνε ὅμοια (διότι εἶνε γων. ΒΑΓ=γων. ΕΑΔ καὶ αἱ γωνίαι ι ἴσαι)· ὅθεν

$$\frac{(\mathrm{E}\Delta)}{(\mathrm{B\Gamma})}=\frac{(\mathrm{A}\Delta)}{(\mathrm{A\Gamma})}\ \text{ἢ}\ (\mathrm{E}\Delta)=(\mathrm{B\Gamma})\frac{(\mathrm{A}\Delta)}{(\mathrm{A\Gamma})}.$$ Ἐντεῦθεν ἕπεται

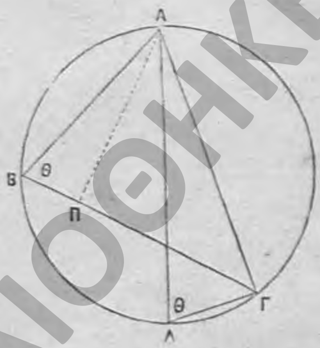
$$(\mathrm{B}\Delta)=\frac{(\Gamma\Delta)\,(\mathrm{AB})}{(\mathrm{A\Gamma})}+\frac{(\mathrm{B\Gamma})\,(\mathrm{A}\Delta)}{(\mathrm{A\Gamma})}\ \text{ἤτοι}\ (\mathrm{A\Gamma})(\mathrm{B}\Delta)=(\mathrm{AB})(\Gamma\Delta)+(\mathrm{B\Gamma})(\mathrm{A}\Delta).$$

*Τὸ θεώρημα τοῦτο εὗρεν ὁ Πτολεμαῖος, διάσημος ἀστρονόμος Ἕλλην ζήσας κατὰ τὸν β' αἰῶνα μ. Χ.

*ΘΕΩΡΗΜΑ

257. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τριγώνου εἶνε ἴσον τῷ γινομένῳ τῶν τριῶν πλευρῶν του διαιρεθέντι διὰ τοῦ διπλασίου τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.*

Ἐκ μιᾶς τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου, ἔστω ἐκ τῆς Α, ἄγομεν τὴν διάμετρον ΑΟΔ τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὴν κάθετον ΑΠ ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ· τὰ τρίγωνα ΑΒΠ καὶ ΑΓΔ εἶνε ὅμοια, διότι εἶνε ὀρθογώνια καὶ ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας θ ἴσας· ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ ἰσότης



$$\frac{ΑΒ}{ΑΔ}=\frac{ΑΠ}{ΑΓ}, \text{ ἢ } (ΑΒ)\,(ΑΓ)=(ΑΔ)\,(ΑΠ)$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ, λαμβάνομεν

$$(ΑΒ)\,(ΒΓ)\,(ΑΓ)=(ΑΔ)\,(ΑΠ)\,(ΒΓ).$$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον (ΑΠ) (ΒΓ) εἶνε τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἐμβαδὸν παριστῶ διὰ τοῦ Ε· ὅθεν

$$(ΑΒ)\,(ΒΓ)\,(ΓΑ)=2\,(ΑΔ).\,Ε,$$

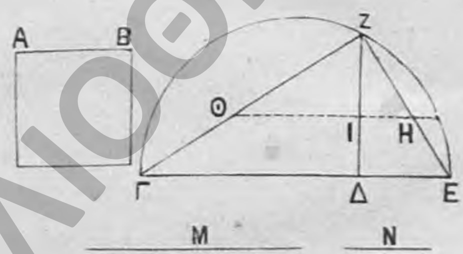
ἐξ ἧς καὶ $$Ε=\frac{(ΑΒ)\,(ΒΓ)\,(ΓΑ)}{2\,(ΑΔ)}.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1ον

258. *Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ἔχον πρὸς δοθὲν τετράγωνον λόγον ἴσον τῷ λόγῳ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν.*

Ἔστω πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου ἡ ΑΒ, αἱ δὲ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ Μ, Ν.



Ἄς ληφθῇ ἐπί τινος εὐθείας ἡ ΓΔ, ἴση τῇ Μ, καὶ ἡ ΔΕ, ἴση τῇ Ν, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΕ ὡς διαμέτρου ἂς γραφῇ ἡμικύκλιον. Ἐκ τοῦ Δ ἂς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΕ, ἡ ΔΖ, καὶ ἐκ τοῦ Ζ, ἔνθα τέμνει τὴν περιφέρειαν, ἂς ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ ΖΓ, ΖΕ. Ἐπὶ τῆς ΖΕ (προσεκβαλλομένης, ἐὰν εἶνε ἀνάγκη) ἂς ληφθῇ ἡ ΖΗ, ἴση τῇ πλευρᾷ ΑΒ τοῦ δοθέντος τετραγώνου, καὶ ἐκ τοῦ Η ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΕΓ ἡ ΗΘ, τέμνουσα τὴν ΖΔ εἰς τὸ Ι· λέγω, ὅτι ἡ ΖΘ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

Διότι ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΖΘΗ ἔχομεν (248, πόρ. 2ον)

$$\frac{(ΖΘ)^2}{(ΖΗ)^2}=\frac{ΘΙ}{ΙΗ}$$

ἐπειδὴ δὲ εἶνε

$$\frac{ΘΙ}{ΙΗ}=\frac{ΓΔ}{ΔΕ} \qquad \text{(θεώρημα 225)},$$

ἕπεται

$$\frac{(ΖΘ)^2}{(ΖΗ)^2}=\frac{ΓΔ}{ΔΕ}$$

καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη ΖΗ=ΑΒ καὶ ΓΔ=Μ, ΔΕ=Ν, ἕπεται

$$\frac{(ΖΘ)^2}{(ΑΒ)^2}=\frac{Μ}{Ν}, \qquad ἢ\ (ΖΘ)^2:(ΑΒ)^2=Μ:Ν,$$

ἄρα ἡ ΖΘ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον

259. *Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον δοθέντι πολυγώνῳ καὶ ἔχον πρὸς αὐτὸ λόγον ἴσον τῷ λόγῳ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν Μ καὶ Ν.*

Ἔστω Ε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δοθέντος πολυγώνου καὶ Α μία τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, Ε' ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ζητουμένου πολυγώνου καὶ χ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ἡ ὁμόλογος τῆς Α· τὸ πρόβλημα θὰ λυθῇ, ἂν εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ αὕτη χ· διότι ταύτην ἔχοντες δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ πολύγωνον (242, Σημ.).

Ἐν πρώτοις ζητεῖται νὰ εἶνε $\frac{(E')}{(E)}=\frac{(M)}{(N)}$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πολύγωνα θὰ εἶνε ὅμοια, θὰ εἶνε καὶ $\frac{(E')}{(E)}=\frac{(\chi)^2}{(A)^2}$.

ὅθεν ἕπεται $$\frac{(\chi)^2}{(A)^2}=\frac{(M)}{(N)},$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ἀγνώστου ταύτης πλευρᾶς χ ἔχει λόγον πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς δοθείσης πλευρᾶς Α ἴσον τῷ λόγῳ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν Μ,Ν· ἄρα τὸ πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὸ προηγούμενον.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3ον

260. *Νὰ κατασκευασθῇ σχῆμα ὅμοιον τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ σχήματι Π καὶ ἰσοδύναμον ἄλλῳ εὐθυγράμμῳ σχήματι Κ.*

Ἔστω Α μία πλευρὰ τοῦ δοθέντος σχήματος Π καὶ χ ἡ ὁμόλογος αὐτῆς πλευρὰ τοῦ ζητουμένου, οὗτινος τὴν ἐπιφάνειαν παριστῶ διὰ τοῦ Σ.

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σχῆμα Σ θὰ εἶνε ὅμοιον τῷ Π, θὰ εἶνε

$$\frac{(\Pi)}{(\Sigma)}=\frac{(A)^2}{(\chi)^2}$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ Σ ἰσοῦται τῷ Κ, ἕπεται

$$\frac{(\Pi)}{(K)}=\frac{(A)^2}{(\chi)^2}$$

Ἂς τραπῶσι νῦν ἀμφότερα τὰ σχήματα Π καὶ Κ εἰς τετράγωνα καὶ ἔστωσαν Μ καὶ Ν αἱ πλευραὶ τῶν ἰσοδυνάμων αὐτοῖς τετραγώνων· ἤτοι ἔστω $(\Pi)=(M)^2$ καὶ $(K)=(N)^2$.

Τότε ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{(M)^2}{(N)^2}=\frac{(A)^2}{(\chi)^2},$$

ὅθεν ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων, εὑρίσκομεν

$$\frac{(M)}{(N)}=\frac{(A)}{(\chi)}, \quad \text{ἢ } M:N=A:\chi,$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ χ τοῦ ζητουμένου σχήματος εἶνε ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν εὐθειῶν Μ, Ν, Α.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4ον

261. *Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων Π καὶ Κ, νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ὅμοιον αὐτοῖς καὶ ἴσον τῷ ἀθροίσματι ἢ τῇ διαφορᾷ αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων πολυγώνων Π καὶ Κ καὶ χ ἡ ὁμόλογος τούτων ἐν τῷ ζητουμένῳ πολυγώνῳ Σ, ὅπερ ἔστω ἴσον τῷ ἀθροίσματι τῶν δύο δοθέντων.

Ἐπειδὴ τὰ τρία πολύγωνα Π, Κ καὶ Σ εἶνε ὅμοια, ἔχομεν

$$\frac{\Pi}{\Sigma}=\frac{A^2}{\chi^2}$$

καὶ

$$\frac{K}{\Sigma}=\frac{B^2}{\chi^2},$$

ὅθεν, προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας ταύτας, λαμβάνομεν

$$\frac{\Pi+K}{\Sigma}=\frac{A^2+B^2}{\chi^2}$$

καὶ ἐπειδὴ $\Pi+K=\Sigma$, τὸ πρῶτον μέλος εἶνε$=1$, ὅθεν ἕπεται

$$\chi^2=A^2+B^2,$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἄγνωστος πλευρὰ χ εἶνε ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶνε Α καὶ Β.

Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου, ἐὰν ζητῆται νὰ εἶνε $\Sigma=\Pi-K$, φθάνομεν εἰς τὴν ἰσότητα $\chi^2=A^2-B^2$,
ἐξ ἧς βλέπομεν, ὅτι ἡ ἄγνωστος πλευρὰ χ εἶνε τότε μία τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅπερ ἔχει ὑποτείνουσαν τὴν Α καὶ τὴν ἄλλην ἴσην τῇ Β.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος τούτου ἐδείχθη, ὅτι, ἐὰν κατασκευασθῶσιν ἐπὶ τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου (ὡς ὁμολόγων πλευρῶν) τρία ὅμοια πολύγωνα, τὸ ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5ον

262. *Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ἤτοι εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τὸ ἓν νὰ εἶνε μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἄλλου μέρους.*

Ἔστω Γ τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ τέμνεται μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ἤτοι ἔστω ΑΒ: ΑΓ=ΑΓ: ΓΒ.

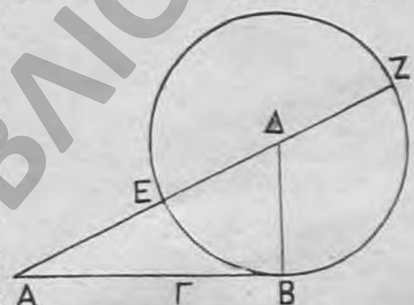
Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὴν ΓΒ διὰ τῆς διαφορᾶς ΑΒ—ΑΓ, εὑρίσκομεν ΑΒ: ΑΓ=ΑΓ: (ΑΒ—ΑΓ),

ὅθεν (ΑΒ).(ΑΒ—ΑΓ)=(ΑΓ)^2,

ἢ (ΑΒ)^2—(ΑΒ)(ΑΓ)=(ΑΓ)^2,

τουτέστιν (ΑΒ)^2=(ΑΓ). (ΑΒ+ΑΓ),

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι τὸ προκείμενον πρόβλημα ἀνήχθη εἰς τὸ ἑξῆς. *Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον δοθέντι τετραγώνῳ, τῷ (ΑΒ)^2, καὶ τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΑΒ+ΑΓ, νὰ ἔχωσι διαφορὰν ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ΑΒ.*



Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 251, ἐὰν γράψωμεν περιφέρειαν ἔχουσαν διάμετρον ἴσην τῇ ΑΒ καὶ ἔπειτα ἐφαπτομένην αὐτῆς ἴσην τῇ ΑΒ, αἱ δύο πλευραὶ τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου θὰ εἶνε τὰ δύο τμήματα τῆς τεμνούσης, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ ἄκρου τῆς ἐφαπτομένης καὶ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

Πρὸς τοῦτο ὑψοῦμεν ἐκ τοῦ ἄκρου Β τῆς ΑΒ τὴν κάθετον ΒΔ, ἣν λαμβάνομεν ἴσην τῷ ἡμίσει τῆς ΑΒ· ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΔΒ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις θὰ ἐφάπτηται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Β, καὶ ἔπειτα ἄγομεν ἐκ τοῦ Α τὴν τέμνουσαν ΑΕΔΖ.

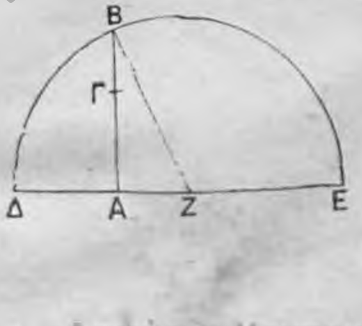
Κατὰ τὸ προειρημένον θεώρημα θὰ εἶνε

(ΑΒ)^2=(ΑΕ).(ΑΖ),

ἤτοι (ΑΒ)^2=(ΑΕ). (ΑΕ+ΕΖ)=ΑΕ(ΑΕ+ΑΒ)·

καὶ ἂν ληφθῇ ΑΓ=ΑΕ, θὰ εἶνε

(ΑΒ)^2=(ΑΓ) (ΑΓ+ΑΒ). ὅ.ἔ.π.



* Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἐλύθη κατ' ἄλλον τρόπον ἐν τῷ ἐδαφ. 206· τὴν δὲ λύσιν παριστᾷ τὸ ἀπέναντι σχῆμα, ἔνθα ΑΖ= $\frac{1}{2}$ ΑΒ, ἡ δὲ ἄγνωστος ΑΓ ἰσοῦται τῇ ΑΔ.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶνε 5, 6, 7 πήχεις. Ποῖαι εἶνε αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὸ ὁμοίου καὶ διπλασίαν ἔχοντος ἐπιφάνειαν;

(Ἀπ. $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$).

2) Ἐκ δύο ὁμοίων τριγώνων τοῦ μὲν ἑνὸς αἱ πλευραὶ εἶνε 8, 10, 12 πήχεις, τοῦ δὲ ἄλλου ἡ περίμετρος εἶνε 56^{π} καὶ $\frac{1}{4}$. ποῖαι εἶνε αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου τούτου;

(Ἀπ. 15, $18\frac{3}{4}$, $22\frac{1}{2}$).

3) Αἱ πλευραὶ δύο ὁμοίων τριγώνων εἶνε τοῦ μὲν 4, 6, 7, τοῦ δὲ 12, 18, 21· ζητοῦνται αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὰ ὁμοίου τριγώνου, ὅπερ ἔχει ἐπιφάνειαν ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων.

(Ἀπ. $\sqrt{160}$, $\sqrt{360}$, $\sqrt{490}$, ἢ $4\sqrt{10}$, $6\sqrt{10}$, $7\sqrt{10}$).

4) Εὐθεῖα 65 πήχεων ἐτμήθη μέσον καὶ ἄκρον λόγον· ποῖα εἶνε τὰ μέρη αὐτῆς;

(Ἀπ. 40,17... καὶ 24, 83...).

5) Τριγώνου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶνε 9, 10, 12 πήχεις· ἐπὶ τῆς πλευρᾶς 10 νὰ εὑρεθῇ σημεῖόν τι τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐξ αὐτοῦ ἀγομένη παράλληλος τῇ πλευρᾷ 12 νὰ διαιρῇ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἴσα μέρη.

(Ἀπ. Τὸ ζητούμενον σημεῖον ἀπέχει ἀπὸ τῆς τομῆς τῶν δύο εἰρημένων πλευρῶν ἀπόστασιν $10-\sqrt{50}$, ἤτοι 2,92894....).

6) Νὰ διαιρεθῇ τρίγωνον, οὗτινος αἱ πλευραὶ εἶνε 6, 9, 12, διὰ τριῶν παραλλήλων τῇ πλευρᾷ 6 εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

(Ἀπ. Αἱ παράλληλοι πρέπει νὰ τέμνωσι τὴν πλευρὰν 12 εἰς σημεῖα, ὧν αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῆς ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 6 κορυφῆς εἶνε 6, $6\sqrt{2}$, $6\sqrt{3}$).

7) Αἱ πλευραὶ τριγώνου τινὸς εἶνε 10, 15, 18· ζητοῦνται τὰ μέρη, εἰς ἃ διαιροῦνται ὑπὸ τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας του.

(Ἀπ. Ἡ πρώτη εἰς $\frac{60}{11}$ καὶ $\frac{50}{11}$, ἡ δὲ δευτέρα εἰς $\frac{75}{14}$ καὶ $\frac{135}{14}$, ἡ δὲ τρίτη εἰς $\frac{36}{5}$ καὶ $\frac{54}{5}$).

8) Κύκλος τις ἔχει ἀκτῖνα 10 πήχεων· ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἄγεται εἰς αὐτὸν ἀπὸ σημείου ἀπέχοντος ἐκ τοῦ κέντρου 18 πήχεις.

(Ἀπ. 14, 966...).

9) Δοθέντος πολυγώνου κατασκευάζομεν ἄλλο ὅμοιον καὶ ἔχον περίμετρον διπλασίαν· ποσαπλασία θὰ εἶνε ἡ ἐπιφάνειά του;
('Απ. Τετραπλασία)·

10). Περιφερείας τινὸς ἔχομεν τρία σημεῖα, Α, Β, Γ· καὶ εἶνε ΑΒ=5π· ἐκ τοῦ Γ ἄγεται, ὡς ἔτυχεν, εὐθεῖά τις ΓΔ συναντῶσα τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ· εἶνε δὲ ΓΔ=3π., ΑΔ=1π.,5· ζητεῖται, εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἡ ΓΔ προσεκβαλλομένη ἀπὸ τοῦ Δ θὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν;
('Απ. 1π.,75).

11) Τετράγωνόν τι ἔχει πλευρὰν 3 πήχ.· νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ὅπερ ἔχει πρὸς τοῦτο λόγον ἴσον τῷ ἀριθμῷ $\frac{2}{5}$·

('Απ. $\frac{3}{5}\sqrt{10}$).

12) Τετραπλεύρου τινὸς αἱ πλευραὶ εἶνε κατὰ σειρὰν 12π, 3π, 8π, καὶ 7π. νὰ εὑρεθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ πρὸς αὐτὸ ὁμοίου τετραπλεύρου, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη πλευρὰ συναποτελοῦσι 18 πήχεις.
('Απ. $\frac{72}{5}$, $\frac{18}{5}$, $\frac{48}{5}$, $\frac{42}{5}$).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἡ πλευρὰ τετραγώνου αὐξηθῇ κατὰ τὴν διαγώνιόν του, ἡ διαγώνιος αὐξάνεται κατὰ τὸ διπλάσιον τῆς πλευρᾶς του.

2) Ἐκ τῆς χορδῆς κυκλικοῦ τόξου καὶ ἐκ τοῦ βέλους αὐτοῦ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς του.

Βέλος τόξου λέγεται ἡ ἐκ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς αὐτοῦ ἀγομένη κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ περατουμένη εἰς τὸ τόξον.

3) Εὑρεῖν ὀρθογώνιον τρίγωνον, οὗ αἱ πλευραὶ νὰ εἶνε τρεῖς ἐφεξῆς ἀκέραιοι.

4) Ἐὰν προσεκβάλωμεν τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ οὕτως, ὥστε νὰ γίνῃ ἡ εὐθεῖα $ΑΒΓ_1=λ.ΑΒ$, ἡ $ΒΓΑ_1=μ.ΒΓ$, καὶ ἡ $ΓΑΒ_1=ν.ΓΑ$, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $Α_1 Β_1 Γ_1$ εἶνε

$(Α_1Β_1Γ_1)=(ΑΒΓ)(1-λ-μ-ν+λμ+μν+νλ)$.

5) Ἐὰν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ $Β_1Γ_1$ παράλληλος τῇ ΒΓ, ἔπειτα δὲ ἡ $ΒΓ_1$ καὶ ἡ $Β_1Γ$, ἑκάτερον τῶν τριγώνων $ΑΒΓ_1$ καὶ $ΑΒ_1Γ$ εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν ΑΒΓ καὶ $Α_1Β_1Γ_1$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Κανονικὸν πολύγωνον λέγεται τὸ ἔχον πάσας τὰς πλευρὰς αὐτοῦ ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας αὐτοῦ ἴσας· τουτέστι τὸ ἰσογώνιον καὶ ἰσόπλευρον· οἷον τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τὸ τετράγωνον εἶνε κανονικὰ σχήματα.

Κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ ἔχουσα πάσας τὰς πλευρὰς ἴσας καὶ πάσας τὰς γωνίας ἴσας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

263 *Πᾶν κανονικὸν πολύγωνον εἶνε καὶ ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ περιγράψιμον εἰς κύκλον.*

Ἔστω κανονικὸν πολύγωνον τὸ ΑΒΓΔΕΖ.

Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ πολυγώνου τούτου θὰ τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Ο· (διότι σχηματίζουσι πρὸς τὴν ΑΒ τὰς γωνίας $\frac{1}{2}$Α, $\frac{1}{2}$Β, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶνε μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν)· λέγω δέ, ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο Ο ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου· ἤτοι ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ,...,ΟΕ εἶνε ἴσαι.

Διότι, ἂν τὸ τρίγωνον ΑΟΒ περιστραφῇ περὶ τὴν ΟΒ, ἡ μὲν ΒΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΒΓ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν περὶ τὸ Β γωνιῶν, τὸ δὲ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΒΓ· ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΟΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΒΟΓ καὶ ἡ γωνία ΒΓΟ εἶνε διὰ τοῦτο τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας τοῦ πολυγώνου, ἤτοι ἡ ΓΟ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Γ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΟΓ ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ ΓΟΔ, καὶ τοῦτο πάλιν ἐπὶ τοῦ ΔΟΕ, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε πάντα ταῦτα τὰ τρίγωνα εἶνε ἴσα· εἶνε δὲ καὶ ἰσοσκελῆ· διότι αἱ γωνίαι αὐτῶν αἱ περὶ τὸ πολύγωνον εἶνε πᾶσαι ἴσαι, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου· ὥστε εἶνε

$$ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ=ΟΕ=ΟΖ.$$

Ἐὰν ἄρα μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΟΑ γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ διέλθῃ διὰ πασῶν τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου· τουτέστι θὰ εἶνε περιγεγραμμένη περὶ τὸ κανονικὸν πολύγωνον.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΟΒ, ΒΟΓ κτλ. εἶνε ἴσα, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν, ἤτοι αἱ κάθετοι αἱ ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ,... ἀγόμεναι θὰ εἶνε ἴσαι.

Ἐὰν δὲ μὲ κέντρον πάλιν τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων τούτων, τὴν ΟΗ, γραφῇ περιφέρεια, αὕτη θὰ ἐφάπτηται πασῶν τῶν πλευρῶν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τουτέστι θὰ εἶνε ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτό.

Τὸ κοινὸν κέντρον Ο τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς κανονικὸν πολύγωνον λέγεται καὶ *κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου*. Ἡ δὲ γωνία ΑΟΒ λέγεται *κεντρικὴ* γωνία τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.

Ἐπειδὴ δὲ πᾶσαι αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι εἶνε ἴσαι (διὰ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων), ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶνε ἴση μὲ $\frac{4}{\mu}$ τῆς ὀρθῆς, ἐὰν διὰ τοῦ μ παραστήσωμεν τὸ πλῆθος τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ προηγουμένη ἀπόδειξις ἐφαρμόζεται ἀπαραλλάκτως ἐπὶ πάσης κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς, ὥστε καὶ εἰς πᾶσαν τοιαύτην γραμμὴν ἐγγράφεται κύκλος καὶ περιγράφεται κύκλος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

264. *Ἐὰν περιφέρεια κύκλου διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη* (περισσότερα τῶν δύο), *αἱ χορδαὶ αὐτῶν σχηματίζουσι κανονικὸν πολύγωνον.*

Αἱ μὲν πλευραὶ τοῦ οὕτω σχηματιζομένου πολυγώνου θὰ εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας, διότι εἶνε χορδαὶ ἴσων τόξων· αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴσαι, διότι εἶνε ἐγγεγραμμέναι εἰς τὴν περιφέρειαν καὶ βαίνουσιν ἐπὶ τόξων ἴσων, διότι τὸ τόξον, ἐφ' οὗ ἑκάστη βαίνει, εἶνε ὅλη ἡ περιφέρεια ἠλαττωμένη κατὰ δύο μέρη αὐτῆς.

Ἄρα τὸ πολύγωνον τοῦτο εἶνε κανονικόν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Τὸ πρόβλημα: *νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον κανονικὸν πολύγωνον ἔχον μ πλευράς*, εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ἑπομένῳ: *νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα περιφέρεια εἰς μ ἴσα μέρη.*

30

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

265. *Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.*

Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ νὰ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν.

Πρὸς τοῦτο ἄγομεν τυχοῦσαν διάμετρον, τὴν ΑΒ, καὶ ἔπειτα κάθετον εἰς τὸ μέσον αὐτῆς, τὴν διάμετρον ΓΔ (142)· αὗται διαιροῦσι τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη (διότι αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ἐπ' αὐτῶν βαίνουσαι, εἶνε ἴσαι), καὶ αἱ χορδαὶ αὐτῶν ΑΓ, ΓΒ, ΒΔ, ΔΑ σχηματίζουσι τετράγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΟΓ πορίζόμεθα $(ΑΓ)^2=2(ΑΟ)^2$· ὅθεν καὶ

$$(ΑΓ)=(ΑΟ)\sqrt{2},$$

ἤτοι *ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 2.*

Εἶνε δὲ $\sqrt{2}=1,41421\ldots$

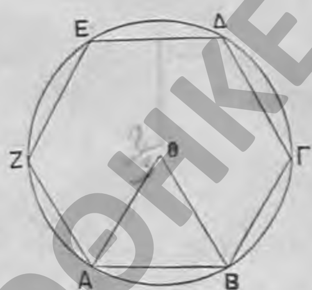
30

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

266. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.*

Ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ εἰς ἓξ ἴσα μέρη.

Ἔστω ΑΒ τὸ ἕκτον τῆς περιφερείας Ο· τότε ἡ χορδὴ ΑΒ θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου. Ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ εἶνε τὸ ἕκτον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ἤτοι $\frac{4}{6}$ ἢ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ὀρθῆς· ἑπομένως αἱ λοιπαὶ δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου ΟΑΒ, αἱ Α καὶ Β, θὰ ἔχωσιν ἄθροισμα $2-\frac{2}{3}$, ἢ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς· καὶ ἐπειδὴ εἶνε ἴσαι (διότι ΟΑ=ΟΒ), ἑκατέρα ἐξ αὐτῶν θὰ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ $\frac{4}{3}$, ἤτοι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΟΑΒ θὰ εἶνε ἰσογώνιον, ἑπομένως καὶ ἰσόπλευρον· ἤτοι ΑΒ=ΟΑ=ΟΒ.



Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι

Ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου.

Ἐὰν λοιπὸν μὲ κέντρον σημεῖόν τι τῆς δοθείσης περιφερείας, ἔστω τὸ Α, καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν τοῦ κύκλου γράψωμεν περιφέρειαν καὶ τὰ σημεῖα Β καὶ Ζ, ἔνθα αὕτη τέμνει τὴν δοθεῖσαν, συνάψωμεν πρὸς τὸ Α, θὰ ἔχωμεν δύο πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου· λαμβάνοντες ἔπειτα τὴν κορυφὴν Β ὡς κέντρον καὶ γράφοντες ἴσην περιφέρειαν, εὑρίσκομεν τὴν κορυφὴν Γ· καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

267. *Νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.*

Ἐγγράφομεν πρῶτον κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ ἔπειτα ἐπιζευγνύομεν τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἐναλλὰξ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΓΕ, ΕΑ· τὸ τρίγωνον ΑΓΕ θὰ εἶνε ἰσόπλευρον· διότι ἕκαστον τῶν τόξων ΑΒΓ, ΓΔΕ, ΕΖΑ σύγκειται ἐκ δύο ἕκτων τῆς περιφερείας καὶ ἑπομένως εἶνε ἴσον τῷ τρίτῳ αὐτῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΓ εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἀκτῖνος ΟΑ ὡς ἑξῆς.

Ἐὰν ἀχθῇ ἡ εὐθεῖα ΑΔ (ἥτις θὰ εἶνε διάμετρος τοῦ κύκλου, διότι τὸ τόξον ΑΒΓΔ εἶνε ἥμισυ τῆς περιφερείας), σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ καὶ ἐκ τούτου εὑρίσκομεν

$$(ΑΓ)^2=(ΑΔ)^2-(ΓΔ)^2.$$

ἐπειδὴ δὲ ΑΔ=2.ΟΑ καὶ ΓΔ=ΟΑ, ἕπεται

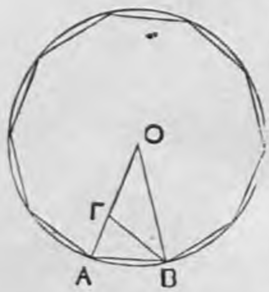
$$(ΑΓ)^2=4.(ΟΑ)^2-(ΟΑ)^2=3(ΟΑ)^2,$$

$$\text{ὅθεν } ΑΓ=ΟΑ.\sqrt{3},$$

ἤτοι *ἡ πλευρὰ τοῦ εἰς κύκλον ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῆς ἀκτῖνος ἐπὶ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ 3.* Εἶνε δὲ $\sqrt{3}=1,73205\ldots$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

268. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν δεκάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.*



Ἔστω τὸ τόξον ΑΒ τὸ δέκατον τῆς περιφερείας, ἐπομένως ἡ χορδὴ ΑΒ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου.

Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ, ἡ ἐπ' αὐτοῦ βαίνουσα, θὰ εἶνε τὸ δέκατον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν, ἤτοι τὰ $\frac{4}{10}$ ἢ $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς· ἄρα αἱ γωνίαι Α καὶ Β τοῦ τριγώνου ΑΟΒ ἔχουσιν ἄθροισμα $2-\frac{2}{5}$, ἤτοι $\frac{8}{5}$ τῆς ὀρθῆς· καὶ ἐπειδὴ εἶνε ἴσαι, ἑκατέρα αὐτῶν εἶνε $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς· ἤτοι διπλασία τῆς ΑΟΒ. Ἐὰν δὲ διχοτομηθῇ ἡ γωνία Β διὰ τῆς ΒΓ, ἀμφότερα τὰ τρίγωνα ΟΓΒ, ΓΑΒ, θὰ εἶνε ἰσοσκελῆ· τὸ μὲν ΟΓΒ, διότι αἱ γωνίαι του Ο καὶ ΟΒΓ εἶνε ἀμφότεραι $\frac{2}{5}$ τῆς ὀρθῆς· τὸ δὲ ΑΒΓ, διότι ἑκατέρα τῶν γωνιῶν του Α καὶ ΑΓΒ εἶνε ἴση μὲ $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς· (διότι ἡ ΑΓΒ, ἐκτὸς οὖσα τοῦ τριγώνου ΟΓΒ, ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν). Διὰ ταῦτα εἶνε ΟΓ=ΓΒ=ΒΑ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΒΓ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν Β τοῦ τριγώνου ΑΟΒ, ἔχομεν (252)

ΒΟ : ΒΑ = ΓΟ : ΓΑ

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν ΒΟ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΟ καὶ τὴν ΒΑ διὰ τῆς ἴσης αὐτῇ ΟΓ λαμβάνομεν

(1) ΟΑ : ΟΓ = ΟΓ : ΓΑ,

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀκτὶς ΟΑ διαιρεῖται κατὰ τὸ Γ μέσον καὶ ἄκρον λόγον· *ἡ δὲ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ μεγαλήτερον μέρος τῆς ἀκτῖνος διαιρεθείσης μέσον καὶ ἄκρον λόγον.*

Ἐὰν λοιπὸν διαιρέσωμεν τὴν ἀκτῖνα ΟΑ μέσον καὶ ἄκρον λόγον καὶ λάβωμεν χορδὰς τοῦ κύκλου συνεχεῖς καὶ ἴσας πρὸς τὸ μεγαλήτερον τμῆμα ΟΓ, αἱ χορδαὶ αὗται θὰ σχηματίσωσι τὸ κανονικὸν ἐγγεγραμμένον δεκάγωνον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ δεκαγώνου εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἀναλογίας (1) ὡς ἑξῆς· παριστῶντες τὴν ἀκτῖνα ΟΑ διὰ τοῦ α καὶ τὴν ΑΒ διὰ τοῦ χ, γράφομεν τὴν ἀναλογίαν ὡς ἕπεται

$$\alpha : \chi = \chi : (\alpha - \chi)\cdot$$

ἐξ ἧς $\chi^2 = \alpha(\alpha - \chi)$, ἢ $\chi^2 + \alpha\chi = \alpha^2$,

ὅθεν (Στοιχ. Ἀλγ. σελ. 169) $\chi = \frac{1}{2}\alpha(\sqrt{5} - 1)$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε $\sqrt{5} = 2{,}23606\ldots$

θὰ εἶνε $\chi = \alpha\,(0{,}61803\ldots)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

269. *Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον κανονικὸν πεντάγωνον.*

Ἀφοῦ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς δέκα ἴσα μέρη, ὡς ἐν τῷ προηγουμένῳ προβλήματι, δύο τοιαῦτα μέρη συνεχῆ ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{2}{10}$, ἤτοι τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιφερείας· ἄρα ἡ χορδὴ τοῦ ὑπ' αὐτῶν ἀποτελουμένου τόξου εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

270. *Νὰ ἐγγραφῇ κανονικὸν πεντεκαιδεκάγωνον εἰς τὸν δοθέντα κύκλον.*

Ἐὰν ἀπὸ τοῦ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας ἀφαιρεθῇ τὸ $\frac{1}{10}$ αὐτῆς, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶνε $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ ἢ $\frac{4}{60}$ ἤτοι $\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας, καὶ ἡ χορδὴ αὐτοῦ θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πεντεκαιδεκαγώνου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

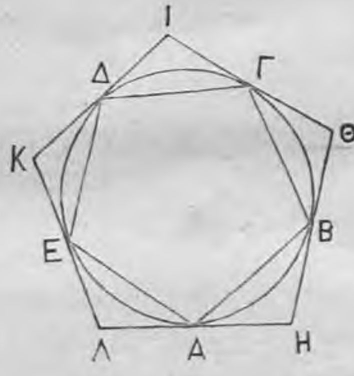
Ἔχοντες τὴν περιφέρειαν διῃρημένην εἰς ἴσα μέρη, ἐὰν ἕκαστον τῶν ἴσων τόξων ὑποδιαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα, θὰ εὑρεθῇ ἡ περιφέρεια διῃρημένη εἰς διπλάσιον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. Ἐπειδὴ δὲ εἰξεύρομεν νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα, ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν αὐτὴν καὶ εἰς 4, 8, 16, 32,... ἤτοι εἰς ἀριθμὸν μερῶν ἴσον μὲ δύναμίν τινα τοῦ 2, ἤτοι 2^ν. Ὁμοίως ἀπὸ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀρχόμενοι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 3, 6, 12, 24, 48... ἤτοι εἰς $3 . 2^\nu$ ἴσα μέρη. Ὁμοίως ἀπὸ τοῦ πενταγώνου ἀρχόμενοι, διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν εἰς 5, 10, 20, 40, 80..., ἤτοι εἰς $5 . 2^\nu$ ἴσα μέρη· ἀπὸ δὲ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου διαιροῦμεν αὐτὴν εἰς 15,30,60,... ἤτοι εἰς 3. 5.2^{μ} ἴσα μέρη (*).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

271. *Δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἴσον πλῆθος πλευρῶν καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον.*

Ἔστω κανονικὸν τὸ ἐγγεγραμμένον πολύγωνον ΑΒΓΔΕ· αἱ εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου τούτου ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου σχηματίζουσι τὸ πολύγωνον ΗΘΙΚΛ, τὸ ὁποῖον λέγω, ὅτι εἶνε τὸ ζητούμενον.

Ὅτι εἶνε περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον, εἶνε φανερόν· ὅτι δὲ ἔχει τόσας πλευράς, ὅσας καὶ τὸ δοθέν, φαίνεται ἐκ τούτου, ὅτι πρὸς ἑκάστην πλευρὰν τοῦ δοθέντος ἀντιστοιχεῖ μία κορυφὴ τοῦ νέου (πρὸς τὴν ΑΒ ἡ κορυφὴ Η, πρὸς τὴν ΒΓ ἡ Θ, καὶ καθεξῆς)· μένει λοιπὸν νὰ δείξωμεν, ὅτι εἶνε καὶ κανονικόν.



Τὰ τρίγωνα ΗΑΒ, ΘΒΓ, ΙΓΔ..., τὰ περὶ τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος γινόμενα εἶνε ἴσα ἀλλήλοις καὶ ἰσοσκελῆ· διότι τὰ ΗΑΒ καὶ ΙΓΔ (ἵνα ταῦτα θεωρήσωμεν) ἔχουσι τὴν ΑΒ ἴσην τῇ ΓΔ, ὡς πλευρὰς τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου, καὶ τὰς γωνίας Α καὶ Β ἴσας μὲ τὰς Γ καὶ Δ· διότι καὶ αἱ τέσσαρες αὗται γωνίαι εἶνε ἴσαι ἀλλήλαις, ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης (138), καὶ διὰ τοῦτο ἴσαι τῷ ἡμίσει τῆς ἐπικέντρου, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ ἑτέρου τῶν ἴσων τόξων ΑΒ ἢ ΓΔ· ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΗΒ

(*) Μέχρι τῶν ἀρχῶν τοῦ παρελθόντος αἰῶνος ἐνομίζετο, ὅτι μόνον τὰ κανονικὰ ταῦτα πολύγωνα (γνωστὰ ἀπὸ τῶν Ἑλλήνων) δύνανται νὰ ἐγγραφῶσιν εἰς κύκλον διὰ τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν, ἐν αἷς γίνεται χρῆσις εὐθειῶν μόνον καὶ περιφερειῶν. Ἀλλ' ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς **Gauss** ἀπέδειξεν, ὅτι διὰ τοιούτων κατασκευῶν δύναται νὰ διαιρεθῇ ἡ περιφέρεια εἰς μ ἴσα μέρη, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς μ εἶνε ἢ πρῶτος ἀριθμὸς περιεχόμενος ἐν τῷ τύπῳ $2^{\nu}+1$ (οἷοι εἶνε οἱ 5, 17, 257...) ἢ γινόμενον τοιούτων πρώτων παραγόντων, λαμβανομένου ἑκάστου ἅπαξ, ἢ γινόμενον τοιούτων ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν τυχοῦσαν δύναμιν τοῦ 2.

ΓΙΔ εἶνε ἴσα καὶ ἰσοσκελῆ· τὸ αὐτὸ δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν ἄλλων τριγώνων ΘΒΓ, ΚΔΕ κτλ.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΗΒ, ΒΘΓ, ΓΙΔ, ... συνάγεται, ὅτι αἱ γωνίαι Η, Θ, Ι, . . . τοῦ νέου πολυγώνου εἶνε ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΗ, ΗΒ, ΒΘ, ΘΓ, . . . εἶνε πᾶσαι ἴσαι· ἄρα καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ νέου πολυγώνου εἶνε ἴσαι ἀλλήλαις· διότι ἑκάστη σύγκειται ἐκ δύο τοιούτων εὐθειῶν.

Τὸ πρόβλημα λύεται καὶ ἄλλως· ἐὰν δηλονότι ἐκ τῶν μέσων τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, . . . ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου, αἱ ἐφαπτόμεναι αὗται θὰ σχηματίσωσιν (ὡς εὐκόλως ἀποδεικνύεται) κανονικὸν πολύγωνον ἔχον ἴσον πλῆθος πλευρῶν καὶ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα: «*ἐκ τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου ΗΘΙΚΛ περιγεγραμμένου περὶ κύκλον νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο κανονικὸν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ ἔχον ἴσον πλῆθος πλευρῶν*» λύομεν ἐπιζευγνύοντες τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς Α,Β,Γ... διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ... ἢ ἄγοντες ἐκ τοῦ κέντρου τὰς εὐθείας ΟΗ,ΟΘ,ΟΙ..., καὶ ἐπιζευγνύοντες τὰ σημεῖα, ἔνθα αὗται τέμνουσι τὴν περιφέρειαν. Τὰς ἀποδείξεις τῶν κατασκευῶν τούτων, ὡς εὐκόλως εὑρισκομένας, παραλείπομεν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

272. *Δύο κανονικὰ πολύγωνα ἔχοντα ἴσον πλῆθος πλευρῶν εἶνε ὅμοια.*

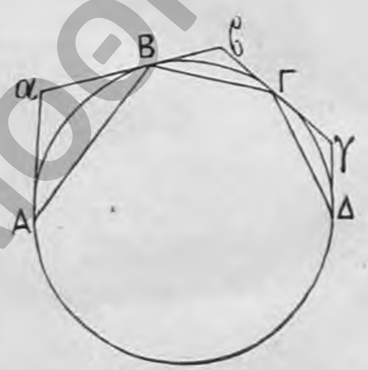
Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν γωνιῶν παντὸς κυρτοῦ πολυγώνου ἔχοντος μ πλευρὰς εἶνε 2μ—4, ἑκάστη γωνία ἑκατέρου τῶν κανονικῶν πολυγώνων θὰ εἶνε $\frac{2\mu-4}{\mu}$, ἢ $2-\frac{4}{\mu}$ ὀρθαί. Ἄρα τὰ πολύγωνα ταῦτα ἔχουσι τὰς γωνίας των ἴσας, ἔχουσι δὲ καὶ τὰς πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους· διότι ὁ λόγος μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ἑνὸς πρὸς μίαν τοῦ ἄλλου εἶνε πάντοτε ὁ αὐτός.

ἄρα τὰ δύο πολύγωνα εἶνε ὅμοια.

ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

273. *Ἐγγεγραμμένη εἰς τόξον* λέγεται πᾶσα τεθλασμένη γραμμή, ἥτις προκύπτει, ἐὰν τὸ τόξον διαιρεθῇ εἰς μέρη καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν· τοιαύτη εἶνε ἡ τεθλασμένη ΑΒΓΔ εἰς τὸ τόξον ΑΔ.



Περιγεγραμμένη δὲ *περὶ τὸ τόξον* λέγεται πᾶσα τεθλασμένη γραμμή, ἥτις προκύπτει, ἐὰν τὸ τόξον διαιρεθῇ εἰς μέρη καὶ εἰς τὰ ἄκρα ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι μέχρις οὗ συναντηθῶσι· τοιαύτη εἶνε ἡ ΑαβγΔ περὶ τὸ τόξον ΑΔ.

Ἀντιστοιχοῦσαι λέγονται δύο γραμμαί, ἐὰν εἶνε εἰς τὸ αὐτὸ τόξον ἡ μὲν ἐγγεγραμμένη ἡ δὲ περιγεγραμμένη, ἐγγίζωσι δὲ ἀμφότεραι τὸ τόξον εἰς τὰ αὐτὰ σημεῖα.

Τοιαῦται εἶνε αἱ γραμμαὶ ΑΒΓΔ καὶ ΑαβγΔ.

274. *Ἀνάπτυγμα τόξου* λέγεται εὐθεῖά τις, ἥτις εἶνε μεγαλητέρα μὲν πάσης τεθλασμένης γραμμῆς, ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτό, μικροτέρα δὲ πάσης περιγεγραμμένης περὶ αὐτό.

Μῆκος δὲ *τόξου* λέγεται τὸ μῆκος τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἐὰν τὸ τόξον ΑΔ αὐξάνῃ, μέχρις οὗ τὰ δύο ἄκρα αὐτοῦ συμπέσωσι, καταντᾷ περιφέρεια, αἱ δὲ εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμέναι καὶ περιγεγραμμέναι γραμμαὶ καταντῶσι πολύγωνα· ὅθεν ἕπονται οἱ ἑξῆς ὁρισμοί·

275. *Ἀνάπτυγμα περιφερείας* λέγεται εὐθεῖά τις, ἥτις εἶνε μεγαλητέρα μὲν τῆς περιμέτρου παντὸς εἰς αὐτὴν ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικροτέρα δὲ τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου περὶ αὐτήν.

Μῆκος δὲ τῆς περιφερείας λέγεται τὸ μῆκος τῆς αὐτῆς εὐθείας.

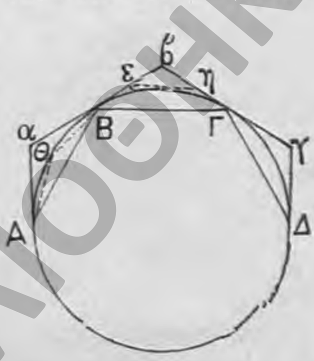
Ὅτι δὲ δι' ἕκαστον τόξον (ἑπομένως καὶ διὰ τὴν ὅλην περιφέρειαν) ὑπάρχει μία τοιαύτη γραμμή, καὶ μία μόνη, ἀποδεικνύεται ἐν τοῖς ἑπομένοις θεωρήμασι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

276. *Πάσης εἰς τόξον ἐγγεγραμμένης γραμμῆς ὑπάρχει ἄλλη ἐγγεγραμμένη μεγαλητέρα, καὶ πάσης περιγεγραμμένης ὑπάρχει ἄλλη περιγεγραμμένη μικροτέρα.*

Καὶ πᾶσα ἐγγεγραμμένη εἶνε μικροτέρα πάσης περιγεγραμμένης.

1) Ἔστω ἐγγεγραμμένη ἡ ΑΒΓΔ εἰς τὸ τόξον ΑΔ· ἐὰν ἓν τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη (ἢ καὶ περισσότερα) καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν, γίνεται ἐγγεγραμμένη γραμμὴ ἡ ΑΘΒΓΔ μεγαλητέρα τῆς πρώτης· διότι ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἀντικατεστάθη ὑπὸ τῆς τεθλασμένης ΑΘ + ΘΒ.

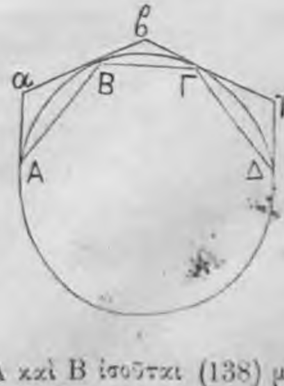


2) Ἔστω περιγεγραμμένη ἡ ΑαβγΔ εἰς τὸ τόξον ΑΔ· ἐὰν ἑνὸς τῶν τόξων, ἔστω τοῦ ΒΓ, ἀχθῇ ἐφαπτομένη τις, ὡς ἡ εη, γίνεται νέα περιγεγραμμένη γραμμή, ἡ ΑαεηγΔ, ἥτις εἶνε μικροτέρα τῆς πρώτης· διότι ἡ τεθλασμένη εβ + βη ἀντικατεστάθη ὑπὸ τῆς εὐθείας εη.

3) Ἡ ἐγγεγραμμένη ΑΒΓΔ εἶνε μικροτέρα πάσης περιγεγραμμένης εἰς τὸ αὐτὸ τόξον, οἷον τῆς ΑαβγΔ· διότι ἀχθείσης τῆς χορδῆς ΑΔ γίνεται πολύγωνον κυρτὸν τὸ ΑΒΓΔΑ, ὅπερ περικλείεται πανταχόθεν ὑπὸ τῆς τεθλασμένης ΑαβγΔΑ (95).

ΘΕΩΡΗΜΑ

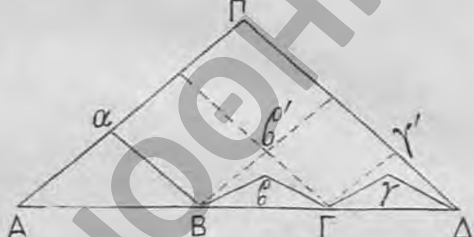
277. *Ἡ διαφορὰ δύο ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν εἶνε μικροτέρα τοῦ διπλασίου ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐγγεγραμμένῃ, γωνίας δὲ παρὰ τὴν βάσιν ἴσας τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεγίστου τῶν μερῶν τοῦ τόξου.*



Ἔστωσαν ἀντιστοιχοῦσαι αἱ τεθλασμέναι γραμμαὶ ΑΒΓΔ καὶ ΑαβγΔ· καὶ ἐκ τῶν μερῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ τοῦ τόξου ΑΔ ἔστω μέγιστον (ἢ μηδενὸς τῶν ἄλλων μικρότερον) τὸ ΑΒ.

Τοῦ τριγώνου ΑαΒ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β ἰσοῦται (138) μὲ ἐγγεγραμμένην βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ· ὡσαύτως τοῦ τριγώνου ΒϐΓ ἑκατέρα τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἰσοῦται μὲ ἐγγεγραμμένην βαίνουσαν ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ καὶ οὕτω καθεξῆς· ἑπομένως πάντα τὰ τρίγωνα ΑαΒ, ΒϐΓ, ΓγΔ,... εἶνε ἰσοσκελῆ, καὶ τὸ ΑαΒ ἔχει γωνίας Α καὶ Β παρὰ τὴν βάσιν μεγαλητέρας ἢ τὰ ἄλλα.

Ἂς τεθῶσι τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑαΒ, ΒϐΓ,... ἐπ' εὐθείας, ὥστε αἱ μὲν βάσεις αὐτῶν (αἱ πλευραὶ τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς) νὰ ἀποτελέσωσι τὴν εὐθεῖαν ΑΔ, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς περιγεγραμμένης τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑαΒϐΓγΔ.



Ἐὰν ἐκ τῶν σημείων Β, Γ,... ἀχθῶσι παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθείας Αα καὶ Βα, αἱ παράλληλοι αὗται δὲν δύνανται νὰ εἰσέλθωσιν ἐντὸς τῶν τριγώνων ΒϐΓ, ΓγΔ,..., διότι σχηματίζουσι πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν γωνίας ἴσας τῇ Α, τουτέστι μεγαλητέρας τῶν γωνιῶν ϐΒΓ, γΓΔ,... ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΒϐΓ, ΓγΔ,.. κεῖνται ἐντὸς τῶν τριγώνων Βϐ'Γ, Γγ'Δ,... καὶ διὰ τοῦτο ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑαΒϐΓγΔ εἶνε μικροτέρα τῆς τεθλασμένης ΑαΒϐ'Γγ'Δ... (96).

Ἀλλ' ἡ τεθλασμένη αὕτη γραμμὴ ἰσοῦται τῇ ΑΠ+ΠΔ· διότι αἱ μὲν Αα+Βϐ'+Γγ' ἀποτελοῦσιν (ὡς ἐκ τῶν παραλλήλων ἀμέσως φαίνεται) τὴν ΑΠ, αἱ δὲ Βα+Γϐ'+Δγ', τὴν ΠΔ· ἑπομένως ἡ περιγεγραμμένη γραμμή, ἡ ΑαΒϐΓγΔ, εἶνε μικροτέρα τῆς ΑΠ+ΠΔ (ἢ τὸ πολὺ ἴση μὲ αὐτήν, ἂν πάντα τὰ τρίγωνα εἶνε ἴσα)· εἶνε δὲ καὶ ἡ ἐγγεγραμμένη γραμμὴ ἴση τῇ εὐθείᾳ ΑΔ· ἄρα ἡ διαφορὰ τῶν ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν ΑΒΓΔ καὶ ΑαϐγΔ εἶνε μικροτέρα τῆς διαφορᾶς ΑΠ+ΠΔ—ΑΔ (ἢ τὸ πολὺ ἴση μὲ αὐτήν).

Ἀλλ' ἂν ἐκ τοῦ Π ἀχθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΠΔ, θὰ τέμνῃ τὴν βάσιν ΑΔ κατὰ τὸ μέσον αὐτῆς Ρ, καὶ θὰ εἶνε

$$\text{ΑΠ}-\text{ΑΡ}<\text{ΠΡ} \text{ καὶ } \text{ΔΠ}-\text{ΔΡ}<\text{ΠΡ},$$
$$\text{ὅθεν } \text{ΑΠ}+\text{ΔΠ}-\text{ΑΡ}-\text{ΔΡ}<2\text{ΠΡ},$$
$$\text{τουτέστιν } \text{ΑΠ}+\text{ΔΠ}-\text{ΑΔ}<2\text{ΠΡ}\cdot$$

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀντιστοιχουσῶν γραμμῶν εἶνε μικροτέρα τοῦ διπλασίου ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΠΔ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν ἴσην τῇ ἐγγεγραμμένῃ γραμμῇ, γωνίας δὲ παρὰ τὴν βάσιν τὰς Α καὶ Β, ἴσας τῇ ἐγγεγραμμένῃ γωνίᾳ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ μεγίστου μέρους ΑΒ τοῦ τόξου ΑΔ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου αὐξάνει, αὐξανούσης τῆς βάσεως αὐτοῦ καὶ διατηρουμένων τῶν γωνιῶν του, συνάγεται, ὅτι τὸ θεώρημα ἀληθεύει, καὶ ὅταν ὡς βάσις τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ληφθῇ γραμμὴ μεγαλητέρα τῆς ἐγγεγραμμένης.

*ΠΟΡΙΣΜΑ

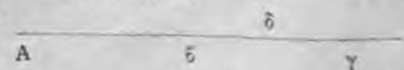
278. *Δοθέντος τόξου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἀντιστοιχούσας τεθλασμένας γραμμάς, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶνε μικροτέρα πάσης δοθείσης εὐθείας Μ.*

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχον βάσιν μὲν ἴσην περιγεγραμμένῃ τινὶ γραμμῇ εἰς τὸ δοθὲν τόξον (ἥτις θὰ εἶνε μεγαλητέρα πάσης ἐγγεγραμμένης), ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τῆς δοθείσης εὐθείας Μ, ἔστω δὲ τοῦτο τὸ ΑΠΔ· ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ δοθὲν τόξον εἰς μέρη ἴσα ἢ μικρότερα τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βαίνει ἐγγεγραμμένη γωνία ἴση τῇ Α· αἱ χορδαὶ τῶν μερῶν τούτων ἀποτελοῦσιν ἐγγεγραμμένην γραμμήν, ἥτις θὰ διαφέρῃ ἀπὸ τῆς ἀντιστοιχούσης αὐτῇ περιγεγραμμένης διαφορὰν μικροτέραν τῆς δοθείσης εὐθείας Μ.

*ΘΕΩΡΗΜΑ

279. ***Δοθέντος τόξου ὑπάρχει εὐθεῖά τις μεγαλητέρα μὲν πάσης εἰς αὐτὸ ἐγγεγραμμένης γραμμῆς, μικροτέρα δὲ πάσης περιγεγραμμένης· μία δὲ καὶ μόνη ὑπάρχει τοιαύτη εὐθεῖα.***

Ἐὰν νοήσωμεν τάς τε ἐγγεγραμμένας καὶ τὰς περιγεγραμμένας ἀναπτυσσομένας ἐπὶ εὐθείας καὶ οὕτως, ὥστε νὰ ἔχωσι πᾶσαι κοινὴν ἀρχὴν σημεῖόν τι Α, τὰ πέρατα τῶν ἐγγεγραμμένων θὰ πέσωσιν ἐπί τινος μέρους τῆς εὐθείας, τὰ δὲ πέρατα τῶν περιγεγραμμένων ἐπὶ ἄλλου· (διότι πᾶσα ἐγγεγραμμένη εἶνε μικροτέρα πάσης περιγεγραμμένης)·



θὰ χωρίζωνται δὲ τὰ δύο ταῦτα μέρη ἢ ὑπὸ σημείου τινός, ἢ ὑπὸ μέρους τινὸς τῆς εὐθείας· λέγω, ὅτι τὸ δεύτερον τοῦτο εἶνε ἀδύνατον· διότι, ἂν ἐχωρίζοντο ὑπὸ τοῦ μέρους βγ, πάντα μὲν τὰ πέρατα τῶν ἐγγεγραμμένων θὰ ἔπιπτον ἐπὶ τοῦ Αβ, πάντα δὲ τὰ πέρατα τῶν περιγεγραμμένων πέραν τοῦ γ· ἡ δὲ διαφορὰ τῆς τυχούσης ἐγγεγραμμένης καὶ τῆς τυχούσης περιγεγραμμένης θὰ ἦτο πάντοτε μεγαλητέρα τῆς βγ· ὅπερ ἄτοπον (278). ἄρα τὰ δύο εἰρημένα μέρη χωρίζονται ὑπὸ σημείου τινὸς δ, καὶ ἡ εὐθεῖα Αδ εἶνε ἑπομένως μεγαλητέρα μὲν πασῶν τῶν ἐγγεγραμμένων, μικροτέρα δὲ πασῶν τῶν περιγεγραμμένων. Οὐδεμία δὲ ἄλλη τοιαύτη εὐθεῖα ὑπάρχει· διότι πᾶσα μικροτέρα αὐτῆς, ὡς ἡ Αβ, εἶνε μικροτέρα τινῶν ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων (ὧν τὰ πέρατα πίπτουσι μεταξὺ β καὶ δ), πᾶσα δὲ μεγαλητέρα αὐτῆς, ὡς ἡ Αγ, εἶνε μεγαλητέρα τινῶν ἐκ τῶν περιγεγραμμένων (ὧν τὰ πέρατα πίπτουσι μεταξὺ γ καὶ δ).

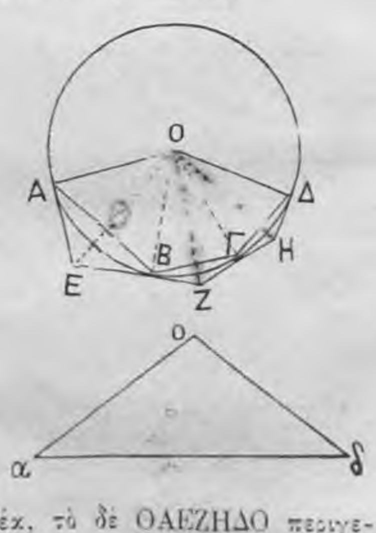
*ΠΟΡΙΣΜΑ

280. Δοθέντος τόξου δυνάμεθα νά εὕρωμεν εὐθεῖαν διαφέρουσαν τοῦ ἀναπτύγματος αὐτοῦ διαφορὰν μικροτέραν πάσης δοθείσης εὐθείας Μ.

Ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν δύο ἀντιστοιχούσας τεθλασμένας γραμμάς, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶνε μικροτέρα τῆς Μ· ἑκατέρα τῶν γραμμῶν τούτων ἀναπτυσσομένη ἐπὶ εὐθείας θὰ δώσῃ ἀνάπτυγμα διαφέρον ἀπὸ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ τόξου διαφορὰν μικροτέραν τῆς εὐθείας Μ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

281. Πᾶς κυκλικὸς τομεὺς εἶνε ἰσοδύναμος τριγώνῳ ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου αὐτοῦ, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα.



Ἔστω κυκλικὸς τομεὺς ὁ ΟΑΔ καὶ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου αὐτοῦ ἡ εὐθεῖα αδ. Ἐὰν κατασκευασθῇ ἐπὶ τῆς αδ τρίγωνον ἔχον ὕψος ἴσον τῇ ἀκτῖνι, λέγω, ὅτι τὸ τρίγωνον τοῦτο οαδ εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸν τομέα.

Ἂς διαιρεθῇ τὸ τόξον ΑΔ τοῦ τομέως εἰς ὁσαδήποτε μέρη, καὶ ἂς ἐγγραφῇ εἰς αὐτὸ ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ, ἂς περιγραφῇ δὲ καὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα ΑΕΖΗΔ. Αἱ γραμμαὶ αὗται μετὰ τῶν ἀκτίνων τοῦ τομέως σχηματίζουσι δύο πολύγωνα, τὸ μὲν ΟΑΒΓΔΟ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν τομέα, τὸ δὲ ΟΑΕΖΗΔΟ περιγεγραμμένον περὶ αὐτόν.

Ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΑΟΔ εἶνε προφανῶς μεγαλήτερος μὲν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικρότερος δὲ τοῦ περιγεγραμμένου· καὶ τὸ τρίγωνον οαδ τὴν αὐτὴν ἔχει σχέσιν πρὸς τὰ ῥηθέντα πολύγωνα.

Διότι τὸ μὲν περιγεγραμμένον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ εἰς τρίγωνα ἔχοντα ὕψος ἴσον τῇ ἀκτῖνι· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε

$$\frac{1}{2}\text{ΑΕ.ΟΑ}+\frac{1}{2}\text{ΕΖ.ΟΑ}+\frac{1}{2}\text{ΖΗ.ΟΑ}+\frac{1}{2}\text{ΗΔ.ΟΑ},$$

$$\text{ἤτοι } \frac{1}{2}\text{ΟΑ.(ΑΕ+ΕΖ+ΖΗ+ΗΔ)},$$

ἐπομένως μεγαλήτερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου οαδ, διότι ἡ περιγεγραμμένη ΑΕΖΗΔ εἶνε μεγαλητέρα τοῦ ἀναπτύγματος αδ.

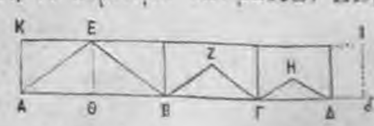
Τὸ δὲ ἐγγεγραμμένον διαιρεῖται ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΟΒ, ΟΓ εἰς ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ἔχοντα ὕψος μικρότερον τῆς ἀκτῖνος· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτῶν εἶνε μικρότερον τοῦ

$$\frac{1}{2}\text{ΑΒ.ΟΑ}+\frac{1}{2}\text{ΒΓ.ΟΑ}+\frac{1}{2}\text{ΓΔ.ΟΑ},$$

$$\text{ἤτοι τοῦ } \frac{1}{2}\text{ΟΑ(ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ)},$$

ἐπομένως μικρότερον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου οαδ· διότι ἡ ἐγγεγραμμένη ΑΒΓΔ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀναπτύγματος αδ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἀμφότερα, καὶ τὸ τρίγωνον οαδ καὶ ὁ τομεύς, εἶνε μεγαλήτερα μὲν τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικρότερα δὲ τοῦ περιγεγραμμένου· ἐπομένως αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν διαφέρουσιν (ἂν διαφέρωσιν) ὀλιγώτερον ἢ αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυγώνων· ἀλλ' ἡ διαφορὰ τῶν δύο πολυγώνων δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης ἐπιφανείας, ὅταν τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ τόξον ΑΔ, γίνωσιν ἀρκούντως μικρά, διότι, ἂν θέσωμεν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας τὰ τὴν διαφορὰν ταύτην ἀποτελοῦντα ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΖΓ,..., ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων ΑΒ, ΒΓ,... εἶνε μικρότερον τοῦ ἀναπτύγματος αδ, βλέπομεν ἀμέσως, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια ὅλων τῶν τριγώνων τούτων



εἶνε μικροτέρα τοῦ ὀρθογωνίου ΑΚιδ, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα αδ τοῦ τόξου, ὕψος δὲ τὸ μέγιστον ἐκ τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων, ὅπερ ἔστω τὸ ΕΘ· τοῦ ὀρθογωνίου δὲ τούτου ἡ μὲν βάσις αδ μένει ἀμετάβλητος, τὸ δὲ ὕψος ΕΘ δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον πάσης δοθείσης εὐθείας· ὥστε ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ γίνεται μικροτέρα πάσης δοθείσης ἐπιφανείας· ἐπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων ΑΕΒ, ΒΖΓ,..., τουτέστιν ἡ διαφορὰ τῶν δύο πολυγώνων, γίνεται μικροτέρα πάσης δοθείσης ἐπιφανείας.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου περιγεγραμμένου δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ἐπιφανείας καὶ πάντοτε μεταξὺ αὐτῶν περιλαμβάνονται καὶ ὁ τομεὺς καὶ τὸ τρίγωνον, συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ τομέως καὶ τοῦ τριγώνου οὐδ' εἶνε μικροτέρα πάσης ἐπιφανείας· ἤτοι ὁ τομεὺς καὶ τὸ τρίγωνον οὐδεμίαν ἔχουσι διαφορὰν κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ἐπομένως εἶνε ἰσοδύναμα καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν παρίστανται ὑπὸ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

282. *Ὁ κύκλος εἶνε ἰσοδύναμος τριγώνῳ, ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας αὐτοῦ, ὕψος δὲ τὴν ἀκτῖνα·*

ἢ ὀρθογωνίῳ ἔχοντι βάσιν μὲν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας, ὕψος δὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος.

Ἀρκεῖ νὰ νοηθῇ ὁ τομεὺς αὐξανόμενος, μέχρις οὗ αἱ δύο ἀκτῖνες αὐτοῦ συμπέσωσι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου συνίσταται εἰς τὴν κατασκευὴν τετραγώνου ἰσοδυνάμου πρὸς τὸν δοθέντα κύκλον. Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἀνάγεται διὰ τῶν προηγουμένων εἰς τὴν κατασκευὴν εὐθείας ἴσης τῷ ἀναπτύγματι τῆς περιφερείας. Διότι· ἂν ἠδυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν ταύτην, τὸ ἐπ' αὐτῆς ὡς βάσεως κατασκευαζόμενον ὀρθογώνιον, τὸ ἔχον ὕψος τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, εἶνε ἰσοδύναμον πρὸς τὸν κύκλον· τρέποντες δὲ τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἰς τετράγωνον, θὰ εἴχομεν τετράγωνον ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ· ἀλλ' ἡ γεωμετρικὴ λύσις τοῦ προβλήματος τούτου, ἤτοι ἡ κατασκευὴ τοῦ πρὸς κύκλον ἰσοδυνάμου τετραγώνου, ὡς καὶ ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς περιφερείας διὰ τῆς βοηθείας τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ἀπεδείχθη ἀδύνατος ὑπὸ τοῦ γερμανοῦ μαθηματικοῦ Lindemann.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ἱπποκράτους τοῦ Χίου)

283. *Τῶν κύκλων αἱ μὲν περιφέρειαι εἶνε πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν· αἱ δὲ ἐπιφάνειαι εἶνε ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων.*

Ἂς τεθῶσι δύο κύκλοι οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσωσι τὰ κέντρα αὐτῶν καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τοῦ κέντρου ἀκτῖνες διαιροῦσαι τὰς περιφερείας εἰς μέρη ὁσαδήποτε· αἱ χορδαὶ τῶν μερῶν τούτων σχηματίζουσι πολύγωνα ἐγγεγραμμένα καὶ ὅμοια (διότι ἑκάτερον ἐξ αὐτῶν προκύπτει ἐκ τοῦ ἄλλου, ἐὰν αἱ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἀγόμεναι ἀκτῖνες πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐφ' ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν

(242). Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν τὰς περιμέτρους αὐτῶν διὰ Σ καὶ σ, τὰς δὲ ἐπιφανείας αὐτῶν διὰ Ε καὶ ε καὶ τὰς ἀκτῖνας διὰ Α καὶ α, θὰ εἶνε (247)

$$\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\alpha}{A} \text{ καὶ } \frac{\varepsilon}{E}=\frac{\alpha^2}{A^2},$$

$$\text{ὅθεν ἕπεται } \sigma=\left(\frac{\alpha}{A}\right)\Sigma \text{ καὶ } \varepsilon=\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2 E \qquad (\iota)$$

Αἱ ἰσότητες δὲ αὗται ἀληθεύουσιν, ὅσον μικραὶ καὶ ἂν γίνωσιν αἱ πλευραὶ τῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων· ἀλλ᾽ ὅταν τὰ μέρη, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ πλευραὶ διαιροῦσι τὰς περιφερείας, γίνωσιν ἀρκούντως μικρά, αἱ περίμετροι σ καὶ Σ διαφέρουσιν ἀπὸ τῶν περιφερειῶν (ὧν τὰ μήκη παριστῶ διὰ γ καὶ Γ) διαφορὰν μικροτέραν πάσης δοθείσης εὐθείας· ἂν λοιπὸν θέσωμεν

$$\gamma-\sigma=\delta \quad \text{ἢ} \quad \sigma=\gamma-\delta,$$
$$\Gamma-\Sigma=\Delta \quad \text{ἢ} \quad \Sigma=\Gamma-\Delta,$$

αἱ διαφοραὶ δ καὶ Δ δύνανται νὰ γίνωσιν ὅσον θέλωμεν μικραί. Διὰ τὰς ἰσότητας ταύτας ἡ πρώτη τῶν ἰσοτήτων (ι) γίνεται

$$\gamma-\delta=\left(\frac{\alpha}{A}\right).(\Gamma-\Delta). \text{ ἢ } \gamma-\left(\frac{\alpha}{A}\right) \Gamma=\delta-\left(\frac{\alpha}{A}\right)\Delta$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν γ καὶ $\left(\frac{\alpha}{A}\right)\Gamma$ εἶνε ὅσον θέλωμεν μικρὰ (ἂν λόγου χάριν θέλωμεν νὰ ἀποδείξωμεν αὐτὴν μικροτέραν τοῦ $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ νὰ ἐγγράψωμεν πολύγωνα, διὰ τὰ ὁποῖα αἱ διαφοραὶ δ καὶ Δ νὰ εἶνε μικρότεραι τοῦ $\frac{1}{\nu}$).

Ἐπειδὴ δὲ οἱ ἀριθμοὶ γ καὶ $\left(\frac{\alpha}{A}\right).\Gamma$ εἶνε ὡρισμένοι, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶνε ἀριθμὸς ὡρισμένος· εἶνε δὲ καὶ μικρότερος παντὸς ἀριθμοῦ· ἀλλ᾽ ἀριθμὸς ὡρισμένος, ὅστις νὰ εἶνε μικρότερος παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ, δὲν ὑπάρχει ἄλλος πλὴν τοῦ 0· (διότι παντὸς ἄλλου δύναται νὰ εὑρεθῇ μικρότερος)· ὅθεν ἡ διαφορά, περὶ ἧς ὁ λόγος, θὰ εἶνε 0· ὥστε εἶνε

$$\gamma-\left(\frac{\alpha}{A}\right)\Gamma=0 \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A}.$$

Ὁμοίως ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἰσοτήτων (ι) συμπεραίνεται ἡ ἰσότης

$$\frac{\varkappa}{K}=\frac{\alpha^2}{A^2}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἀντιστοιχοῦντα τόξα δύο κύκλων λέγονται *ὅμοια* (οἷον τὰ τόξα ΑΒΓΔ καὶ αβγδ), ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς οἱ ἴσας ἔχοντες γωνίας λέγονται *ὅμοιοι*. Ἀποδεικνύεται δὲ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι τὰ ὅμοια τόξα εἶνε πρὸς ἄλληλα, ὡς αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν· διότι καὶ αἱ περίμετροι τῶν εἰς αὐτὰ ἐγγραφομένων γραμμῶν, ὅταν ταῦτα διαιρεθῶσιν εἰς μέρη δι' ὁσωνδήποτε ἀκτίνων, (π. χ. αἱ ΑΒ+ ΒΓ+ ΓΔ καὶ αβ + βγ + γδ), ἔχουσι τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων (παράβλ. 245). Ἔτι δὲ καὶ οἱ ὅμοιοι τομεῖς εἶνε πρὸς ἀλλήλους, ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

284. *Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον εἶνε ὁ αὐτὸς εἰς πάντας τοὺς κύκλους.*

Διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A}$ εὑρίσκομεν $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\Gamma}{A}$, ἐξ ἧς καὶ $\frac{\gamma}{2\alpha}=\frac{\Gamma}{2A}$, τουτέστιν ὁ λόγος, ὃν ἔχει ἡ περιφέρεια γ πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς 2α, εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς τυχούσης περιφερείας Γ πρὸς τὴν διάμετρον αὐτῆς 2Α. Τουτέστιν αἱ περιφέρειαι εἶνε ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν ἢ καὶ πρὸς τὰς διαμέτρους.

Ὁ λόγος τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρόν της παρίσταται ἐν τοῖς συγγράμμασι πάντων τῶν ἐθνῶν διὰ τοῦ ἑλληνικοῦ γράμματος π. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι εἶνε ἀριθμὸς ἀσύμμετρος (ἤτοι ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά).

Παρακατιόντες θὰ δείξωμεν, πῶς δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅσα θέλωμεν ψηφία αὐτοῦ· εὑρίσκεται δέ, ὅτι $\pi=3,14159265358979 32...$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Καὶ ὁ λόγος ἑκάστου τόξου πρὸς τὴν ἀκτῖνά του εἶνε ὁ αὐτὸς εἰς πάντα τὰ ὅμοια τόξα· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\frac{(\text{τοξ}\alpha\beta)}{(\text{τοξ}AB)}=\frac{\alpha}{A} \text{ συνάγεται } \frac{(\text{τοξ}\alpha\beta)}{\alpha}=\frac{(\text{τοξ}AB)}{A}.$$

ΜΕΤΡΑ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

285. *Ἐὰν ἡ ἀκτὶς κύκλου παρασταθῇ διὰ τοῦ α, τὸ μὲν μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ τύπου* $2\pi\alpha$,
τὸ δὲ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἐκ τοῦ τύπου $\pi\alpha^2$.

Διότι παριστῶντες τὸ μὲν μῆκος τῆς περιφερείας διὰ τοῦ γ, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου διὰ τοῦ κ, ἔχομεν $\frac{\gamma}{2\alpha}=\pi$, ὅθεν $\gamma=2\pi\alpha$,

πρὸς τούτοις εἶνε (282) $\kappa=\frac{1}{2}\gamma.\alpha=\frac{1}{2}.2\pi\alpha.\alpha=\pi.\alpha^2$.

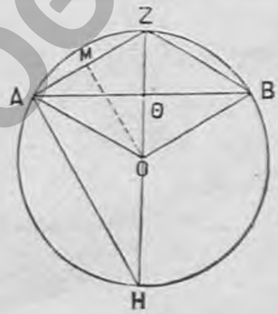
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ κύκλος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς ἰσοῦται τῇ μονάδι τοῦ μήκους, ἔχει περιφέρειαν μὲν 2π, ἐμβαδὸν δὲ π.

* ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ π ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

286. *Ἐκ τοῦ ἀποστήματος κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον* (τουτέστιν ἐκ τοῦ ἀποστήματος τοῦ κέντρου αὐτοῦ ἀπὸ τῶν πλευρῶν του) *καὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, εὑρεῖν τὸ ἀπόστημα τοῦ εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.*

Ἔστω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ΟΘ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ· ἐὰν ἡ ΟΘ προσεκβληθῇ μέχρι τῆς περιφερείας, θὰ διαιρέσῃ τὸ τόξον ΑΒ εἰς δύο ἴσα μέρη ΑΖ καὶ ΖΒ καὶ αἱ χορδαὶ ΑΖ, ΖΒ θὰ εἶνε πλευραὶ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ὅπερ ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν· ὥστε ἡ ἐκ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν ΑΖ ἠγμένη κάθετος ΟΜ θὰ εἶνε τὸ ζητούμενον ἀπόστημα.



Τὴν μὲν ἀκτῖνα ΟΑ παριστῶμεν διὰ τοῦ α, τὸ δοθὲν ἀπόστημα ΟΘ διὰ τοῦ ρ, τὸ δὲ ζητούμενον ΟΜ διὰ τοῦ ρ'.

Ἐὰν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ ΖΑΗ ἀχθῇ ἡ χορδὴ ΑΗ, θὰ εἶνε (198)

$$(\mathrm{AH})^2 = 2\alpha(\alpha+\rho)$$

ἀλλ' εἶνε καὶ $\mathrm{AH}=2\rho'$ (διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΖΜΟ καὶ ΖΑΗ)· ὅθεν $4\rho'^2=2\alpha(\alpha+\rho)$,

$$\text{ὅθεν } \rho'=\sqrt{\frac{\alpha(\alpha+\rho)}{2}}$$

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς α εἶνε ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους, ἔχομεν

$$\rho'=\sqrt{\frac{1+\rho}{2}}.$$

Θεόδωρος Εμμ. ...
5/4/1913

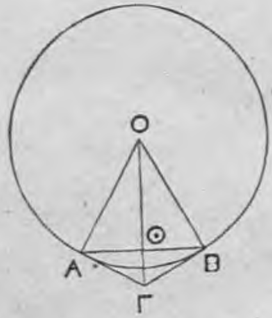
Θεό
Θεό
Θεό

Demètre Christophe

20 Μαΐου 1915

287. *Ἐκ τοῦ ἀποστήματος ρ κανονικοῦ τινος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου εὑρεῖν τὴν περίμετρον αὐτοῦ Σ καὶ τὴν τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου Σ'.*

Ἔστω ΑΒ μία τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου· ἐὰν εἰς τὰ ἄκρα αὐτῆς ἀχθῶσιν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓ, ΒΓ, ἑκατέρα τούτων θὰ εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου.



Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΘ ἔχομεν ἐν πρώτοις

$$(\mathrm{A\Theta})^2=(\mathrm{OA})^2-(\mathrm{O\Theta})^2=\alpha^2-\rho^2,$$

$$\text{ὅθεν } \mathrm{A\Theta}=\sqrt{\alpha^2-\rho^2}$$

$$\text{καὶ } \mathrm{AB}=2\sqrt{\alpha^2-\rho^2}$$

καὶ ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου, ἡ περίμετρος αὐτοῦ Σ θὰ δοθῇ ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\Sigma=2\nu\sqrt{\alpha^2-\rho^2} \qquad (2)$$

Πρὸς εὕρεσιν τῆς περιμέτρου Σ' παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΘ καὶ ΟΑΓ εἶνε ὅμοια· διότι, πλὴν τῆς ὀρθῆς, ἔχουσι καὶ μίαν γωνίαν ἴσην, τὴν εἰς τὸ Ο· Ἐκ τῆς ὁμοιότητος δ' αὐτῶν συνάγεται

$$\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A\Theta}}=\frac{\alpha}{\rho},$$

$$\text{ὅθεν καὶ } \mathrm{A\Gamma}=\frac{\alpha}{\rho}\mathrm{A\Theta}$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ 2ν καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι 2ν.ΑΘ ἰσοῦται τῇ περιμέτρῳ Σ καὶ 2ν.ΑΓ ἰσοῦται τῇ Σ', εὑρίσκομεν τὸν τύπον

$$\Sigma'=\frac{\alpha}{\rho}.\Sigma. \qquad (3)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

288. *Εὑρεῖν τὸν λόγον τῆς περιφερείας πρὸς τὴν διάμετρον κατὰ δοθεῖσαν προσέγγισιν.*

Ἐὰν ἡ ἀκτὶς κύκλου εἶνε ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους, ἡ περιφέρεια αὐτοῦ ἔχει μῆκος 2π· εἶνε δὲ ἡ περιφέρεια μεγαλητέρα μὲν τῆς περιμέτρου παντὸς ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, μικροτέρα δὲ τῆς περιμέτρου παντὸς περιγεγραμμένου (275). Ἐὰν λοιπὸν εὕρωμεν δύο ἀντιστοιχοῦντα κανονικὰ πολύγωνα, τῶν ὁποίων αἱ περίμετροι νὰ διαφέρωσιν ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$, ὁ ἀριθμὸς 2π θὰ διαφέρῃ ἀφ' ἑκατέρας τῶν περιμέτρων τούτων ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$· ἑπομένως, λαμβάνοντες τὸ 2π ἴσον τῇ μιᾷ τῶν περιμέτρων, ποιοῦμεν λάθος μικρότερον τοῦ $\frac{1}{\mu}$.

Ἐγγράφοντες τετράγωνον εἰς κύκλον, εὑρίσκομεν εὐκόλως, ὅτι τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του, ἤτοι (265) $\frac{1}{2}\alpha\sqrt{2}$· καὶ ἐπειδὴ ἡ ἀκτὶς ὑπετέθη ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους, τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου εἶνε $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Ἔχοντες τὸ ἀπόστημα τοῦτο, εὑρίσκομεν διὰ τοῦ τύπου (1) τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου, ὅπερ εἶνε

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

καὶ ἐκ τοῦ ἀποστήματος τούτου εὑρίσκομεν πάλιν διὰ τοῦ αὐτοῦ τύπου (1) τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου δεκαεξαγώνου, ὅπερ εἶνε

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

καὶ ἐκ τούτου εὑρίσκομεν ὁμοίως τὸ ἀπόστημα τοῦ 32γώνου, ὅπερ εἶνε

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

καὶ οὕτω καθεξῆς· ὁ δὲ νόμος, καθ' ὃν προχωροῦσιν αἱ παραστάσεις αὗται τῶν ἀποστημάτων, εἶνε προφανής· ὥστε δυνάμεθα ἀμέσως νὰ γράψωμεν τὴν τιμὴν τοῦ ἀποστήματος τοῦ δοθέντος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου (ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ εἶνε δύναμίς τις τοῦ 2).

Ἐκ τοῦ ἀποστήματος ἑκάστου ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου εὑρίσκεται ἡ περίμετρος αὐτοῦ διὰ τοῦ τύπου (2) καὶ ἡ περίμετρος τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου διὰ τοῦ τύπου (3).

Ἐὰν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ὑπολογίσωμεν τὰ ἀποστήματα καὶ τὰς περιμέτρους τῶν κανονικῶν ἐγγεγραμμένων πολυγώνων, ἅτινα ἔχουσι 4, 8, 16, 32, 64 128... πλευράς, καὶ τὰς περιμέτρους τῶν πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχούντων περιγεγραμμένων, σχηματίζομεν τὸν ἑξῆς πίνακα.

ἀριθ. πλευρῶν	ἀπόστημα	περίμ. ἐγγεγρ.	περίμ. περιγεγρ
4	0,707106...	5,656854...	8.
8	0,923897...	6,122934...	6,627415...
16	0,980785...	6,242888...	6,365194...
32	0,995185...	6,273095...	6,303448...
64	0,998795...	6,280662...	6,288236...
128	0,999699...	6.282553...	6,284446...
256	0,999925...	6,283027...	6,283500...
512	0.999981...	6,283145...	6,283264...
1024	0,999995...	6,283175...	6,283205...
2048	0,999999...	6,283182...	6,283190...

Ἐν τῷ πίνακι τούτῳ βλέπομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα 1 εἶνε μικροτέρα μὲν τοῦ 6,283190... (ὅπερ εἶνε ἡ περίμετρος τοῦ εἰς αὐτὴν περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει 2048 πλευράς), μεγαλητέρα δὲ τοῦ 6,283182... (ὅπερ εἶνε ἡ περίμετρος τοῦ ἴσον πλῆθος πλευρῶν ἔχοντος ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου)· καὶ ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια αὕτη ἔχει διάμετρον 2, ὁ λόγος αὐτῆς πρὸς τὴν διάμετρόν της εἶνε μικρότερος μὲν τοῦ 3,141595, μεγαλήτερος δὲ τοῦ 3,141591..., ἄρα λαμβάνοντες $\pi = 3,14159...$ ποιοῦμεν λάθος μικρότερον τοῦ $\frac{1}{100000}$ (*).

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

289. Ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν λαμβάνεται συνήθως ἡ ὀρθὴ γωνία. Ἐπειδὴ δὲ ὁ λόγος οἱασδήποτε γωνίας πρὸς τὴν ὀρθὴν εἶνε ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ τόξου, ἐφ' οὗ βαίνει, (ὅταν ἡ κορυφὴ αὐτῆς τεθῇ εἰς τὸ κέντρον τοῦ τυχόντος κύκλου) πρὸς τὸ τεταρτημόριον τῆς περιφερείας (225), συμπεραίνομεν, ὅτι ἀντὶ νὰ συγκρίνωμεν τὴν δοθεῖσαν γωνίαν πρὸς τὴν ὀρθήν, δυνάμεθα νὰ συγκρίνωμεν τὸ τόξον, ἐφ' οὗ ἡ γωνία βαίνει, πρὸς τὸ τεταρτημόριον, ὁ δὲ ἐκ τῆς συγκρίσεως ταύτης προκύπτων ἀριθμὸς παριστᾷ τὴν γωνίαν.

Ἐν ταῖς πρακτικαῖς ἐφαρμογαῖς τῆς γεωμετρίας γίνεται τοῦτο ὡς ἑξῆς. Περιφέρειάν τινα διαιροῦμεν εἰς 360 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *μοῖραι*, ἑκάστην μοῖραν διαιροῦμεν εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *λεπτὰ πρῶτα*, καὶ ἕκαστον λεπτὸν πρῶτον εἰς 60 ἴσα μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται *λεπτὰ δεύτερα*.

Ἡ διαίρεσις αὕτη τῆς περιφερείας ἐγένετο ὑπὸ τῶν Βαβυλωνίων.

(*) Ὁ Ἀρχιμήδης πρῶτος ἀνεκάλυψε τὴν ἰσότητα τοῦ κύκλου πρὸς τὸ τρίγωνον, οὗ βάσις ἡ περιφέρεια καὶ ὕψος ἡ ἀκτὶς (282) καὶ εὗρε τὸν εἰς τὸν π προσεγγίζοντα ἀριθμὸν $\frac{22}{7}$ (ὅστις εἶνε μεγαλήτερος τοῦ π) ἔδειξε δὲ ἐν τῷ συγγράμματι αὐτοῦ «Κύκλου μέτρησις», ὅτι περιλαμβάνεται ὁ π μεταξὺ $3+\frac{10}{71}$ καὶ $3+\frac{1}{7}$. Μετὰ τοῦτον εὗρεν ὁ Μέτιος τὸν μᾶλλον προσεγγίζοντα ἀριθμὸν $\frac{355}{113}$. Ἄλλοι δὲ μαθηματικοὶ ὑπελόγισαν ἔπειτα τὸν π μὲ πολὺ μεγαλητέραν προσέγγισιν καὶ σήμερον εἶνε γνωστὸς μὲ 500 καὶ πλέον δεκαδικὰ ψηφία.

Ἵνα δὲ μετρήσωμεν δοθεῖσαν γωνίαν, θέτομεν τὴν κορυφὴν αὐτῆς εἰς τὸ κέντρον τῆς ὡς εἴρηται διῃρημένης περιφερείας καὶ βλέπομεν, πόσων μοιρῶν καὶ λεπτῶν πρώτων καὶ δευτέρων εἶνε τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιεχόμενον τόξον. Ἐὰν παραδείγματος χάριν εἶνε 36 μοιρῶν, τοῦτο σημαίνει, ὅτι ἡ γωνία εἶνε $\frac{36}{90}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐὰν τὸ τόξον εἶνε 32 μοιρῶν, 25 λεπτῶν πρώτων καὶ 35 δευτέρων (ὅπερ σημειοῦται ὡς ἑξῆς: $32^{\circ}\,25'\,35''$), ἡ γωνία εἶνε $\frac{32}{90}$ τῆς ὀρθῆς, $\frac{25}{60}$ τοῦ $\frac{1}{90}$ αὐτῆς καὶ $\frac{35}{60}$ τοῦ ἑξηκοστοῦ τοῦ $\frac{1}{90}$ αὐτῆς· τουτέστιν εἶνε

$$\frac{32}{90}+\frac{25}{60.90}+\frac{35}{60.60.90} \text{ ἢ } \frac{32.60.60+25.60+35}{90.60.60} \text{ τῆς ὀρθῆς.}$$

290. Ἀλλὰ δυνάμεθα νὰ μετρήσωμεν τὰς γωνίας καὶ ἄλλως· ἐὰν δηλαδὴ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς δοθείσης γωνίας καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν γράψωμεν κύκλον, τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας περιλαμβανόμενον τόξον ἔχει μῆκος ὡρισμένον, καὶ ὁ ἀριθμὸς ὁ ἐκφράζων αὐτὸ (τουτέστιν ὁ λόγος τοῦ τόξου τούτου πρὸς τὴν ἀκτῖνά του) δύναται νὰ ληφθῇ καὶ ὡς παριστῶν τὴν γωνίαν. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ὅλη περιφέρεια ἔχει μῆκος 2π (π ὄντος τοῦ γνωστοῦ ἀριθμοῦ), τὸ τεταρτημόριον ἔχει μῆκος $\frac{\pi}{2}$ καὶ ὁ ἀριθμὸς οὗτος $\frac{\pi}{2}$ παριστᾷ τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ἡ γωνία μιᾶς μοίρας, ὡς ἐνενηκοστὸν τῆς ὀρθῆς, παρίσταται διὰ $\frac{\pi}{180}$, ἑπομένως ἡ γωνία τῶν μ μοιρῶν παρίσταται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ θ, ὅστις εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἰσότητος $\theta=\frac{\pi\mu}{180}$.

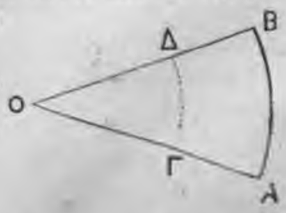
Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον καὶ αἱ γωνίαι μετροῦνται μὲ τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν· εἶνε δὲ συνήθης ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ.

*Ὅταν αἱ γωνίαι μετρῶνται μὲ τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν, ἰσχύει τὸ ἑξῆς θεώρημα.

*ΘΕΩΡΗΜΑ

Τὸ μῆκος παντὸς κυκλικοῦ τόξου εἶνε γινόμενον τῆς ἀκτῖνός του ἐπὶ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν του.

Ἔστω ΑΒ τυχὸν κυκλικὸν τόξον, α ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ καὶ θ ὁ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν ΑΟΒ παριστῶν ἀριθμός· λέγω ὅτι θὰ εἶνε, μῆκος τόξου ΑΒ$=\alpha.\theta$.



Διότι, ἂν με κέντρον τὸ Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν μονάδα τῶν εὐθειῶν γράψωμεν τὸ τόξον ΓΔ, θὰ εἶνε (θεώρημα 283, σημ.).

$$\frac{(AB)}{(\Gamma\Delta)}=\frac{(OA)}{(O\Gamma)} \text{ ἤτοι } \frac{(AB)}{\theta}=\frac{\alpha}{1} \text{ ὅθεν καὶ } (AB)=\alpha\theta.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Ἡ ἀκτὶς κύκλου τινὸς εἶνε 8 πήχεις· πόση εἶνε ἡ περιφέρεια αὐτοῦ καὶ πόση ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

Ἡ ἀκτὶς α παντὸς κύκλου καὶ ἡ περιφέρεια αὐτοῦ γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ κ συνδέονται πρὸς ἄλληλα διὰ τῶν ἰσοτήτων

$$\gamma=2\pi.\alpha \quad \text{καὶ} \quad \kappa=\pi.\alpha^2 \quad (\iota)$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν θέτοντες $\alpha=8$

$$\gamma=16.\pi=50^{\pi\chi},26548\ldots,\ \kappa=64.\pi=201^{\tau\pi},06192\ldots\ (*)$$

2) Ἡ περιφέρεια κύκλου τινὸς εἶνε 15 πήχεις· πόση εἶνε ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ καὶ πόση ἡ ἀκτίς του;

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων (ι) λαμβάνομεν $\alpha=\frac{\gamma}{2\pi}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν τιμὴν ταύτην τῆς ἀκτῖνος εἰς τὴν δευτέραν λαμβάνομεν $\kappa=\frac{\gamma^2}{4\pi}$ ὑποθέτοντες δὲ $\gamma=15$, εὑρίσκομεν

$$\alpha=2^{\pi\chi},3873\ldots \text{ καὶ } \kappa=17^{\tau\pi},9049\ldots$$

3) Ἡ ἐπιφάνεια κύκλου τινὸς εἶνε 40 τετρ. πήχεις· πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς καὶ πόση ἡ περιφέρεια αὐτοῦ;

Ἐκ τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων (ι) εὑρίσκομεν $\alpha=\sqrt{\frac{\kappa}{\pi}}$ καὶ $\gamma=2\sqrt{\kappa\pi}$ ὑποθέτοντες δὲ $\kappa=40$, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις

$$\alpha=3^{\pi\chi},568\ldots \quad \gamma=22^{\pi\chi},42$$

4) Ἰσόπλευρόν τι τρίγωνον καὶ τετράγωνον καὶ κανονικὸν ἑξάγωνον εἶνε ἰσοπερίμετρα, ἡ δὲ περίμετρος αὐτῶν εἶνε $24^{\pi\chi}$ νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν.

Ἐκ τῆς περιμέτρου τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὴν πλευρὰν αὐτοῦ, ἣν παριστῶ διὰ μ.

Καὶ ἂν μὲν εἶνε τετράγωνον, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε μ^2.

Ἂν δὲ εἶνε ἰσόπλευρον τρίγωνον, εὑρίσκομεν τὸ ὕψος αὐτοῦ ἐκ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος· διότι, ἂν ἀχθῇ, διαιρεῖ τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δύο ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ ἑκατέρου τούτων ἔχομεν τὴν ὑποτείνουσαν μ καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν (τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς μ)· ἄρα τὸ ὕψος εἶνε $\sqrt{\mu^2-\left(\frac{\mu}{2}\right)^2}$, ἤτοι $\frac{1}{2}\mu\sqrt{3}$ ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶνε $\frac{1}{4}\mu^2\sqrt{3}$.

(*) Τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἀριθμοῦ π εὑρίσκονται ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τοῦ Dupuis ἐν σελίδι 132, τὰ δὲ πολλαπλάσια τοῦ $\frac{1}{\pi}$ ἐν σελίδι 133.

Διὰ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν ἐκ τοῦ κέντρου του φέρωμεν εὐθείας εἰς τὰς κορυφάς του, διαιρεῖται εἰς 6 ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα (266), ὧν πλευρὰ εἶνε ἡ μ· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε

$$6 . \frac{1}{4}\mu^2\sqrt{3}, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{3}{2}\mu^2\sqrt{3}.$$

Ἐφαρμόζοντες νῦν τοὺς τύπους τούτους εἰς τὸ προκείμενον ζήτημα καὶ παρατηροῦντες, ὅτι τοῦ μὲν ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ πλευρὰ εἶνε 8πχ, τοῦ δὲ τετραγώνου 6, τοῦ δὲ κανονικοῦ ἑξαγώνου 4, εὑρίσκομεν τρίγ.=27ττ, 7128..., τετράγ.=36ττ, ἑξάγ. κανον.=41ττ, 5692....

5) Εἰς κύκλον ἔχοντα ἀκτῖνα 3 πήχεις ἐγγράφονται ἰσόπλευρον τρίγωνον, τετράγωνον καὶ ἑξάγωνον κανονικόν· νὰ εὑρεθῶσι τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν

Αἱ πλευραὶ τῶν ἐγγεγραμμένων τούτων πολυγώνων εἶνε γνωσταὶ ἐκ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου, ἣν παριστῶ διὰ τοῦ α, εἶνε δὲ κατὰ σειρὰν αἱ ἑξῆς

$$\alpha\sqrt{3}, \quad \alpha\sqrt{2} \quad \text{καὶ} \quad \alpha.$$

Ἑπομένως τὰ ἐμβαδὰ αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν πλευρῶν των κατὰ τοὺς προηγουμένους τύπους καὶ εἶνε

$$\text{ἐγγ. τρίγ.} = \frac{3}{4}\alpha^2\sqrt{3}, \quad \text{ἐγγ. τετρ.} = 2\alpha^2, \quad \text{ἐγγ. ἑξάγ. καν.} = \frac{3}{2}\alpha^2\sqrt{3}$$

καὶ ἐπειδὴ ἐδόθη $\alpha=3$ εὑρίσκομεν (*)

$$\text{ἐγγ. τρίγ.} = 11,69134..., \quad \text{ἐγγ. τετρ.} = 18,$$
$$\text{ἐγγ. ἑξάγ. καν.} = 32,38268...$$

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος (τοῦ μικροτέρου τοῦ ἡμικυκλίου), οὗτινος ἡ χορδὴ εἶνε ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ κύκλου.

Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ εἰρημένου τμήματος εἶνε τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς διαφορᾶς τοῦ κύκλου ἀπὸ τοῦ κανονικοῦ ἐγγεγραμμένου ἑξαγώνου· ἑπομένως τὸ ἐμβαδόν του εἶνε

$$\frac{1}{6}\left(\pi\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha^2\sqrt{3}\right), \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\alpha^2}{6}\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), \text{ περίπου } \frac{9}{100}\alpha^2.$$

7) Κύκλου τινὸς ἡ ἀκτὶς εἶνε 7 πήχεις· ποία εἶνε ἡ ἀκτὶς τοῦ διπλασίου κύκλου κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν; (Ἀπ. $7\sqrt{2}$, ἤτοι 9,89949...)

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τῆς τιμῆς τῆς ζητουμένης ἀκτῖνος βλέπομεν, ὅτι αὕτη εἶνε ἴση μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου, ὅπερ ἔχει πλευρὰν τὴν ἀκτῖνα τοῦ δοθέντος κύκλου (174)· ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἀκτὶς δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ γεωμετρικῶς ἄνευ τῆς παρεμβάσεως τῶν ἀριθμῶν.

(*) Αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 2 μέχρις 100 εὑρίσκονται ἐν τοῖς λογαριθμικοῖς πίναξι τοῦ Dupuis ἐν σελ. 147.

8) Εἰς κύκλον ἔχοντα ἀκτῖνα 12 πήχεις πόσον εἶνε τὸ τόξον τῶν 75^0;

Ἂν παρασταθῇ διὰ τοῦ α ἡ ἀκτίς, ἡ περιφέρεια ἔχει μῆκος 2πα καὶ τὸ τόξον μιᾶς μοίρας εἶνε

$\frac{2\pi\alpha}{360}$ ἢ $\frac{\pi\alpha}{180}$ καὶ τὸ τόξον μ μοιρῶν εἶνε $\frac{\pi\alpha\mu}{180}$

Ἐκ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τοῦ ζητουμένου τόξου ἴσον μὲ 15πχ, 70796...

9) Εἰς κύκλον ἔχοντα ἀκτῖνα 20 πήχεις πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως, οὗ ἡ γωνία εἶνε 15^0;

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τομέως, οὗ ἡ γωνία εἶνε μ μοιρῶν, δίδεται (281) ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{\pi\alpha\mu}{180}\ \frac{1}{2}\alpha$ ἤτοι $\frac{\pi.\alpha^2.\mu.}{360}$

ἐκ δὲ τοῦ τύπου τούτου εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν ἴσον μὲ 52τπ,3598...

10) Εὑρεῖν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὑπὸ δύο περιφερειῶν περιεχομένης ἐπιπέδου ἐπιφανείας, ὅταν ἡ μία τούτων κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης.

Ἡ εἰρημένη ἐπιφάνεια εἶνε διαφορὰ τῶν κύκλων, ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶνε $\pi\alpha^2 - \pi\beta^2$ ἤτοι $\pi(\alpha^2-\beta^2)$ (α εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς μεγαλητέρας καὶ β ἡ ἀκτὶς τῆς μικροτέρας).

Ἐὰν π. χ. εἶνε $\alpha=4$ καὶ $\beta=3{,}5$, τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶνε 3,74π, ἤτοι 11τπ, 780972...

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν κύκλον ἔχοντα ἐπιφάνειαν ἴσην τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν δύο περιφερειῶν, ἤτοι ἴσην τῇ διαφορᾷ τῶν δύο κύκλων. Ἀρκεῖ τῷ ὄντι ἡ ἀκτὶς χ τοῦ κύκλου τούτου νὰ ἐπαληθεύῃ τὴν ἐξίσωσιν $\pi\chi^2=\pi(\alpha^2-\beta^2)$, ἤτοι τὴν $\chi^2=\alpha^2-\beta^2$· ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι ἡ ἀκτὶς χ εἶνε τρίτη πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, ὅπερ ἔχει ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα α καὶ μίαν πλευρὰν τὴν β· τὸ τρίγωνον δὲ τοῦτο κατασκευάζεται εὐκόλως ἐκ τῶν γνωστῶν πλευρῶν του α καὶ β (202). Ὁμοίως κατασκευάζεται καὶ κύκλος ἔχων ἐπιφάνειαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν δύο ἄλλων δοθέντων κύκλων.

11) Πόσων μοιρῶν εἶνε ἡ γωνία, ἥτις παρίσταται (290) διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 1;

Αἱ μοῖραι μ οἱασδήποτε γωνίας καὶ ὁ ἀριθμὸς θ, ὅστις παριστᾷ αὐτήν, συνδέονται διὰ τῆς ἰσότητος

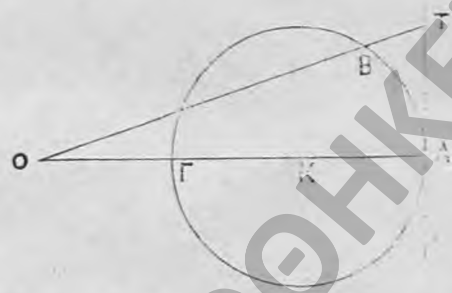
$$\theta=\frac{\pi\mu}{180} \quad \text{ἢ} \quad \mu=\frac{180}{\pi}\theta,$$

ἐξ ἧς ὑποθέτοντες $\theta=1$, εὑρίσκομεν $\mu=57^0\ 17',\ 48''$.

ΠΡΑΚΤΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

1) **Ἀνάπτυγμα τόξου** (κατὰ προσέγγισιν).

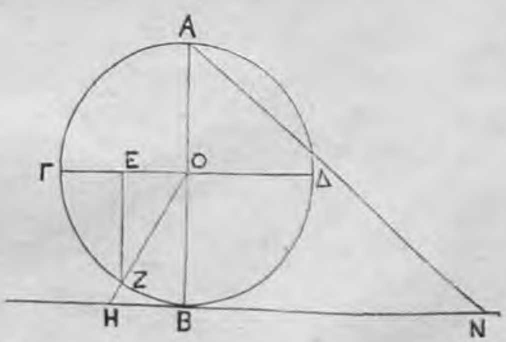
Ἔστω ΑΒ τόξον τι, οὗτινος ζητεῖται νὰ εὕρωμεν τὸ ἀνάπτυγμα.



Ἐκ τοῦ ἑνὸς ἄκρου Α ἄγομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΤ καὶ τὴν διάμετρον ΑΓ, τὴν ὁποίαν προσεκβάλλομεν καὶ λαμβάνομεν ΓΟ ἴσον τῇ ἀκτῖνι ΚΓ· ὥστε ἡ ΟΑ εἶνε τριπλασία τῆς ἀκτῖνος· ἔπειτα ἄγομεν ἐκ τοῦ σημείου Ο εἰς τὸ ἄλλο ἄκρον Β τοῦ τόξου ΑΒ τὴν εὐθεῖαν ΟΒ, ἥτις ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Τ· τὸ τμῆμα ΑΤ εἶνε τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου ΑΒ μὲ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλητέραν, ὅσῳ μικρότερον εἶνε τὸ τόξον. (Ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἐὰν τὸ τόξον ΑΒ εἶνε μικρότερον τῶν 30^0, τὸ λάθος, τὸ ὁποῖον κάμνομεν λαμβάνοντες ὡς ἀνάπτυγμα αὐτοῦ τὸ ΑΤ, εἶνε μικρότερον τοῦ $\frac{1}{4000}$ τῆς ἀκτῖνος).

2) **Ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας** (κατὰ προσέγγισιν).

Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἡμιπεριφερείας (κατὰ προσέγγισιν), ἄγομεν τὰς διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ καθέτους πρὸς ἀλλήλας καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Β· ἔπειτα ἐκ τοῦ μέσου Ε τῆς ἀκτῖνος ΟΓ ἄγομεν τὴν ΕΖ παράλληλον τῇ ΑΒ· καὶ διὰ τοῦ Ζ τὴν εὐθεῖαν ΟΖΗ. Ἐκ τοῦ σημείου Η ἀρχόμενοι λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης τὸ τμῆμα ΗΝ τριπλάσιον τῆς ἀκτῖνος· τέλος ἄγομεν τὴν ΑΝ, ἥτις εἶνε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ἡμιπεριφερείας μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{100000}$ τῆς ἀκτῖνος.



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Δ' ΒΙΒΛΙΟΥ

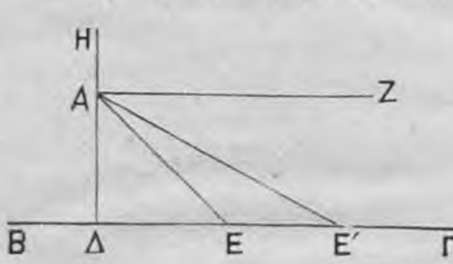
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

291. *Μεταβλητὸν ποσὸν* λέγεται τὸ διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις λαμβάνον. Οἷον ἡ ἐκ σημείου ἐπὶ εὐθεῖαν ἀγομένη εὐθεῖα εἶνε μεταβλητή· τὸ εἰς κύκλον ἐγγραφόμενον πολύγωνον εἶνε μεταβλητόν, καὶ τὸ περιγραφόμενον ἐπίσης· τὸ τόξον τοῦ κύκλου εἶνε μεταβλητόν, κτλ. *Σταθερὸν* δὲ λέγεται τὸ ποσόν, ὅπερ μένει ἀμετάβλητον, ἐνῷ ἄλλα, μεθ' ὧν ἔχει σχέσιν τινά, μεταβάλλονται. Οἷον ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου εἶνε σταθερά· ἡ γωνία ἡ εἰς τμῆμα κύκλου ἐγγραφομένη εἶνε σταθερά, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τριγώνου εἶνε σταθερόν, κτλ.

292. *Ὅριον* μεταβλητοῦ ποσοῦ λέγεται σταθερόν τι ὡρισμένον ποσόν, ἐὰν ἡ διαφορὰ τοῦ μεταβλητοῦ ἀπὸ τοῦ σταθεροῦ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης ποσότητος, μένῃ δὲ τοιαύτη καὶ διὰ πάσας τὰς τιμάς, τὰς ὁποίας ἔπειτα λαμβάνει τὸ μεταβλητόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ον) Ἐκ τοῦ σημείου Α ἔστω κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΒΓ ἡ ΑΔ, πλαγία δὲ ἡ ΑΕ· ἡ γωνία τῆς πλαγίας πρὸς τὴν κάθετον εἶνε μεταβλητὴ καὶ αὐξάνει, ὅταν τὸ σημεῖον Ε προχωρῇ ἐπὶ τῆς ΒΓ, προσεγγίζει δὲ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον εἰς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΔΑΖ. Ἡ



δὲ διαφορὰ τῆς μεταβλητῆς ταύτης γωνίας ἀπὸ τῆς σταθερᾶς ΔΑΖ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα πάσης δοθείσης γωνίας, ὅταν τὸ σημεῖον Ε, ὁ πούς τῆς πλαγίας, ἐφ' ἱκανὸν προχωρήσῃ. Διότι πᾶσα ἐκ τοῦ Α ἀγομένη εὐθεῖα, ὁσονδήποτε μικρὰν γωνίαν ε καὶ ἂν σχηματίζῃ πρὸς τὴν ΑΖ, θὰ τέμνῃ τὴν ΒΓ εἴς τι σημεῖον. Ὅταν δὲ τὸ Ε φθάσῃ καὶ ὑπερβῇ τὸ σημεῖον ἐκεῖνο, ἡ διαφορὰ τῆς μεταβλητῆς γωνίας ΔΑΕ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς ΔΑΖ γίνεται καὶ μένει μικροτέρα τῆς γωνίας ε. Ἐπομένως *κατὰ τὸν δοθέντα ὁρισμὸν ἡ μεταβλητὴ γωνία τῆς καθέτου καὶ τῆς πλαγίας ἔχει ὅριον τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΔΑΖ.*

Καὶ ἡ μεταβλητὴ γωνία ΗΑΕ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν προσεκβολὴν τῆς καθέτου ἔχει ὅριον τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΗΑΖ, εἰς τὸ ὁποῖον προσεγγίζει ἐλαττουμένη.

2ον) *Ἡ εἰς δοθὲν τόξον ἐγγραφομένη τεθλασμένη γραμμὴ εἶνε μεταβλητὴ τὸ μέγεθος· ἔχει δὲ ὅριον τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ τόξου, καθ'ὅσον αἱ πλευραὶ αὐτῆς ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον σμικρύνωνται. Τὸ αὐτὸ δὲ ὅριον ἔχει καὶ ἡ περιγραφομένη.*

Διότι ἡ διαφορὰ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ τόξου ἀπὸ τῆς ἐγγεγραμμένης εἶνε μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῆς ἐγγεγραμμένης ἀπὸ τῆς ἀντιστοιχούσης περιγεγραμμένης· αὕτη δὲ ἡ διαφορά, ὡς ἐν τῷ ἐδαφίῳ 278 ἀπεδείχθη, γίνεται μικροτέρα πάσης δοθείσης εὐθείας, ὅταν τὸ τόξον διαιρεθῇ εἰς ἱκανῶς μικρὰ μέρη· μένει δὲ τοιαύτη, καὶ ὅταν διαιρεθῇ εἰς ἔτι μικρότερα.

3ον) *Ὁ κυκλικὸς τομεὺς εἶνε τὸ ὅριον τῶν εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένων πολυγώνων. Ὁ αὐτὸς δὲ εἶνε ὅριον καὶ τῶν περιγραφομένων.*

Διότι ἡ διαφορὰ τοῦ τομέως ἀπὸ τοῦ ἐγγραφομένου πολυγώνου εἶνε μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος περιγεγραμμένου· ἡ δὲ διαφορὰ αὕτη, ὡς ἀπεδείχθη ἐν τῷ ἐδαφίῳ 281, γίνεται μικροτέρα πάσης ἐπιφανείας, ὅταν τὸ τόξον διαιρεθῇ εἰς μέρη ἱκανῶς μικρά· μένει δὲ τοιαύτη, καὶ ὅταν διαιρεθῇ εἰς ἔτι μικρότερα.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

293. *Τὸ ἄθροισμα μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια ἔχει ὅριον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Ἔστωσαν μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ (οἷοι εἶνε οἱ παριστῶντες τὰς διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις μεταβλητοῦ τινος ποσοῦ) οἱ α, β, γ· ὅρια δὲ αὐτῶν οἱ Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι ὅριον τοῦ ἀθροίσματος $\alpha+\beta+\gamma$ θὰ εἶνε τὸ ἄθροισμα $A+B+\Gamma$.

Διότι ἡ διαφορὰ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ $A+B+\Gamma$ ἀπὸ τοῦ μεταβλητοῦ $\alpha+\beta+\gamma$ εἶνε

$$A+B+\Gamma-(\alpha+\beta+\gamma),$$

$$\text{ἢ } (A-\alpha)+(B-\beta)+(\Gamma-\gamma)\cdot$$

γίνεται δὲ ἡ διαφορὰ αὕτη μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ καὶ μένει ἔπειτα τοιαύτη διὰ τὰς ἑπομένας τιμὰς τοῦ μεταβλητοῦ $\alpha+\beta+\gamma$· Διότι, ἂν θέλωμεν νὰ γίνῃ μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{\nu}$, ἀρκεῖ ἑκάστη τῶν διαφορῶν $(A-\alpha)$, $(B-\beta)$, $(\Gamma-\gamma)$ νὰ γίνῃ καὶ νὰ μένῃ μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{3\nu}$ (ὅπερ ἐξ ὑποθέσεως γίνεται). Ἐκ τούτου συνάγεται, ὅτι εἶνε

$$\text{ορ}\ (\alpha+\beta+\gamma)=A+B+\Gamma.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Ἡ διαφορὰ δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον τὴν διαφορὰν τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

294. Τὸ γινόμενον μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον δύο μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β ἔχοντες ὅρια τοὺς A καὶ B· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε $\text{ορ}\ (\alpha.\beta)=A.B=(\text{ορ}\ \alpha).\ (\text{ορ}\ \beta)$.

Διότι, ἂν παραστήσωμεν τὰς διαφορὰς $\alpha-A$ καὶ $\beta-B$ διὰ τῶν ε καὶ η, θὰ εἶνε

$$\alpha-A=\varepsilon, \qquad \beta-B=\eta,$$

ὅθεν

$$\alpha=A+\varepsilon, \qquad \beta=B+\eta,$$

ἐξ ὧν πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\alpha\beta=AB+A\eta+B\varepsilon+\varepsilon\eta$$

ἢ

$$\alpha\beta-AB=A\eta+B\varepsilon+\varepsilon\eta$$

Ἐκ τούτου βλέπομεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ $A.B$ ἀπὸ τοῦ μεταβλητοῦ $\alpha.\beta$ θὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ $\frac{1}{\nu}$, ἂν ἕκαστος τῶν τριῶν ἀριθμῶν $A\eta$, $B\varepsilon$, $\eta\varepsilon$ γίνῃ μικρότερος τοῦ $\frac{1}{3\nu}$· τοῦτο δὲ θὰ γίνῃ ὅταν αἱ διαφοραὶ ε καὶ η γίνωσι μικρότεραι τοῦ $\frac{1}{3K\nu}$ (ἔνθα K δηλοῖ ἀκέραιον ἀριθμὸν μεγαλήτερον τῶν A, B)· γίνεται δὲ τοῦτο, διότι ἐξ ὑποθέσεως, αἱ διαφοραὶ ε καὶ η γίνονται καὶ μένουσι μικρότεραι παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ.

Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι εἶνε $\text{ορ}\ (\alpha.\beta)=A.B$.

Ἔστωσαν νῦν τρεῖς ἀριθμοὶ α. β, γ· ἐὰν θέσωμεν $\beta.\gamma=\delta$, θὰ εἶνε

$$\alpha\beta.\gamma=\alpha.\delta,$$

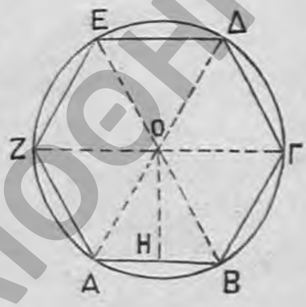
$$\text{ὅθεν ορ}\ (\alpha\ \beta.\gamma)=\text{ορ}\ (\alpha.\delta)=(\text{ορ}\ \alpha)\ (\text{ορ}\ \delta)=(\text{ορ}\ \alpha)\ (\text{ορ}\ \beta.\gamma)=$$
$$=(\text{ορ}\ \alpha).\ (\text{ορ}\ \beta).\ (\text{ορ}\ \gamma).$$

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ ἐπὶ περισσοτέρων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

295. Διὰ τῆς θεωρίας τῶν ὁρίων εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰς σχέσεις, αἵτινες περιέχουσι τὰ μεγέθη καμπυλογράμμων σχημάτων, θεωροῦντες τὰ καμπυλόγραμμα σχήματα ὡς ὅρια τῶν εἰς αὐτὰ ἐγγραφομένων εὐθυγράμμων.

Ἵνα, παραδείγματος χάριν, ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου Κ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος, θεωροῦμεν αὐτὸν ὡς ὅριον τῶν εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένων κανονικῶν πολυγώνων (ὅτε καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶνε ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῶν ἐγγραφομένων πολυγώνων)· ἔστω ἓν ἐξ αὐτῶν τὸ ΑΒΓΔΕΖ· τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶνε (ἐὰν διὰ τοῦ υ παραστήσωμεν τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ)



$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}.\upsilon+\frac{1}{2}\mathrm{B\Gamma}.\upsilon+\frac{1}{2}\Gamma\Delta.\upsilon+\frac{1}{2}\Delta\mathrm{E}.\upsilon+\frac{1}{2}\mathrm{EZ}.\upsilon+\frac{1}{2}\mathrm{ZA}.\upsilon,$$

ἢ

$$\frac{1}{2}\upsilon(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\Gamma\Delta+\Delta\mathrm{E}+\mathrm{EZ}+\mathrm{ZA}).$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε ἐμβαδὸν Κ=ορ. ἐμβ. ΑΒΓΔΕΖ, ἕπεται

$$\text{ἐμβ.}\,\mathrm{K}=\text{ορ}\frac{1}{2}\upsilon(\mathrm{AB}+\mathrm{B\Gamma}+\Gamma\Delta+\Delta\mathrm{E}+\mathrm{EZ}+\mathrm{ZA}).$$

Ἀλλ' ἡ μὲν περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ἔχει ὅριον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας Γ, τὸ δὲ ἀπόστημα υ ἔχει ὅριον τὴν ἀκτῖνα α (διότι ἡ διαφορὰ α—υ εἶνε (92) μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου). Ἐντεῦθεν συνάγεται

$$\text{ἐμβαδ.}\,\mathrm{K}=\frac{1}{2}\alpha.\Gamma.$$

Ὁμοίως, ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 283, ἐγγράφομεν εἰς τοὺς κύκλους δύο τυχόντα πολύγωνα, ὡς ἐν τῷ ἐδαφίῳ ἐκείνῳ ἐρρήθη, ὅτε ἔχομεν

$$\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\alpha}{\mathrm{A}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\varepsilon}{\mathrm{E}}=\frac{\alpha^2}{\mathrm{A}^2}$$

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$\sigma=\frac{\alpha}{\mathrm{A}}.\Sigma \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon=\frac{\alpha^2}{\mathrm{A}^2}\mathrm{E}.$$

λαμβάνοντες δὲ τὰ ὅρια ἀμφοτέρων τῶν μελῶν, εὑρίσκομεν

$$\gamma = \frac{\alpha}{A}.\Gamma \quad \text{καὶ} \quad \varkappa = \frac{\alpha^2}{A^2}K,$$

ἐξ ὧν καὶ $$\frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\alpha}{A}, \qquad \frac{\varkappa}{K} = \frac{\alpha^2}{A^2}.$$

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Α΄) ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1) Τὸ σχῆμα, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶνε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τυχόντος τετραπλεύρου, εἶνε παραλληλόγραμμον.

2) Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς τραπεζίου εἶνε γινόμενον τῆς μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἄλλης.

3) Ἐν παντὶ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ὑπερβαίνει τὴν ὑποτείνουσαν κατὰ τὴν διάμετρον τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου.

4) Ἐὰν ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ληφθῇ τυχὸν σημεῖον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου εἶνε πάντοτε τὸ αὐτό.

5) Ἡ ἐπιφάνεια, ἡ μεταξὺ δύο ὁμοκέντρων κύκλων περιλαμβανομένη, εἶνε ἰσοδύναμος κύκλῳ, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐφαπτομένην τῆς μικροτέρας περιφερείας, τὴν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἄλλης ἠγμένην.

6) Ἐὰν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ὡς ἐπὶ διαμέτρου γραφῇ ἡμικύκλιον περιέχον αὐτὸ καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἡμικύκλια ἐκτὸς τοῦ τριγώνου, τὰ μέρη τῶν ἡμικυκλίων τούτων τὰ ἐκτὸς τοῦ πρώτου κείμενα (ἅτινα λέγονται *μηνίσκοι* τοῦ Ἱπποκράτους) ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ τρίγωνον.

7) Ἐὰν εἰς ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον περιγραφῇ κύκλος καὶ ἔπειτα μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ἀκτῖνα μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν γραφῇ ἕτερος κύκλος, τὸ ἐκτὸς τούτου κείμενον μέρος τοῦ πρώτου εἶνε ἰσοδύναμον τῷ τριγώνῳ.

8) Ἐὰν περιφέρεια ἔχῃ κέντρον τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων παραλληλογράμμου, τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων παντὸς σημείου αὐτῆς ἀπὸ

τῶν τεσσάρων κορυφῶν τοῦ παραλληλογράμμου ἔχουσιν ἄθροισμα τὸ αὐτὸ πάντοτε.

9) Αἱ διάμεσοι παντὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον.

10) Ἐὰν διὰ δύο δοθέντων σημείων A, B διέρχωνται περιφέρειαι τέμνουσαι δοθέντα κύκλον, αἱ κοιναὶ χορδαὶ τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τῶν τεμνόντων αὐτὸν διέρχονται πᾶσαι δι' ἑνὸς σημείου τῆς AB. Διὰ τοῦ αὐτοῦ δὲ σημείου διέρχεται καὶ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τοῦ διὰ τῶν σημείων A, B διερχομένου καὶ ἐφαπτομένου τοῦ δοθέντος.

11) Δοθέντων δύο κύκλων, αἱ τὰ ἄκρα δύο παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων ἀκτίνων ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι τέμνουσι τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν πᾶσαι εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ὡσαύτως καὶ αἱ ἐπιζευγνύουσαι τὰ ἄκρα δύο παραλλήλων καὶ ἀντιρρόπων ἀκτίνων. Λέγονται δὲ τὰ σημεῖα ταῦτα *κέντρα ὁμοιότητος* τῶν δύο κύκλων· καὶ τὸ μὲν πρῶτον λέγεται *ἐκτός*, τὸ δὲ δεύτερον *ἐντός*· δι' αὐτῶν δὲ διέρχονται καὶ αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι τῶν δύο κύκλων.

12) Εἰς πᾶν τρίγωνον τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων καὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ πρώτου ἀπὸ τοῦ δευτέρου εἶνε διπλασία τῆς ἀποστάσεως τοῦ δευτέρου ἀπὸ τοῦ τρίτου.

13) Ἐὰν τρίγωνον εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, οἱ τρεῖς πόδες τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἀπὸ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

14) Ἐκ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγεγραμμένων τριγώνων μέγιστον κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν εἶνε τὸ ἰσόπλευρον.... καὶ ἐκ τῶν περιγεγραμμένων ἐλάχιστον εἶνε πάλιν τὸ ἰσόπλευρον.

15) Εἰς πᾶν τετράπλευρον οἱ τέσσαρες κύκλοι, οἵτινες ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν λαμβανομένων ἀνὰ τρεῖς, ἔχουσι τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπὶ μιᾶς περιφερείας.

16) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς γωνίας τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τετραπλεύρου εἶνε κάθετοι πρὸς ἀλλήλας.

17) Αἱ διχοτομοῦσαι τὰς τέσσαρας γωνίας παντὸς τετραπλεύρου σχηματίζουσι τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

18) Νὰ δειχθῇ, ὅτι, ἐὰν δύο διάμεσοι τριγώνου εἶνε ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶνε ἰσοσκελές.

19) Ἐκ δύο τόξων ἐχόντων ἴσας χορδὰς (καὶ μικροτέρων ἡμιπεριφερείας) μεγαλήτερον εἶνε τὸ ἔχον τὴν μικροτέραν ἀκτῖνα.

20) Ἐὰν ἡ βάσις ἡμικυκλίου διαιρεθῇ ὁπωσδήποτε εἰς δύο μέρη καὶ ἐπὶ τῶν μερῶν τούτων γραφῶσιν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ πρώτου κείμενα τὸ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν αὐτῶν ὑπολειπόμενον μέρος τοῦ ἡμικυκλίου ἰσοῦται κύκλῳ ἔχοντι διάμετρον τὴν ἐκ τοῦ σημείου τῆς διαιρέσεως ὑψουμένην κάθετον μέχρι τῆς περιφερείας.

Β') ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΠΡΟΣ ΕΥΡΕΣΙΝ

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος

1) τῶν σημείων, ὧν τὰ ἀποστήματα ἀπὸ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἔχουσι λόγον δοθέντα μ : ν.

2) τῶν σημείων, ἀφ' ὧν δύο δοθέντες κύκλοι φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας (τουτέστιν αἱ ἐξ αὐτῶν ἀγόμεναι δύο ἐφαπτόμεναι ἑκατέρου τῶν κύκλων νὰ σχηματίζωσιν ἴσας γωνίας).

3) τῶν σημείων, ὧν τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων ἔχουσιν ἄθροισμα ἢ διαφορὰν ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

4) τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἵτινες ἀπὸ δύο δοθέντων σημείων φαίνονται ὑπὸ γωνίας δοθείσας.

5) τῶν σημείων, ἀπὸ τῶν ὁποίων αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι εἰς δύο δεδομένας περιφερείας εἶνε ἴσαι.

Γ') ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΛΥΣΙΝ

1) Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας, ἢ τῆς δοθείσης περιφερείας.

2) Νὰ γραφῇ κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ δοθέντος σημείου καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς κύκλου, ἢ δύο κύκλων.

3) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, οὗτινος δίδονται ἡ βάσις, ἡ ἀπέναντι γωνία καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

4) Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τῶν δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἢ ἐφαπτόμενος τῆς δοθείσης εὐθείας καὶ τῶν δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

5) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τρεῖς διάμεσοι.

6) Ἐν τῷ δοθέντι τριγώνῳ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον, ἀφ' οὗ αἱ εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ ἀγόμεναι εὐθεῖαι νὰ διαιρῶσιν αὐτὸ εἰς τρία τρίγωνα ἰσοδύναμα, ἢ σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν πλευρῶν νὰ ἔχωσι λόγους δοθέντας.

7) Νὰ κατασκευασθῇ πολύγωνον ὅμοιον τῷ δοθέντι πολυγώνῳ καὶ ἔχον περίμετρον ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

8) Δοθέντων δύο ὁμοίων πολυγώνων νὰ κατασκευασθῇ ἄλλο ὅμοιον αὐτοῖς καὶ τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια νὰ εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο δοθέντων.

9) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

10) Νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τοῦ δοθέντος κύκλου ἐντὸς καὶ διαιρῶν τὴν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον δοθέντα μ: ν.

11) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα διαιροῦσα τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο μέρη ἔχοντα τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν 13 καὶ 17.

12) Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ βάσεις καὶ αἱ διαγώνιοι.

13) Ἐκ τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα οὕτως, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν ἀπολαμβανόμενον μέρος αὐτῆς νὰ εἶνε ἴσον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.

14) Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ἴσον τῷ δοθέντι τριγώνῳ καὶ ἐγγεγραμμένον εἰς δοθὲν τρίγωνον, ἢ περιγεγραμμένον περὶ δοθὲν τρίγωνον. (*ἐγγεγραμμένον* λέγεται τρίγωνον εἰς ἄλλο, ὅταν αἱ κορυφαὶ αὐτοῦ κεῖνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ ἄλλου, ἑκάστη ἐφ' ἑκάστης· τοῦτο δὲ λέγεται *περιγεγραμμένον* περὶ τὸ πρῶτον).

15) Ἐκ τῶν εἰς τὸ αὐτὸ τρίγωνον περιγεγραμμένων τριγώνων, ἅτινα εἶνε ὅμοια πρὸς δοθὲν τρίγωνον, νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον.

16) Εἰς τὸ δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον νὰ ἐγγραφῶσι τρεῖς κύκλοι, ὧν ἕκαστος νὰ ἐφάπτηται δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου καὶ τῶν δύο ἄλλων κύκλων. Νὰ δειχθῇ, ὅτι οἱ τρεῖς οὗτοι κύκλοι θὰ εἶνε ἴσοι.

17) Νὰ ἐγγραφῇ κύκλος εἰς τὸν δοθέντα τομέα.

18) Ἐὰν ἐπὶ τῶν ἀκτίνων, ἐξ ὧν σύγκειται ἡ διάμετρος ἡμικυκλίου τινός, γραφῶσιν ἡμικύκλια ἐντὸς τοῦ ἄλλου, ζητεῖται νὰ γραφῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν τριῶν τούτων ἡμικυκλίων.

17) Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς τρία μέρη τοιαῦτα, ὥστε ἐξ αὐτῶν νὰ συνιστᾶται τρίγωνον ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

20) Ἐὰν μία τῶν κορυφῶν τριγώνου κινῆται ἐπὶ εὐθείας δοθείσης, αἱ δὲ δύο ἄλλαι μένωσιν ἀκίνητοι, εἰς ποίαν θέσιν γίνεται μεγίστη ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ταύτης;

21) Νὰ διαιρεθῇ ἡ ὀρθὴ γωνία εἰς τρία ἴσα μέρη.

22) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς ἴσα μέρη δι' εὐθειῶν παραλλήλων μιᾷ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΕΙΣ ΤΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

Πᾶσα σχέσις μεταξὺ γεωμετρικῶν μεγεθῶν τρέπεται εἰς σχέσιν ἀριθμῶν, ὅταν τὰ μεγέθη μετρηθῶσι μέ τινα μονάδα.

Οἱ ἐκ τῆς καταμετρήσεως τῶν γεωμετρικῶν μεγεθῶν προκύπτοντες ἀριθμοὶ ἐξαρτῶνται προδήλως ἐκ τῆς μονάδος, μὲ τὴν ὁποίαν μετροῦμεν· ἐπειδὴ δὲ συνήθως ἀφίνομεν τὴν μονάδα ἀόριστον, διὰ τοῦτο παριστῶμεν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου.

Καὶ ἑκάστη μὲν εὐθεῖα γραμμὴ παρίσταται τότε δι' ἑνὸς γράμματος, καὶ ἕκαστον τόξον κύκλου ὁμοίως· διότι ἡ περιφέρεια ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα α παρίσταται ὑπὸ τοῦ $2\pi\alpha$, ἔνθα ὁ π εἶνε ὁ γνωστὸς ἀριθμὸς 3,14159....

Ἑκάστη δὲ ἐπιφάνεια παρίσταται διὰ τοῦ γινομένου δύο γραμμάτων, τὰ ὁποῖα εἶνε ἡ βάσις, καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτὴν ὀρθογωνίου.

Ἀφοῦ δὲ παραστήσωμεν τοιουτοτρόπως τὰ γεωμετρικὰ μεγέθη διὰ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου καὶ ἐκφράσωμεν τὰς μεταξὺ αὐτῶν ὑπαρχούσας σχέσεις ἰσότητος ἢ ἀνισότητος, ἐφαρμόζομεν ἐπ' αὐτῶν τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμὸν καὶ μετασχηματίζομεν αὐτὰς εἰς ἄλλας χρησιμωτέρας πρὸς τὴν λύσιν τοῦ ζητήματος, ὅπερ ἑκάστοτε ἐξετάζομεν. Τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἂς παριστῶνται διὰ τῶν ἀριθμῶν α (ἢ ΒΓ), β (ἢ ΑΓ) καὶ γ (ἢ ΑΒ)· ζητεῖται ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου.

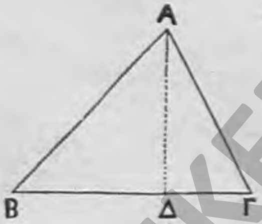
Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἂς ἀχθῇ τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου· τότε εἶνε

$$E=\frac{1}{2}\alpha.(A\Delta).$$

Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΓΔ εὑρίσκομεν

$$(A\Delta)^2=\beta^2-(\Gamma\Delta)^2, \text{ ἢ } A\Delta=\sqrt{\beta^2-(\Gamma\Delta)^2}.$$

ὅθεν $$E = \frac{1}{2}\,\alpha\sqrt{\beta^2-(\Delta\Gamma)^2}. \quad (\iota)$$



Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου (211) ἔχομεν τὴν ἰσότητα $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\,(\Delta\Gamma)$, ἐξ ἧς $$\Delta\Gamma=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha}.$$
καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (ι) τὴν ΓΔ διὰ τῆς τιμῆς αὐτῆς, εὑρίσκομεν

$$E=\frac{1}{2}.\alpha\sqrt{\beta^2-\frac{(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}{4\alpha^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}.$$

Τὸ ὑπόρριζον, ὡς διαφορὰ δύο τετραγώνων, ἀναλύεται εἰς τοὺς παράγοντας

$$2\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2, \qquad 2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2\cdot$$

τούτων δὲ ὁ μὲν πρῶτος γράφεται ὡς ἑξῆς $(\alpha+\beta)^2-\gamma^2$ καὶ ἀναλύεται ἑπομένως εἰς τοὺς δύο παράγοντας

$$(\alpha+\beta+\gamma) \qquad (\alpha+\beta-\gamma),$$

ὁ δὲ δεύτερος γράφεται ὡς ἕπεται: $\gamma^2-(\alpha-\beta)^2$ καὶ ἀναλύεται εἰς τοὺς δύο παράγοντας $-\alpha+\beta+\gamma \qquad \alpha-\beta+\gamma$

ἑπομένως τὸ ὑπόρριζον ἀναλύεται εἰς γινόμενον τεσσάρων παραγόντων καὶ εἶνε

$$E=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}$$

Ὁ τύπος οὗτος εἶνε κατάλληλος εἰς τὸν διὰ τῶν λογαρίθμων λογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ, εἶνε δὲ πάντες οἱ παράγοντες τοῦ ὑπορρίζου θετικοί, διότι ἑκάστη πλευρὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Ὡς παράδειγμα ἔστω τὸ ἑξῆς,

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, οὗτινος αἱ πλευραὶ εἶνε 12$^{\text{πλ}}$,5, 15$^{\text{πλ}}$,25 καὶ 23$^{\text{πλ}}$,75.

Κατὰ πρῶτον εἶνε

$$\alpha+\beta+\gamma=51,5$$
$$-\alpha+\beta+\gamma=26,5$$
$$\alpha-\beta+\gamma=21$$
$$\alpha+\beta-\gamma=4,$$

ὅθεν ὁ γενικὸς τύπος γίνεται

$$E=\frac{1}{4}\sqrt{(51,5)(26,5)21.4.}$$

(*) Ὁ τύπος οὗτος εὑρίσκεται ἐν τῷ ***Περὶ διόπτρας*** συγγράμματι τοῦ Ἥρωνος.

ὅθεν $λογ\,(4Ε)=\frac{1}{2}\left\{λογ\,(51,5)+λογ\,(26,5)+λογ21+λογ\,4\right\}$.

$$\begin{array}{rl} λογ\ 51,5 & =1,71181 \\ λογ\ 26,5 & =1,42325 \\ λογ\ 21 & =1,32222 \\ λογ\ 4 & =0,60206 \\ \hline ἄθρ. & \ 5,05934 \end{array}$$

ἥμισυ ἄθρ. $2,52967=λογ(4Ε)$,
ὅθεν $4Ε=338,58\ldots$
καὶ $Ε=84$ πχ ,64...

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὅταν μεταβάλλωνται μὲν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ἀλλ' ἡ περίμετρος αὐτοῦ μένῃ σταθερά, ὁ μὲν πρῶτος παράγων τοῦ ὑπορρίζου μένει σταθερός, οἱ δὲ ἄλλοι μεταβάλλονται, ἔχουσιν ὅμως ἄθροισμα σταθερὸν $α+β+γ$. Ἐπειδὴ δὲ ἐν τῇ ἀλγέβρᾳ ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶν γινόμενον, οὗ οἱ παράγοντες ἔχουσι σταθερὸν ἄθροισμα, γίνεται μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντές του γίνωσιν ἴσοι συνάγεται τὸ θεώρημα·

Ἐκ πάντων τῶν ἴσην περίμετρον ἐχόντων τριγώνων μέγιστον εἶνε τὸ ἰσόπλευρον.

Ὑπάρχουσιν ἄπειρα τρίγωνα, ὧν αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζονται δι' ἀκεραίων ἀριθμῶν· δίδονται δὲ ταῦτα ὑπὸ τῶν τύπων

$$α=λμ(ρ^2+σ^2)$$
$$β=ρσ(λ^2+μ^2) \qquad Ε=λμρσγ,$$
$$γ=λμ(ρ^2-σ^2)+ρσ(λ^2-μ^2),$$

ἐν οἷς λ,μ,ρ,σ εἶνε τυχόντες ἀκέραιοι ἀριθμοί. Τοιαῦτα τρίγωνα εἶνε τὰ ἑξῆς

(4,13,15, Ἐμβ. 24), (7,15,20, Ἐμβ. 42), (13,14,15, Ἐμβ. 84), κτλ. κτλ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

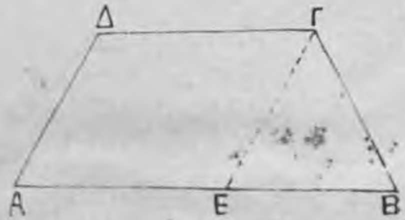
Ἔστω τραπέζιον τὸ ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ ἂς παριστῶνται κατὰ σειρὰν διὰ τῶν ἀριθμῶν $α,β,γ,δ$.

Ἐκ τοῦ Γ ἂς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΔΑ ἡ ΓΕ· τότε εἶνε $ΑΕ=ΔΓ=γ$, ἄρα $ΕΒ=α-γ$· καὶ $ΓΕ=ΔΑ=δ$, καὶ ἂν παραστήσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου διὰ τοῦ Ε, τοῦ δὲ τριγώνου ΓΕΒ διὰ τοῦ Ε', θὰ εἶνε

$$Ε=\frac{1}{2}(α+γ).υ,$$

$$Ε'=\frac{1}{2}(α-γ).υ,$$

ἔνθα υ δηλοῖ τὸ κοινὸν ὕψος αὐτῶν.



Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων ἕπεται.

$$\frac{E}{E'}=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}, \qquad \text{ὅθεν} \qquad E=\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}.E'$$

καὶ ἐπειδὴ κατὰ τὸ προηγούμενον πρόβλημα εἶνε

$$E'=\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha-\gamma+\beta+\delta)(-\alpha+\gamma+\beta+\delta)(\alpha-\gamma-\beta+\delta)(\alpha-\gamma+\beta-\delta)}$$

ἕπεται

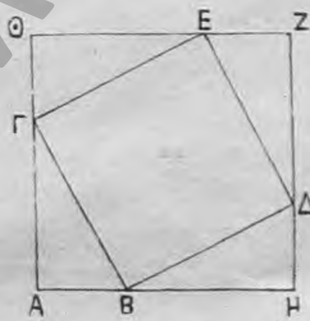
$$E=\frac{1}{4}\cdot\frac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}\sqrt{(\alpha-\gamma+\beta+\delta)(-\alpha+\gamma+\beta+\delta)(\alpha-\gamma-\beta+\delta)(\alpha-\gamma+\beta-\delta)}.$$

ΖΗΤΗΜΑ

Νὰ ἀποδειχθῇ διὰ τῶν ἐμβαδῶν τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα.

Ἔστω ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ ἂς παριστῶνται διὰ τῶν ἀριθμῶν α (ἢ ΒΓ), β (ἢ ΓΑ) καὶ γ (ἢ ΑΒ).

Ἄς κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον ΒΓΕΔ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Δ παράλληλος τῇ ΑΓ καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλος τῇ ΑΒ· αἱ παράλληλοι αὗται τέμνουσι τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΓ ἐκβαλλομένας καὶ σχηματίζεται οὕτω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΗΖΘ, ὅπερ εἶνε ὀρθογώνιον, διότι ἔχει τὴν γωνίαν Α ὀρθήν· καὶ τετράγωνον, διότι τὰ πέριξ τέσσαρα τρίγωνα εἶνε ἴσα, ὡς ὀρθογώνια καὶ ἔχοντα ἴσας ὑποτεινούσας καὶ ἴσας γωνίας· ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται ΑΒ=ΗΔ=ΖΕ=ΘΓ=γ, καὶ ΒΗ=ΔΖ=ΕΘ=ΓΑ=β· ἄρα ΑΗ=ΑΘ καὶ τὸ σχῆμα ΑΗΖΘ εἶνε τετράγωνον. Τούτου τεθέντος, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ΑΗΖΘ εἶνε $(\beta+\gamma)^2$, τοῦ δὲ τετραγώνου ΓΒΔΕ τὸ ἐμβαδὸν εἶνε α^2, ἑκάστου δὲ τῶν πέριξ τριγώνων $\frac{1}{2}\beta\gamma$· ἐπειδὴ δὲ τὸ τετράγωνον ΑΗΖΘ σύγκειται ἐκ τοῦ τετραγώνου ΓΒΔΕ καὶ ἐκ τῶν τεσσάρων ἴσων τριγώνων, ἕπεται



$$(\beta+\gamma)^2=\alpha^2+2\beta\gamma,$$

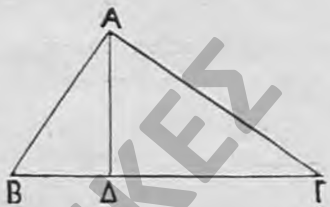
ὅθεν

$$\beta^2+\gamma^2=\alpha^2.$$

ΖΗΤΗΜΑ

Ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος νὰ ἀποδειχθῇ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 199.

Ἔστω ὀρθογώνιον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. ὀρθὴ δὲ γωνία ἡ Α· ἂς παραστήσωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ διὰ α (τῆς ΒΓ), β (τῆς ΓΑ) καὶ γ (τῆς ΑΒ), ἔτι δὲ τὸ ὕψος ΑΔ διὰ τοῦ υ καὶ τὰ δύο μέρη τῆς ὑποτεινούσης διὰ μ (τὸ ΒΔ) καὶ διὰ ν τὸ (ΔΓ).



Ἐν πρώτοις ἔχομεν ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ

$$υ^2+μ^2=γ^2,$$
$$υ^2+ν^2=β^2,$$

ὅθεν καὶ $2υ^2+μ^2+ν^2=β^2+γ^2$.

ἀλλὰ καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν

$$β^2+γ^2=α^2=(μ+ν)^2, \quad \text{διότι } α=μ+ν,$$

ὅθεν ἡ ἰσότης (1) γίνεται $2υ^2+μ^2+ν^2=(μ+ν)^2$,

ἐξ ἧς μετὰ τὰς πράξεις προκύπτει

$2υ^2=2μν$ ἢ $υ^2=μν$, τουτέστιν $(ΑΔ)^2=(ΒΔ)\ (ΔΓ)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ α, τὸ δὲ μέρος αὐτῆς, τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε μέσον ἀνάλογον τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ λοιποῦ μέρους, διὰ τοῦ χ, θὰ εἶνε $α : χ=χ : (α-χ)$,

ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $χ^2=α\ (α-χ)$,

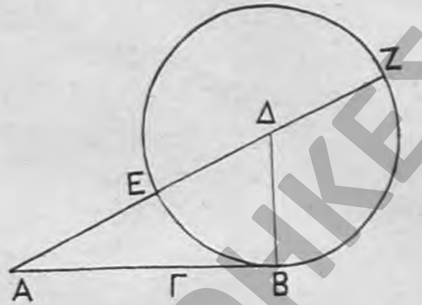
ἤτοι $χ^2+αχ=α^2$· πρέπει δὲ νὰ εἶνε $0<χ<α$.

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $χ=-\frac{α}{2}+\sqrt{\left(\frac{α}{2}\right)^2+α^2}$.

(Ἡ δευτέρα λύσις ὡς ἀρνητικὴ ἀπορρίπτεται).

Ὁδηγούμενοι ἐκ τῆς λύσεως ταύτης καὶ ἐκ τῶν γνωστῶν τῆς γεωμετρίας θεωρημάτων, εὑρίσκομεν τὸ μέρος χ διὰ γεωμετρικῆς κατασκευῆς ὡς ἑξῆς.

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον καθέτους πλευρὰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ $\sqrt{\left(\frac{α}{2}\right)^2+α^2}$. ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης τὸ ἥ μισυ τῆς δοθείσης εὐθείας· τὸ ὑπόλοιπον θὰ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ χ καὶ θὰ εἶνε ἴσον πρὸς τὸ ζητούμενον μέρος.

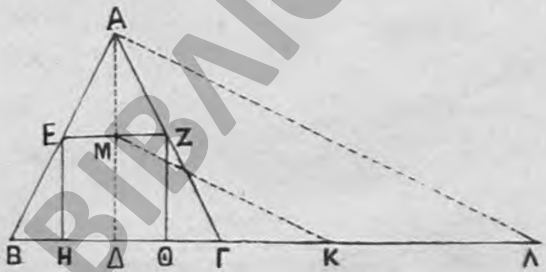


Οὕτως ἐπανευρίσκομεν τὴν ἐν τῷ ἐδαφίῳ 260 εὑρεθεῖσαν λύσιν τοῦ αὐτοῦ προβλήματος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Ἔστω ΑΒΓ τὸ δοθὲν τρίγωνον· ἂς ὑποτεθῇ δὲ τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΕΖΘΗ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις κεῖται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ τοῦ τριγώνου. Τὴν βάσιν ταύτην ΒΓ παριστῶμεν διὰ τοῦ α, τὸ δὲ ὕψος ΑΔ τοῦ τριγώνου διὰ τοῦ υ, καὶ τὴν πλευρὰν ΕΖ τοῦ τετραγώνου διὰ τοῦ χ.



Ἐπειδὴ ἡ ΕΖ εἶνε παράλληλος τῇ ΒΓ, τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, ΑΒΓ εἶνε ὅμοια· ὡσαύτως καὶ τὰ ΑΕΜ, ΑΒΔ· ὅθεν εἶνε

$$\frac{ΕΖ}{ΒΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΒ} \text{ καὶ } \frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{ΑΜ}{ΑΔ},$$

ὅθεν καὶ

$$\frac{ΕΖ}{ΒΓ}=\frac{ΑΜ}{ΑΔ},$$

τουτέστι

$$\frac{χ}{α}=\frac{υ-χ}{υ}, \text{ διότι } ΑΜ=ΑΔ-ΜΔ=υ-χ\cdot$$

λύοντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην εὑρίσκομεν $χ=\frac{α.\,υ}{α+υ}$.

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶνε τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν γνωστῶν εὐθειῶν $α+υ$, $α$, $υ$.

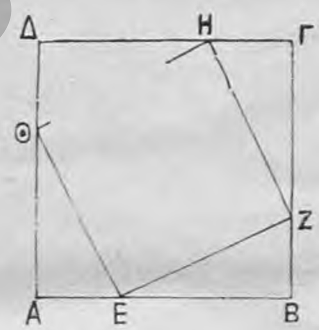
Ἵνα δὲ κατασκευάσωμεν αὐτήν, λαμβάνομεν ΔΚ=ΒΓ καὶ ΚΛ=ΑΔ, ἄγομεν τὴν ΑΛ καὶ ἐκ τοῦ Κ παράλληλον αὐτῆς τὴν ΚΜ, ἥτις τέμνει τὸ ὕψος ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Μ· ἡ ΔΜ θὰ εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου· ἐὰν δὲ διὰ τοῦ Μ ἀχθῇ ἡ ΕΖ παράλληλος τῇ

ΒΓ καὶ ἐκ τῶν Ε, Ζ αἱ κάθετοι ἐπ' αὐτὴν ΕΗ, ΖΘ, σχηματίζεται τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΕΖΘΗ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται γεωμετρικῶς καὶ ἁπλούστερον, ὡς ἑξῆς. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α ἄγεται παράλληλος καὶ ὁμόρροπος τῇ βάσει καὶ ἴση πρὸς τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου· ἔπειτα ἐπιζευγνύεται τὸ ἄκρον τῆς ἠγμένης εὐθείας μετὰ τῆς κορυφῆς Β, ἡ δὲ ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα τέμνει τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Ζ, ὅπερ εἶνε μία τῶν κορυφῶν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἄλλο ἔχον περίμετρον ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.



Ἔστω δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· ἵνα ἐγγράψωμεν εἰς αὐτὸ ἄλλο τετράγωνον, διαιροῦμεν τὴν ΑΒ, ὡς ἔτυχεν, εἰς δύο τμήματα ΑΕ, ΕΒ καὶ τὴν ΒΓ εἰς δύο ΒΖ, ΖΓ ἴσα τοῖς ΑΕ, ΕΒ· ὁμοίως καὶ τὴν ΓΔ εἰς τὰ ΓΗ, ΗΔ, καὶ τὴν ΔΑ εἰς τὰ ΔΘ, ΘΑ ἴσα τοῖς ΑΕ, ΕΒ.

Τὸ σχῆμα ΕΖΗΘ δεικνύεται εὐκόλως, ὅτι εἶνε τετράγωνον.

Ἔστω λοιπὸν ΕΖΗΘ τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

Ἐὰν ἡ ΑΒ παριστᾶται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ α, τὰ δὲ τμήματα αὐτῆς ὑπὸ τῶν χ καὶ ψ, ἡ δὲ δοθεῖσα περίμετρος τοῦ τετραγώνου ΕΖΗΘ διὰ τοῦ 4μ, θὰ εἶνε

$$\chi+\psi=\alpha,$$

$$\sqrt{\chi^2+\psi^2}=\mu, \qquad \text{διότι } EZ=\sqrt{\chi^2+\psi^2}$$

ἑπομένως οἱ ἄγνωστοι ἀριθμοὶ χ, ψ ἐπαληθεύουσι τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων.

$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\chi^2+\psi^2=\mu^2\cdot$$

πρέπει δὲ νὰ ἐπαληθεύωσι καὶ τοὺς ἑπομένους περιορισμούς, ὡς ἐκ τοῦ σχήματος ἀμέσως φαίνεται,

$$0<\chi<\alpha, \quad 0<\psi<\alpha\cdot$$

Ἀπαλείφοντες τὸν ἄγνωστον ψ ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων καὶ λύοντες τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν (Στ. Ἀλ. σ. 173)

$$\chi=\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{\frac{2\mu^2-\alpha^2}{2}}$$

καὶ ἂν μὲν ληφθῇ $\chi=\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2\mu^2-\alpha^2}}{2}$ εὑρίσκεται $\psi=\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2\mu^2-\alpha^2}}{2}$,

ἂν δὲ πάλιν ληφθῇ $\chi=\frac{\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2\mu^2-\alpha^2}}{2}$, εὑρίσκεται $\psi=\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2\mu^2-\alpha^2}}{2}$

ἄρα τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις· τὰ ἐγγεγραμμένα ὅμως τετράγωνα, ὡς ἔχοντα πλευρὰς ἴσας μὲ μ, δὲν διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων ἢ κατὰ τὴν θέσιν.

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ. Ἵνα αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ εἶνε πραγματικαί, πρέπει νὰ

εἶνε $2\mu^2 \geqq \alpha^2$, ἤτοι $\mu \geqq \frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ καὶ $4\mu \geqq 2\alpha\sqrt{2}$,

ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι *ἡ περίμετρος τοῦ εἰς τετράγωνον ἐγγεγραμμένου τετραγώνου δὲν δύναται νὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ διπλασίου τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.*

Ἐὰν ὑποτεθῇ $2\mu^2=\alpha^2$, γίνονται αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ ἴσαι, ἤτοι ΑΕ=ΕΒ, καὶ αἱ δύο λύσεις γίνονται μία μόνη· ἐπομένως τὸ τὴν ἐλαχίστην περίμετρον ἔχον ἐγγεγραμμένον τετράγωνον εἶνε τὸ ἔχον κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος.

Ἵνα δὲ αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ὦσι θετικαί, πρέπει νὰ εἶνε $\alpha > \sqrt{2\mu^2-\alpha^2}$, ἤτοι $2\alpha^2>2\mu^2$ ἢ $\alpha>\mu$, τουτέστιν *ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφησομένου τετραγώνου δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος*· ὅπερ καὶ ἐκ τοῦ σχήματος φαίνεται.

Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων θὰ εἶνε ἀμφότεραι μικρότεραι τοῦ α, ἐὰν εἶνε ἀμφότεραι θετικαί· διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶνε α.

Ἐκ τῶν εἰρημένων συνάγεται, ὅτι τὸ πρόβλημα εἶνε δυνατόν, μόνον ὅταν εἶνε $2\alpha\sqrt{2} \leqq 4\mu < 4\alpha$.

Κατασκευή. Ἐκ τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων χ, ψ ὁδηγούμενοι δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν γεωμετρικῶς τὰς ὑπ' αὐτῶν παριστωμένας εὐθείας ΑΕ, ΕΒ· ἐπομένως καὶ τὸ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον ΕΖΗΘ, οὗ ἡ περίμετρος εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ 4μ.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν, ὅτι, ἂν τεθῇ

$$\sqrt{2\mu^2-\alpha^2}=\beta, \quad \text{ἕπεται } 2\mu^2=\alpha^2+\beta^2,$$

ἤτοι οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, $\mu\sqrt{2}$ παριστῶσι τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου· ἀλλ' ὁ μὲν α παριστᾷ τὴν πλευρὰν ΑΒ τοῦ δοθέντος τετραγώνου, ὁ δὲ $\mu\sqrt{2}$ παριστᾷ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου, ὅπερ ἔχει τὴν δοθεῖσαν περίμετρον· ἂν λοιπὸν κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν διαγώνιον ταύτην καὶ πλευρὰν τὴν ΑΒ, ἡ ἄλλη πλευρὰ αὐτοῦ θὰ εἶνε ἡ β. Ἀλλὰ τότε εἶνε

$$\chi=\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\beta}{2} \qquad \psi=\frac{\alpha}{2}\mp\frac{\alpha}{2},$$

ἤτοι αἱ ἄγνωστοι γραμμαὶ χ, ψ εἶνε ἄθροισμα καὶ διαφορὰ γνωστῶν γραμμῶν· ἐπομένως κατασκευάζονται εὐκόλως.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Αἱ διὰ τῆς ἀλγέβρας εὑρισκόμεναι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων τοῦ προβλήματος δὲν εἶνε πάντοτε δυνατὸν νὰ κατασκευασθῶσι γεωμετρικῶς τουτέστι *μόνον δι' εὐθειῶν γραμμῶν καὶ περιφερειῶν*. Τοῦτο συμβαίνει π. χ. εἰς τὸ πρόβλημα «*νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα γωνία εἰς τρία ἴσα μέρη*». Ἐπίσης ἐν τῇ στερεομετρίᾳ θὰ μάθωμεν π. χ., ὅτι, ἐὰν ζητῆται νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ κύβου, ὅστις εἶνε διπλάσιος ἄλλου (κατὰ τὸν ὄγκον) ἔχοντος πλευρὰν α, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\chi^3=2.\alpha^3 \quad \text{ἢ} \quad \chi=\alpha.\sqrt[3]{2}$$

ἀλλ' ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ εἶνε ἀδύνατον νὰ κατασκευασθῇ δι' εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν μόνον. Ὁμοίως, ἂν ζητῆται νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ κύβου ἴσου πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων δοθέντων, ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶνε

$$\chi^3=\alpha^3+\beta^3, \qquad \text{ἐξ ἧς } \chi=\sqrt[3]{\alpha^3+\beta^3},$$

ἀλλὰ καὶ ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ εἶνε ἀδύνατον νὰ κατασκευασθῇ δι' εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν μόνον. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου κατασκευάζεται δι' εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν πάντοτε, ὅταν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶνε πρώτου ἢ δευτέρου βαθμοῦ, ὡς εἰς τὰ προηγουμένως λυθέντα προβλήματα συνέβαινεν· ἀλλ' ἂν ἡ ἐξίσωσις εἶνε ἀνωτέρου βαθμοῦ, ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀγνώστου εἶνε *ἐν γένει* ἀδύνατος δι' εὐθειῶν καὶ περιφερειῶν μόνον· πρὸς τοῦτο ἀπαιτοῦνται τότε καὶ ἄλλαι πολυπλοκώτεραι γραμμαί.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Νὰ διαιρεθῇ τὸ δοθὲν τρίγωνον δι' εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ εἰς δύο μέρη ἔχοντα δοθέντα λόγον μ : ν.

2) Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ μία τῶν ἴσων πλευρῶν καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

3) Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ α, ἡ δὲ ἄλλη κάθετος εἶνε μέση ἀνάλογος τῆς ὑποτεινούσης καὶ τῆς α.

4) Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ἔχον ἐμβαδὸν δοθέν. Ποῖον ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων ὀρθογωνίων ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;

Δημήτριος

Γυμνάσιον Τάξις Δ'. 1911

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

296. Εὐθεῖα λέγεται *κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον*, ἐὰν εἶνε κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένας καὶ διερχομένας διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς, ἤτοι τοῦ σημείου, ἔνθα τέμνει τὸ ἐπίπεδον.

Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον λέγονται *παράλληλα*, ἐὰν δὲ συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσι.

Δύο ἐπίπεδα λέγονται *παράλληλα*, ἐὰν δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν αὐξηθῶσιν.

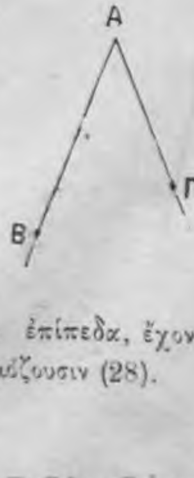
ΑΞΙΩΜΑ

Πᾶν ἐπίπεδον στρεφόμενον περὶ οἱανδήποτε εὐθεῖαν κειμένην ἐφ' ἑαυτοῦ δύναται διέλθῃ διὰ τοῦ τυχόντος σημείου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

297. *Διὰ τριῶν σημείων μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων διέρχεται ἓν ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.*

Ἔστωσαν τρία σημεῖα Α, Β, Γ, μὴ κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας· λέγω, ὅτι δι' αὐτῶν διέρχεται ἓν ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.



Ἐπὶ τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου γράφομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν καὶ ἐφαρμόζομεν αὐτὴν ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ μεταφέροντες τὸ ἐπίπεδον, ὅπερ θὰ διέρχηται τότε διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β· ἔπειτα στρέφομεν τὸ ἐπίπεδον περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ διέλθῃ καὶ διὰ τοῦ τρίτου σημείου Γ· τότε θὰ ἔχωμεν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν τριῶν δοθέντων σημείων. Ἄλλο δέ, πλὴν τούτου, δὲν δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ· διότι δύο ἐπίπεδα, ἔχοντα τρία κοινὰ σημεῖα, μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας, ἐφαρμόζουσιν (28).

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

298. *Δύο εὐθεῖαι τεμνόμεναι, ὡς αἱ ΑΒ, ΑΓ, ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου, ἐφ' οὗ κεῖνται.*

Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶνε τὸ διερχόμενον διὰ τῆς τομῆς Α τῶν εὐθειῶν καὶ διὰ δύο τυχόντων σημείων Β καὶ Γ ἐπ' αὐτῶν κειμένων.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

299. *Δύο παράλληλοι ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.*

Ὅτι δύο παράλληλοι εὐθεῖαι κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου, εἶνε γνωστὸν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ αὐτῶν· δύο δὲ διάφορα ἐπίπεδα δὲν δύνανται νὰ διέρχωνται διὰ τῶν αὐτῶν δύο παραλλήλων, διότι θὰ εἶχον τρία σημεῖα κοινὰ μὴ ἐπ' εὐθείας κείμενα· τουτέστιν ἓν οἱονδήποτε σημεῖον τῆς μιᾶς καὶ δύο οἱαδήποτε τῆς ἄλλης.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐξ ἑκάστου σημείου μία μόνη παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχει· διότι τὸ σημεῖον καὶ ἡ εὐθεῖα ὁρίζουσι τὸ ἐπίπεδον, ἐφ' οὗ θὰ κεῖται ἡ παράλληλος, ἐν δὲ τῷ ἐπιπέδῳ μία μόνη παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἄγεται ἐξ ἑνὸς σημείου. Ἐκ τοῦ σημείου Γ π. χ. μία μόνη ἄγεται παράλληλος τῇ εὐθείᾳ ΑΒ καὶ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΑΒ. Ἐὰν δὲ διὰ τοῦ Γ ἀχθῇ οἱαδήποτε εὐθεῖα, μὴ κειμένη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΑΒ, ἀλλὰ διαπερῶσα αὐτό, ἡ εὐθεῖα αὕτη οὔτε θὰ συναντᾷ τὴν ΑΒ, οὔτε παράλληλος θὰ εἶνε πρὸς αὐτήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

300. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνωσιν ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εἶνε εὐθεῖα γραμμή.*

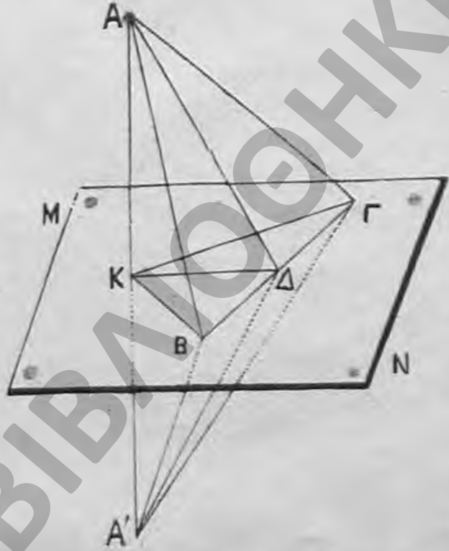
Διότι, ἂν ἡ τομὴ εἶχε τρία σημεῖα μὴ ἐπ' εὐθείας, τὰ δύο ἐπίπεδα, ὡς διερχόμενα διὰ τῶν τριῶν τούτων σημείων, θὰ ἐφήρμοζον καὶ θὰ ἀπετέλουν ἓν μόνον ἐπίπεδον· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει· ἄρα πάντα τὰ σημεῖα τῆς τομῆς κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας.

ΘΕΩΡΗΜΑ

301. *Ἐὰν τις εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας τεμνομένας* (κατὰ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν), *θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΚ κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΚΒ καὶ ΚΓ κατὰ τὸ σημεῖον Κ· (γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν διὰ τῆς ΑΚ ἀχθῶσι δύο ἐπίπεδα καὶ ἐν αὐτοῖς κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΚ κατὰ τὸ σημεῖον Κ)· λέγω, ὅτι ἡ ΑΚ θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ δι' αὐτῶν διερχόμενον ἐπίπεδον ΜΝ.

Ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Κ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ τυχοῦσα εὐθεῖα ἡ ΚΔ, ἥτις θὰ κεῖται ἔν τινι τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας αἱ δύο εὐθεῖαι ΚΒ, ΚΓ σχηματίζουσιν· ἂς τμηθῶσι δὲ αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας ταύτης ὑπὸ τῆς τυχούσης εὐθείας ΒΓ, ἥτις θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ΚΔ εἴς τι σημεῖον Δ· ἔπειτα ἂς προσεκβληθῇ ἡ ΑΚ καὶ ἂς ληφθῶσιν ἐπ' αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ Κ δύο μήκη ἴσα, ΚΑ, ΚΑ΄, ἂς ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ καὶ αἱ Α΄Β, Α΄Γ, Α΄Δ.



Ἐπειδὴ ἡ ΚΓ εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ΄, αἱ δύο ἀποστάσεις ΓΑ, ΓΑ΄ εἶνε ἴσαι· δι' ὅμοιον λόγον εἶνε καὶ ΒΑ=ΒΑ΄· ἐπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄ΒΓ ἔχουσι τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας κατὰ μίαν καὶ εἶνε ἴσα. Ὅταν δὲ ἐφαρμόσωσι, θὰ πέσῃ τὸ Α΄ ἐπὶ τοῦ Α καὶ τὸ Δ θὰ μείνῃ εἰς τὴν θέσιν του, ὥστε ἡ Α΄Δ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΔ· εἶνε λοιπὸν ΔΑ=ΔΑ΄, καὶ κατ' ἀκολουθίαν (104) ἡ ΔΚ εἶνε κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ΄· ἄρα καὶ ἡ ΑΑ΄ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΔ.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΚ εἶνε κάθετος ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ Κ διερχομένην καὶ κειμένην ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

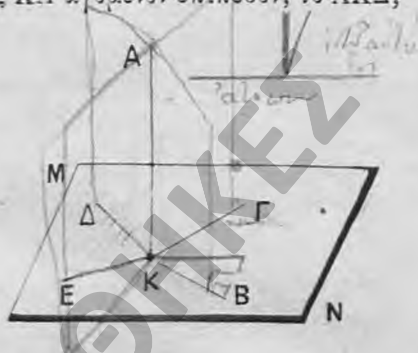
ΘΕΩΡΗΜΑ

302. *Πᾶσαι αἱ ἐξ ἑνὸς σημείου εὐθείας ἀγόμεναι ἐπ' αὐτὴν κάθετοι κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ καθέτῳ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν.*

Ἔστωσαν ἐκ τοῦ σημείου Κ τῆς εὐθείας ΚΑ κάθετοι ἐπ' αὐτὴν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ κτλ. (ἡ μὲν ΚΒ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΒ, ἡ δὲ ΚΓ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΚΓ κτλ.)· λέγω, ὅτι πᾶσαι αὗται κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

Διὰ δύο ἐκ τῶν καθέτων τούτων, ἔστω διὰ τῶν ΚΒ, ΚΓ, ἂς διέλθῃ ἐπίπεδον, τὸ ΜΝ· λέγω, ὅτι ἐν τούτῳ θὰ κεῖνται καὶ αἱ λοιπαί.

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ ὅτι μία ἐξ αὐτῶν, ἡ ΚΔ, δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, τὸ δι' αὐτῆς καὶ διὰ τῆς ΚΑ ἀγόμενον ἐπίπεδον, τὸ ΑΚΔ, θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΚΕ, ἥτις θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ· διότι ἡ ΚΑ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ (296)· τότε δὲ ἐκ τοῦ σημείου Κ θὰ ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΑ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι μετὰ τῆς ΚΑ, αἱ ΚΔ, ΚΕ· ὅπερ ἀδύνατον.



* ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

303. *Δι' ἑκάστου σημείου τῆς δοθείσης εὐθείας ἄγεται ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ ἓν μόνον.*

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν (296) ἐπίπεδόν τι λέγεται κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΑ εἰς τὸ σημεῖον Κ, ἐὰν πᾶσα εὐθεῖα ἐπ' αὐτοῦ κειμένη καὶ διὰ τοῦ Κ διερχομένη εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ· ἀλλὰ πᾶσαι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΑ εἰς τὸ σημεῖον Κ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ τοῦ διὰ δύο ἐξ αὐτῶν διερχομένου.

* ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Καὶ δι' ἑκάστου σημείου ἐκτὸς εὐθείας κειμένου ἄγεται ἐπ' αὐτὴν ἓν κάθετον ἐπίπεδον καὶ ἓν μόνον.* Διότι, ἂν λόγου χάριν διὰ τοῦ σημείου Γ ζητῆται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΚ, τὸ τοιοῦτον ἐπίπεδον πρέπει νὰ περιέχῃ τὴν κάθετον, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΚΑ, ἥτις κάθετος εἶνε μία, ἡ ΓΚ· πρέπει λοιπὸν τὸ κάθετον ἐπίπεδον νὰ διέρχηται διὰ τοῦ ποδὸς αὐτῆς Κ· ἄρα θὰ εἶνε τὸ διὰ τοῦ Κ ἀγόμενον ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΚΑ.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

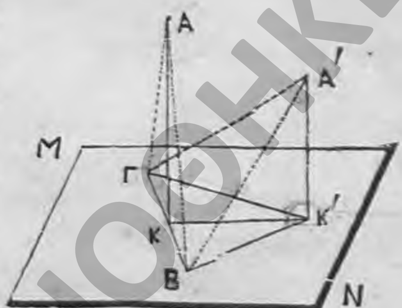
304. *Ὁ τόπος τῶν σημείων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ δύο σημείων εἶνε ἐπίπεδον διαιροῦν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο σημείων εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ κάθετον ἐπ' αὐτήν.*

Διότι πᾶν σημεῖον ἴσον ἀπέχον ἀπὸ τῶν δύο σημείων Α καὶ Α' κεῖται ἐπὶ εὐθείας καθέτου εἰς τὸ μέσον τῆς ΑΑ'. πᾶσαι δὲ αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΑ' εἰς τὸ μέσον αὐτῆς κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ἐφ' ὃ ἡ ΑΑ' εἶνε κάθετος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

305. *Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΚ καὶ Α΄Κ΄ κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· λέγω, ὅτι αἱ ΑΚ, Α΄Κ΄ εἶνε παράλληλοι.



Ἄς ἀχθῇ ἡ ΚΚ΄ καὶ ἐκ τοῦ Κ κάθετος ἐπ᾽ αὐτὴν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ ἡ ΒΓ· ἄς ληφθῇ δὲ ΚΒ=ΚΓ.

Αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ εἶνε ἴσαι, ὡς πλάγιαι ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῆς καθέτου ΑΚ· δι᾽ ὅμοιον λόγον εἶνε Κ΄Β=Κ΄Γ· καὶ τὰ δύο τρίγωνα Α΄Κ΄Β καὶ Α΄Κ΄Γ εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα δύο πλευρὰς ἴσας, τὴν Α΄Κ΄ κοινήν, τὴν Κ΄Β ἴσην τῇ Κ΄Γ καὶ τὰς περιεχομένας γωνίας Α΄Κ΄Β, Α΄Κ΄Γ ἴσας, ὡς ὀρθάς· ἄρα εἶνε καὶ Α΄Β=Α΄Γ· ὥστε τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Κ, Α΄, Κ΄ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν δύο σημείων Β καὶ Γ· κατ᾽ ἀκολουθίαν τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ (304)· ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου κεῖνται λοιπὸν αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΚ, Α΄Κ΄, καὶ ἐπειδὴ εἶνε ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΚ΄, συνάγεται ὅτι εἶνε παράλληλοι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι αἱ δύο κάθετοι συναντῶσι τὸ ἐπίπεδον εἰς διάφορα σημεῖα Κ καὶ Κ΄. Ἐὰν τῷ ὄντι ὑποτεθῇ, ὅτι δύο κάθετοι ἐπὶ ἐπίπεδον συναντῶσιν αὐτὸ εἰς ἓν σημεῖον, τουτέστιν, ὅτι ἐξ ἑνὸς σημείου Κ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ ἄγονται δύο κάθετοι ΚΑ, ΚΑ΄ ἐπ᾽ αὐτό, τὸ ὑπὸ τῶν δύο καθέτων ὁριζόμενον ἐπίπεδον ΚΑΑ΄ θὰ ἔτεμνε τὸ ἐπίπεδον ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΚΘ καὶ θὰ ἦσαν αἱ ΚΑ, ΚΑ΄ ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΚΘ καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ μετ᾽ αὐτῆς· ὅπερ ἀδύνατον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

306. *Ἐὰν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἡ μία εἶνε κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἡ ἄλλη θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.*

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ ΑΚ, Α΄Κ΄, ἐξ αὐτῶν δὲ ἡ Α΄Κ΄ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἐὰν γίνῃ ἡ κατασκευὴ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, τὰ τρία σημεῖα Κ,Κ΄,Α΄ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τῶν σημείων Β καὶ Γ (διότι τὰ τρίγωνα Α΄Κ΄Β καὶ Α΄Κ΄Γ εἶνε πάλιν ἴσα)· ἄρα τὸ δι' αὐτῶν διερχόμενον ἐπίπεδον εἶνε κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ· ἀλλ' ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τούτῳ κεῖται καὶ ἡ ΑΚ, ὡς παράλληλος τῇ Α΄Κ΄· ἄρα ἡ ΚΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ· ἀλλὰ καὶ ἡ ΚΚ΄ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΚΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ Κ΄Α΄· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΚ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας ΚΚ΄ καὶ ΚΒ, εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.

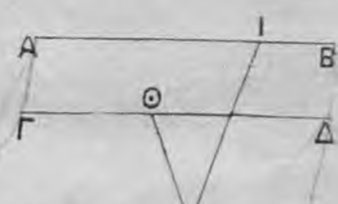
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ ἀποδείξει τοῦ θεωρήματος τούτου ὑποτίθεται, ὅτι, *ὅταν ἐκ δύο παραλλήλων ἡ μία τέμνῃ ἐπίπεδόν τι ΜΝ, καὶ ἡ ἄλλη θὰ τέμνῃ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον*· ἀληθεύει δὲ τοῦτο, διότι τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο παραλλήλων τέμνει τὸ ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Κ΄, ἔνθα ἡ μία παράλληλος τέμνει τὸ ἐπίπεδον, τὴν δὲ εὐθεῖαν ταύτην πρέπει νὰ τέμνῃ καὶ ἡ ἄλλη παράλληλος (62)· ἄρα τέμνει καὶ τὸ ἐπίπεδον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

307. *Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι εἶνε καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι.*

Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ παράλληλοι τῇ ΕΖ· λέγω, ὅτι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε παράλληλοι.

Ἂν αἱ τρεῖς εὐθεῖαι κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, τὸ θεώρημα εἶνε ἀποδεδειγμένον (63)· ἔστωσαν λοιπὸν ἀνὰ δύο ἐν διαφόροις ἐπιπέδοις.



Ἂς ληφθῇ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον, τὸ Η, καὶ ἐξ αὐτοῦ ἂς ἀχθῇ ἡ ΗΙ κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς καὶ τῆς ΑΒ, καὶ ἡ ΗΘ κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν ΕΖ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς καὶ τῆς ΓΔ.

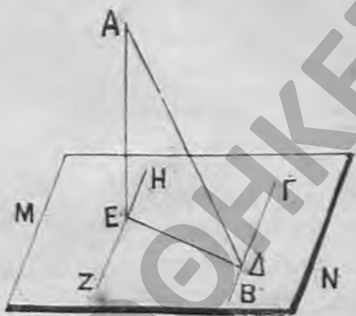
Ἡ ΕΖ θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΘΗΙ, αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ, ὡς παράλληλοι τῇ ΕΖ, θὰ εἶνε καὶ αὐταὶ κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἄρα παράλληλοι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

308. *Νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου κάθετος ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.*

α΄) Τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἔστω ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΜΝ.

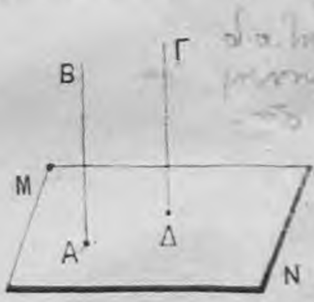
Ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΜΝ γράφομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, τὴν ΒΓ, καὶ ἄγομεν ἐπ' αὐτὴν ἐκ τοῦ σημείου Α κάθετον τὴν ΑΔ. Ἐκ τοῦ Δ ἄγομεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, καὶ τέλος ἐκ τοῦ Α τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΕ· αὕτη ἡ ΑΕ θὰ εἶνε ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.



Διότι ἡ ΒΓ, κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΔΑ καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ, εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΔΕ· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Ε ἀχθῇ παράλληλος τῇ ΒΓ ἡ ΖΗ (ἥτις θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ), θὰ εἶνε καὶ αὐτὴ κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΑΔΕ· ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν ΑΕ. Ἡ ΑΕ λοιπὸν εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΖΗ, εἶνε δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΕΔ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

β΄) Τὸ δοθὲν σημεῖον Α ἔστω ἐπὶ τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ΜΝ.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Γ, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου κειμένου, ἄγομεν κάθετον ἐπ' αὐτὸ τὴν ΓΔ, ἐκ δὲ τοῦ Α παράλληλον τῇ ΓΔ, τὴν ΑΒ· αὕτη θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (306).



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ α΄. *Ἐξ ἑκάστου σημείου μία μόνη κάθετος ἄγεται ἐπὶ ἐπίπεδον·* διότι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλοι (305).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ β΄. Ἐκ τῆς κατασκευῆς τοῦ προβλήματος τούτου συνάγεται ἡ ἑπομένη πρότασις. *Ἐὰν ὀρθογωνίου τριγώνου* (ὡς τοῦ ΑΔΕ) *ἡ μὲν μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας* (ὡς ἡ ΑΕ) *εἶνε κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ἄλλη ἐπὶ εὐθεῖάν τινα τοῦ ἐπιπέδου* (ὡς τὴν ΒΓ), *καὶ ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (ἐὰν τέμνῃ αὐτήν).*

Διότι ἡ ἐκ τοῦ Ε ἀγομένη παράλληλος τῇ ΒΓ θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΔΕ (ὡς κάθετος ἐπ' ἀμφοτέρας τὰς ΕΑ, ΕΔ)· ἄρα καὶ ἡ παράλληλος αὐτῇ ΒΓ θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον· ἑπομένως κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΑ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

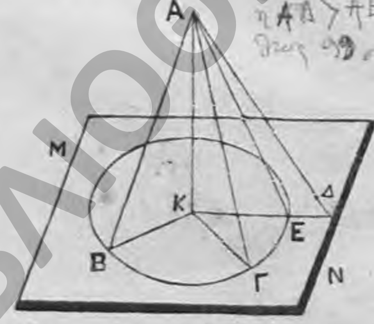
309· *Ἐὰν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου ἀχθῇ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο ἡ κάθετος καὶ ὁσαιδήποτε πλάγιαι.*

1) ἡ κάθετος θὰ εἶνε μικροτέρα πάσης πλαγίας,

2) αἱ ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι πλάγιαι θὰ εἶνε ἴσαι,

3) ἐκ δύο πλαγίων ἡ μᾶλλον ἀπέχουσα ἀπὸ τῆς καθέτου θὰ εἶνε μεγαλητέρα.

Ἔστω ἡ ΑΚ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, αἱ δὲ ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ πλάγιαι· ἐὰν ἀχθῶσιν αἱ ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ, ἑκάστη πλαγία γίνεται ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶνε ἡ ΑΚ· ὥστε ἡ ΑΚ εἶνε μικροτέρα πάσης πλαγίας.



Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΚΒ=ΚΓ, αἱ δύο πλάγιαι ΑΒ καὶ ΑΓ θὰ εἶνε ἴσαι· διότι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΑΚΓ εἶνε ἴσα· ὥστε αἱ ἴσον ἀπὸ τῆς καθέτου ἀπέχουσαι πλάγιαι εἶνε ἴσαι. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ ΚΔ>ΚΒ, θὰ εἶνε καὶ ἡ πλαγία ΑΔ μεγαλητέρα τῆς ΑΒ· διότι λαμβάνοντες ΚΕ ἴσον ΚΒ καὶ ἄγοντες τὴν ΑΕ, ἔχομεν ΑΕ=ΑΒ καὶ ΑΔ>ΑΕ, ἄρα καὶ ΑΔ>ΑΒ.

Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν προτάσεων τούτων ἀποδεικνύονται εὐκόλως.

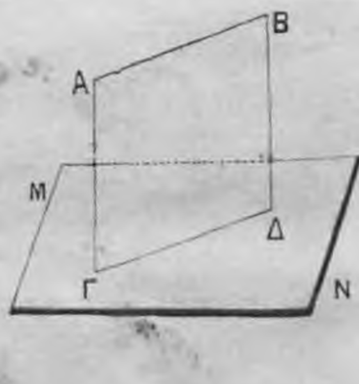
ΟΡΙΣΜΟΣ

310. *Ἀπόστημα* σημείου ἀπὸ ἐπιπέδου λέγεται ἡ ἐκ τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἠγμένη κάθετος.

ΘΕΩΡΗΜΑ

311. *Ἐὰν εὐθεῖα, ἐκτὸς ἐπιπέδου οὖσα, εἶνε παράλληλος εὐθείᾳ τινὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, θὰ εἶνε παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ.*

Ἔστω ἡ εὐθεῖα ΑΒ παράλληλος τῇ ΓΔ, ἥτις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ θὰ εἶνε παράλληλος καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ.



Διότι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ τῶν δύο

παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ τέμνει τὸ ΜΝ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ· ἂν λοιπὸν ἡ εὐθεῖα ΑΒ (ἥτις μένει πάντοτε ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΓΔ) συνήντα τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἡ συνάντησις θὰ ἐγίνετο ἐπὶ τῆς ΓΔ· ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ἀδύνατον· διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ εἶνε παράλληλοι.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

312. *Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶνε παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, πᾶν ἐπίπεδον ΑΒΓΔ δι' αὐτῆς διερχόμενον καὶ τέμνον τὸ ΜΝ, τέμνει αὐτὸ κατὰ παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ΑΒ.*

Διότι, ἂν ἡ ΑΒ ἔτεμνε τὴν ΓΔ, θὰ ἔτεμνε καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

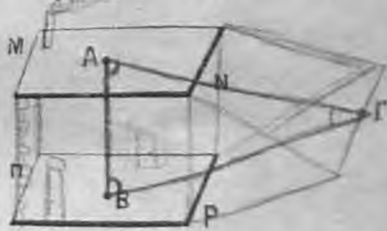
ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

313. *Ἐὰν εὐθεῖα εἶνε παράλληλος ἐπιπέδῳ, αἱ ἐκ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἀγόμεναι παράλληλοι τῇ εὐθείᾳ κεῖνται πᾶσαι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.*

Τὸ διὰ τοῦ σημείου Γ καὶ διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ διερχόμενον ἐπίπεδον τέμνει τὸ ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΓΔ παράλληλον τῇ ΑΒ· ἄλλη δὲ ἐκ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΑΒ δὲν ὑπάρχει.

ΘΕΩΡΗΜΑ

314. *Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶνε παράλληλα.*



Ἔστωσαν τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ κάθετα ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ· λέγω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶνε παράλληλα.

Διότι, ἂν εἶχον κοινόν τι σημεῖον, τὸ Γ, αἱ εὐθεῖαι ΓΑ, ΓΒ καὶ ἡ ΑΒ θὰ ἐσχημάτιζον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἔχον δύο ὀρθὰς γωνίας, τὰς Α καὶ Β, ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

315. *Ἐὰν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνωνται ὑπὸ ἄλλου ἐπιπέδου αἱ τομαὶ αὐτῶν εἶνε παράλληλοι.*

Ἔστωσαν παράλληλα ἐπίπεδα τὰ ΜΝ καὶ ΠΡ τεμνόμενα ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ· λέγω, ὅτι αἱ τομαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε παράλληλοι·

Διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒΓΔ, ἢ λοιπὸν τέμνονται ἢ εἶνε παράλληλοι· ἀλλ' ἂν ἐτέμνοντο εἴς τι σημεῖον, τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΡ· ὅπερ ἀδύνατον, διότι τὰ ἐπίπεδα ταῦτα εἶνε παράλληλα· ἄρα αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε παράλληλοι.

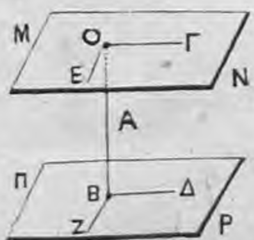
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κειμένη ἐπὶ τοῦ ἑνὸς εἶνε παράλληλος τοῦ ἄλλου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

316. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἓν εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.*

Ἔστωσαν παράλληλα τὰ ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ καὶ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ ΠΡ· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ΜΝ.

Διὰ τῆς ΑΒ καὶ δι' ἑνὸς οἱουδήποτε σημείου τοῦ ΜΝ, ἔστω διὰ τοῦ Γ, ἃς ἀχθῇ ἐπίπεδον· τοῦτο θὰ τέμνῃ τὸ ΠΡ κατά τινα εὐθεῖαν ΒΔ, θὰ τέμνῃ δὲ καὶ τὸ ΜΝ κατά τινα εὐθεῖαν ΟΓ παράλληλον τῇ ΒΔ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΑΒ κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῶν παραλλήλων τούτων εὐθειῶν, εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν, τὴν ΒΔ, θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην ΟΓ· ἄρα θὰ τέμνῃ αὐτὴν (καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, ἐφ' οὗ αὕτη κεῖται) κατά τι σημεῖον Ο. Ἐὰν δὲ ἀχθῇ διὰ τῆς ΑΒ καὶ ἄλλο ἐπίπεδον, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι ἡ ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΟΕ· ἄρα εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Δι' ὁμοίου τρόπου ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα τέμνουσα τὸ ἓν θὰ τέμνῃ καὶ τὸ ἄλλο.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

317. *Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου δύναται νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ καὶ ἓν μόνον.*

Ἔστω ΜΝ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον καὶ Α τὸ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐκ τοῦ Α ἄγομεν τὴν ΑΚ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΠΡ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ (γίνεται δὲ τοῦτο, ἂν ἀχθῶσι δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν ΑΚ εἰς τὸ σημεῖον Α· τὸ ἐπίπεδον τῶν καθέτων τούτων θὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΚ)· τὰ δύο ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ κάθετα ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν, τὴν ΑΚ, εἶνε παράλληλα.

Ἄλλο ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Α καὶ παράλληλον τῷ ΜΝ δὲν ὑπάρχει· διότι ἂς ὑποτεθῇ τοιοῦτο τὸ ΑΤ ἐὰν διὰ τῆς ΑΚ ἀχθῇ τυχὸν ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὸ μὲν ΜΝ κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΚΓ, τὰ δὲ παράλληλα αὐτῷ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΕ, αἵτινες θὰ ἦσαν παράλληλοι τῇ ΚΓ· ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

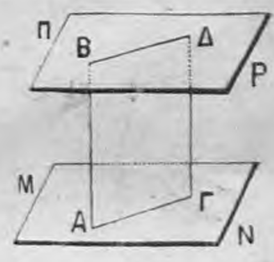
318. *Δύο ἐπίπεδα, Α καὶ Β, παράλληλα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ Γ, εἶνε καὶ ἀλλήλοις παράλληλα.*

Διότι, ἂν τὰ ἐπίπεδα Α καὶ Β εἶχον κοινόν τι σημεῖον, ἐκ τοῦ σημείου ἐκείνου θὰ ἦσαν δύο ἐπίπεδα (τὰ Α καὶ Β) παράλληλα ἑνὶ ἐπιπέδῳ (τῷ Γ) ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

319. *Παράλληλοι εὐθεῖαι, μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι, εἶνε ἴσαι.*

Ἔστωσαν παράλληλοι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΜΝ καὶ ΠΡ· λέγω, ὅτι εἶνε ΑΒ=ΓΔ.



Διότι τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ θὰ τέμνῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ΜΝ καὶ ΠΡ κατὰ παραλλήλους εὐθείας, τὰς ΑΓ καὶ ΒΔ· ἄρα τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ εἶνε παραλληλόγραμμον, καὶ ἑπομένως εἶνε ΑΒ=ΓΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

320. *Αἱ μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀγόμεναι κάθετοι εἶνε ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.*

Διότι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλοι· παράλληλοι δὲ εὐθεῖαι, μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι, εἶνε ἴσαι.

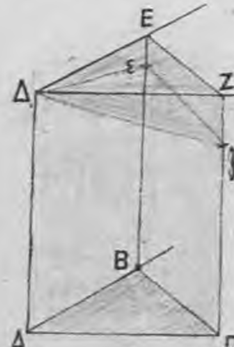
ΟΡΙΣΜΟΣ

321. *Ἀπόστασις* δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λέγεται μία οἱαδήποτε τῶν μεταξὺ αὐτῶν καθέτων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

322. *Ἐὰν δύο γωνίαι μὴ κείμεναι ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, ἔχωσι τὰς πλευρὰς αὐτῶν παραλλήλους καὶ πρὸς τὰ αὐτὰ μέρη φερομένας, αἱ γωνίαι αὗται εἶνε ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.*

Ἔστωσαν αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ κείμεναι καὶ ἔχουσαι τὴν ΑΒ παράλληλον τῇ ΔΕ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος φερομένην, καὶ τὴν ΑΓ παράλληλον τῇ ΔΖ καὶ ὁμοίως φερομένην· λέγω, ὅτι αἱ γωνίαι αὗται ΒΑΓ καὶ ΕΔΖ εἶνε ἴσαι καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν παράλληλα.



Ἄς ληφθῇ ΑΓ=ΔΖ, καὶ ΑΒ=ΔΕ καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΔ,ΒΕ ΓΖ καὶ αἱ ΒΓ,ΕΖ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶνε ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΕ, τὸ σχῆμα ΑΒΔΕ εἶνε παραλληλόγραμμον καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΒΕ εἶνε ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΔ· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ ΓΖ εἶνε ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΑΔ· ὥστε αἱ δύο εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΖ εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ ΑΔ· ἄρα εἶνε καὶ πρὸς ἀλλήλας ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἑπομένως τὸ σχῆμα ΒΓΖΕ εἶνε παραλληλόγραμμον καὶ ἡ ΒΓ ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΕΖ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι καὶ τὰς τρεῖς των πλευρὰς ἴσας· ἄρα εἶνε ἴσα καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ εἶνε ἴση τῇ ΕΔΖ.

Καὶ τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶνε παράλληλα· διότι, ἄν δὲν εἶνε, ἄς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Δ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΑΒΓ καὶ ἄς τέμνῃ τὰς εὐθείας ΒΕ καὶ ΓΖ εἰς τὰ σημεῖα ε καὶ ζ· τότε θὰ εἶνε

εΒ=ΑΔ καὶ ζΓ=ΑΔ,

ὡς παράλληλοι εὐθεῖαι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων.

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι εἶνε ΕΒ=ΑΔ καὶ ΖΓ=ΑΔ,

ἄρα ΕΒ=εΒ, ΖΓ=ζΓ, ὅπερ ἄτοπον.

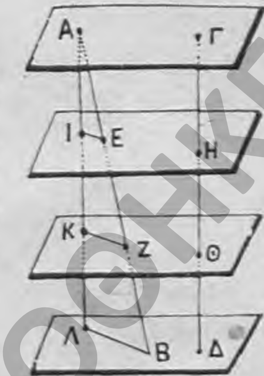
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἑξῆς πρότασις. *Ἐὰν ἐκ σημείων ἐπὶ ἐπιπέδου κειμένων ἀχθῶσιν ὁσαιδήποτε εὐθεῖαι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ δοθέντι.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

323. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.*

Ἔστωσαν τυχοῦσαι εὐθεῖαι, αἱ ΑΒ, ΓΔ, τεμνόμεναι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἰς τὰ σημεῖα Α, Ε, Ζ, Β καὶ Γ, Η, Θ, Δ· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε

$$\frac{ΑΕ}{ΓΗ}=\frac{ΕΖ}{ΗΘ}=\frac{ΖΒ}{ΘΔ}.$$



Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α ἡ ΑΛ παράλληλος τῇ ΓΔ καὶ ἂς τέμνῃ τὰ ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεῖα Ι, Κ, Λ. Τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΑΛ, θὰ τέμνῃ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα κατ' εὐθείας παραλλήλους, τὰς ΕΙ, ΖΚ, ΒΛ, καὶ ἐπομένως εἶνε κατὰ τὸ 226

$$\frac{ΑΕ}{ΑΙ}=\frac{ΕΖ}{ΚΙ}=\frac{ΖΒ}{ΚΛ}.$$

ἀλλ' εἶνε καὶ ΙΑ=ΓΗ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων, ὁμοίως ΙΚ=ΗΘ καὶ ΚΛ=ΘΔ· ἀντικαθιστῶντες λοιπὸν ἐν τοῖς ἴσοις λόγοις τὰς ΑΙ, ΙΚ, ΚΛ ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν ΓΗ, ΗΘ, ΘΔ, εὑρίσκομεν

$$\frac{ΑΕ}{ΓΗ}=\frac{ΕΖ}{ΗΘ}=\frac{ΖΒ}{ΘΔ}.$$

ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ΟΡΙΣΜΟΣ

324. *Προβολὴ* σημείου ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ὁ πούς τῆς καθέτου ἥτις ἐκ τοῦ σημείου ἄγεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Προβολὴ δὲ γραμμῆς ἐπὶ ἐπίπεδον λέγεται ἡ γραμμή, τὴν ὁποίαν ἀποτελοῦσιν αἱ προβολαὶ τῶν σημείων αὐτῆς.

Καὶ *προβολὴ οἱουδήποτε σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον* λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσιν αἱ προβολαὶ ἁπάντων τῶν σημείων αὐτοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

325. *Ἡ προβολὴ εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶνε εὐθεῖα.*

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ ἐπίπεδον τὸ ΜΝ, μὴ περιέχον τὴν εὐθεῖαν, μηδὲ κάθετον ἐπ' αὐτήν· λέγω, ὅτι ἡ προβολὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ εἶνε εὐθεῖα γραμμή.

Διότι αἱ ἐκ τῶν σημείων τῆς ΑΒ ἀγόμεναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, οἷον αἱ Αα, Ββ, Γγ, Δδ, εἶνε παράλληλοι τέμνουσι δὲ καὶ τὴν ΑΒ· ἄρα κεῖνται πᾶσαι ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ τῷ αΑΒ καὶ διὰ τοῦτο οἱ πόδες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου τούτου καὶ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ, ἤτοι ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς, τῆς αγδ6.

Πᾶν σημεῖον τῆς ΑΒ ἔχει προβολὴν σημεῖόν τι τῆς αβ· ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον τῆς αβ εἶνε προβολὴ σημείου τινὸς τῆς ΑΒ· ἔστω, λόγῳ χάριν, τυχὸν σημεῖον τῆς αβ τὸ ρ· ἐὰν ἐξ αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος τῇ αΑ, ἡ ρΡ, αὕτη θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ρ, θὰ εἶνε δὲ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ (306)· ἄρα τὸ ληφθὲν σημεῖον ρ εἶνε προβολὴ τοῦ Ρ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶνε προφανῶς ἓν μόνον σημεῖον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα εἶνε παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ, αἱ κάθετοι Αα, Ββ, Γγ.... εἶνε πᾶσαι ἴσαι· ἡ δὲ τυχοῦσα ἐξ αὐτῶν λαμβάνεται ὡς ἀπόστασις τῆς εὐθείας ἀπὸ τοῦ παραλλήλου πρὸς αὐτὴν ἐπιπέδου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΟΒΟΛΩΝ

1) Ἡ προβολὴ τοῦ σημείου ἐπὶ ἓν ἐπίπεδον δὲν δύναται νὰ προσδιορίσῃ τὸ σημεῖον· διότι π. χ. τὸ σημεῖον, οὗτινος προβολὴ εἶνε τὸ α, δύναται νὰ εὑρίσκηται ὁπουδήποτε ἐπὶ τῆς καθέτου αΑ. Ἀλλ' ἐὰν ἔχωμεν ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α δύο προβολὰς α, α΄ ἐπὶ δύο ἐπίπεδα (μὴ παράλληλα), δυνάμεθα ἐξ αὐτῶν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν ἐξ ἑκατέρας κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῆς· ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον σημεῖον θὰ εὑρίσκηται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν καθέτων τούτων, θὰ εἶνε τὸ σημεῖον τῆς συναντήσεως αὐτῶν.

Καὶ σχῆμα οἱονδήποτε ὁρίζεται διὰ τῶν δύο προβολῶν του ἐπὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα· διότι ἡ θέσις ἑκάστου ἐκ τῶν σημείων του εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη ἐκ τῶν δύο προβολῶν αὐτοῦ.

Ἐπὶ τῆς παραστάσεως ταύτης τῶν σχημάτων βασίζεται ἡ οὕτω καλουμένη ***παραστατικὴ γεωμετρία***, ἥτις παριστᾷ πάντα τὰ σχήματα ἐπὶ ἐπιπέδου καὶ ἐξετάζει αὐτὰ διὰ τῶν δύο προβολῶν των.

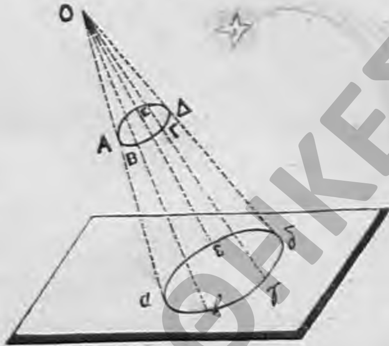
Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς λαμβάνουσι τὸ ἓν ἐπίπεδον τῶν προβολῶν ὁριζόντιον, τὸ δὲ ἄλλο κατακόρυφον· λέγεται δὲ ἡ μὲν ὁριζοντία προβολὴ ***κάτοψις*** τοῦ προβαλλομένου σχήματος, ἡ δὲ ἄλλη ***πρόσοψις*** αὐτοῦ.

2) Ἀντὶ νὰ ἄγωμεν τὰς εὐθείας Αα, Ββ, Γγ... (δι' ὧν προβάλλομεν τὸ σχῆμα) καθέτους πρὸς τὸ ἐπίπεδον τῶν προβολῶν, δυνάμεθα νὰ ἄγωμεν αὐτὰς πλαγίας, παραλλήλους ὅμως· τότε προκύπτουσιν ἄλλαι προβολαί, αἵτινες λέγονται ***πλάγιαι***· αἱ δὲ διὰ καθέτων γινόμεναι λέγονται ***ὀρθαί***.

3) Ἡ προβολὴ σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον γίνεται καὶ κατ' ἄλλον γενικώτερον τρόπον ὡς ἑξῆς· ἄγομεν ἐξ ἑνὸς ὡρισμένου σημείου Ο εἰς τὰ διάφορα σημεῖα Α, Β, Γ... τοῦ σχήματος εὐθείας καὶ τὰ σημεῖα α, β, γ... εἰς ἃ αὗται συναντῶσι τὸ ἐπίπεδον τῶν προβολῶν, θεωροῦμεν ὡς προβολὰς τῶν ὁμωνύμων σημείων τοῦ σχήματος.

Ἡ προβολὴ αὕτη λέγεται ***ὀφθαλμική***· διότι, ἂν ὁ ὀφθαλμὸς εὑρίσκηται εἰς τὸ Ο, ἐξ οὗ ἄγονται αἱ προβάλλουσαι εὐθεῖαι, θὰ ἴδῃ τὰ σημεῖα, Α, Β, Γ... προβεβλημένα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ...

Χρῆσις τῆς προβολῆς ταύτης γίνεται ἐν τῇ ζωγραφικῇ πρὸς ἀπεικόνισιν ἀντικειμένου τινὸς ἐπὶ τοῦ πίνακος· ἡ εἰκὼν παντὸς ἀντικειμένου εἶνε ἡ ὀφθαλμικὴ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πίνακος. ἀπεικονίζομεν δὲ τὰ ἀντικείμενα τοιουτοτρόπως, διότι αἱ οὕτω γινόμεναι εἰκόνες ποιοῦσιν ἐπὶ τῆς ὁράσεως ἡμῶν τὴν αὐτὴν ἐντύπωσιν, ἣν καὶ αὐτὰ τὰ ἀντικείμενα. Ἐπειδὴ δὲ τὸ εἶδος τοῦτο τῆς ἀπεικονίσεως τῶν ἀντικειμένων λέγεται ***σκηνογραφία*** καὶ ἡ προβολή, δι' ἧς ἡ σκηνογραφία γίνεται, λέγεται καὶ ***σκηνογραφική***.



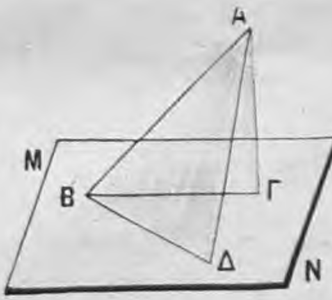
Ἡ ὀφθαλμικὴ προβολὴ καταντᾷ προβολὴ ἁπλῆ, ὅταν τὸ σημεῖον O ἀπομακρύνηται εἰς ἄπειρον· διότι τότε αἱ εὐθεῖαι OA, OB, OΓ... καταντῶσι παράλληλοι.

Παρατηρητέον πρὸς τούτοις, ὅτι ἡ μὲν ὀφθαλμικὴ προβολὴ εἶνε ἡ σκιὰ τοῦ ἀντικειμένου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν προβολῶν, ὅταν τὸ φῶς ἔρχηται ἐκ τοῦ O· ἡ δὲ ἁπλῆ προβολὴ (ἡ διὰ παραλλήλων) εἶνε ἡ σκιὰ αὐτοῦ, ὅταν τὸ φῶς ἔρχηται ἐκ τοῦ ἡλίου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

326. *Ἐὰν εὐθεῖα τέμνῃ ἐπίπεδον, ἡ γωνία, ἣν σχηματίζει μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶνε ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν γωνιῶν ἃς σχηματίζει μετὰ τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.*

Ἔστω εὐθεῖα ἡ AB τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον MN εἰς τὸ σημεῖον B, καὶ BΓ ἡ προβολὴ αὐτῆς· λέγω, ὅτι ἡ γωνία ABΓ εἶνε ἡ ἐλαχίστη ἐκ τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ AB μεθ' οἱασδήποτε εὐθείας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένης, ὡς τῆς BΔ.



Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ A κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ἡ AΓ καὶ ἂς ληφθῇ BΔ=BΓ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ AΔ.

Τὰ δύο τρίγωνα ABΓ καὶ ABΔ ἔχωσι τὴν AB κοινήν, τὴν BΔ ἴσην τῇ BΓ, ἀλλὰ τὴν πλευρὰν AΓ μικροτέραν τῆς AΔ (διότι ἡ μὲν AΓ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ AΔ πλαγία)· ἄρα ἡ γωνία ABΓ εἶνε μικροτέρα τῆς ABΔ, ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει εὐθεῖά τις μετὰ τῆς προβολῆς της ἐπὶ ἐπίπεδον, λέγεται *κλίσις τῆς εὐθείας πρὸς τὸ ἐπίπεδον*.

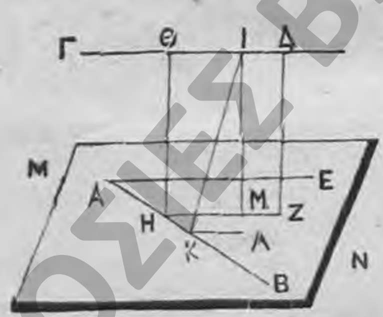
ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ, ΑΙΤΙΝΕΣ ΔΕΝ ΚΕΙΝΤΑΙ ΕΦ' ΕΝΟΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι δὲν κεῖνται πάντοτε ἐφ' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἐὰν δηλονότι ἀχθῇ ἐπίπεδον διὰ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν καὶ δι' ἑνὸς σημείου τῆς ἄλλης, ἡ ἄλλη αὕτη δύναται νὰ μὴ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου. (Τοιαῦται εἶνε λ.χ αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ προηγουμένου σχήματος). Περὶ τῶν τοιούτων εὐθειῶν ἔχομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

327. *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὑπάρχει κοινὴ αὐτῶν κάθετος καὶ μία μόνη, εἶνε δὲ αὕτη ἡ ἐλαχίστη τῶν δύο εὐθειῶν ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασις.*

Ἔστωσαν τοιαῦται εὐθεῖαι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐκ τινος σημείου Α τῆς ΑΒ ἂς ἀχθῇ ἡ ΑΕ παράλληλος τῇ ΓΔ· αἱ δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΕ ὁρίζουσι τὴν θέσιν ἐπιπέδου τινὸς ΜΝ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε (311) παράλληλον τῇ ΓΔ· ἂς ἀχθῇ ἔπειτα ἐκ τινος σημείου τῆς ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἡ ΔΖ καὶ ἐκ τοῦ Ζ παράλληλος τῇ ΕΑ ἡ ΖΗ



καὶ ἐκ τοῦ Η ἡ ΗΘ παράλληλος τῇ ΔΖ, ἥτις θὰ τέμνῃ τὴν ΓΔ εἴς τι σημεῖον Θ (διότι ἡ ΗΘ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΗΖΔΓ τῶν δύο παραλλήλων ΗΖ καὶ ΓΔ)· λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ εἶνε ἡ κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

Καὶ ὄντως ἡ ΗΘ, ὡς παράλληλος τῇ ΔΖ, εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἄρα κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ εἶνε δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΗΖ ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῇ ΓΔ.

Ἄλλη κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΓΔ δὲν ὑπάρχει· διότι ἔστω τοιαύτη ἡ ΙΚ· αὕτη κάθετος οὖσα ἐπὶ τὴν ΓΔ, θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον αὐτῆς ΚΛ τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Κ· οὖσα δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ, θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ἀλλ' ἂν ἐκ τοῦ Ι (ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΘΔΖΗ) ἀχθῇ ἡ ΙΜ παράλληλος τῇ ΔΖ, αὕτη θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· θὰ ἦσαν λοιπὸν ἐκ τοῦ Ι δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ὅπερ ἀδύνατον.

Τέλος ἡ κοινὴ κάθετος ΗΘ εἶνε μικροτέρα πάσης ἄλλης εὐθείας συνδεούσης τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, οἷον τῆς ΙΚ· διότι ἡ ΙΜ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, ἡ δὲ ΙΚ πλαγία· ἄρα ΙΜ<ΙΚ· ἀλλ' ἡ ΙΜ εἶνε ἴση τῇ ΗΘ· ἄρα ΘΗ<ΙΚ· ὅ. ἔ. δ.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Αἱ διάφοροι θέσεις δύο ἐπιπέδων πρὸς ἄλληλα εἶνε δύο·
 ἢ τέμνουσιν ἄλληλα κατά τινα εὐθεῖαν,
 ἢ εἶνε παράλληλα.
Αἱ διάφοροι θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου πρὸς ἄλληλα εἶνε τρεῖς,
 ἢ οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον, ὅτε εἶνε παράλληλα,
 ἢ ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, ὅτε ἡ εὐθεῖα τέμνει τὸ ἐπίπεδον καὶ διαπερᾷ αὐτό,
 ἢ κεῖται ἡ εὐθεῖα ὅλη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (26).
Αἱ δὲ διάφοροι θέσεις δύο εὐθειῶν πρὸς ἀλλήλας εἶνε τρεῖς·
 ἢ τέμνουσιν ἀλλήλας, } τότε κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.
 ἢ εἶνε παράλληλοι, }
 ἢ δὲν κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅτε οὔτε τέμνουσιν ἀλλήλας οὔτε παράλληλοι εἶνε.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΔΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

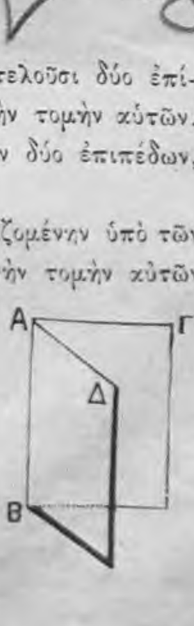
323 8

ΟΡΙΣΜΟΙ

328. *Δίεδρος γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα καὶ περατούμενα εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν.

Ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας λέγεται ἡ τομὴ τῶν δύο ἐπιπέδων, *ἕδραι* δὲ αὐτῆς τὰ ἐπίπεδα.

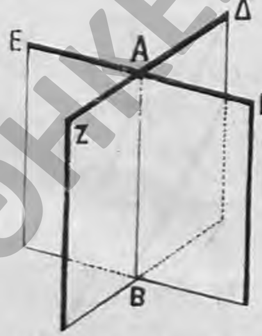
Τὸ σχῆμα ΔΑΒΓ παριστᾷ δίεδρον γωνίαν σχηματιζομένην ὑπὸ τῶν ἐπιπέδων ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ, περατουμένων εἰς τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν ΑΒ· ἡ ΑΒ εἶνε ἡ ἀκμὴ τῆς διέδρου γωνίας· τὰ δὲ ἐπίπεδα ΔΑΒ καὶ ΓΑΒ εἶνε αἱ ἕδραι αὐτῆς.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν δίεδρον γωνίαν παριστῶμεν διὰ δύο γραμμάτων γραφομένων ἐπὶ τῆς ἀκμῆς, ἢ (ἂν πολλαὶ δίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὴν αὐτὴν ἀκμὴν) διὰ τεσσάρων, ὧν δύο μὲν γράφονται ἐπὶ τῆς ἀκμῆς, ἀνὰ ἓν δὲ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν· οἷον ἡ δίεδρος γωνία τοῦ παρακειμένου σχήματος σημειοῦται ΔΑΒΓ, ἢ ἁπλῶς ΑΒ·

Ἴσαι λέγονται αἱ δίεδροι γωνίαι, ἐὰν δύνανται νὰ τεθῶσιν οὕτως, ὥστε νὰ ἀποτελέσωσι μίαν μόνην.

Ἐφεξῆς λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ἐὰν ἔχωσι τὴν ἀκμὴν καὶ μίαν ἕδραν κοινά, τὰς δὲ ἄλλας ἕδρας ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς· τοιαῦται εἶνε αἱ δίεδροι γωνίαι ΕΑΒΖ καὶ ΖΑΒΓ.

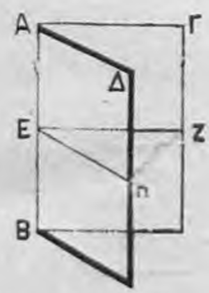


Κατὰ κορυφὴν δὲ λέγονται δύο δίεδροι γωνίαι, ὅταν γίνωνται ὑπὸ δύο ἐπιπέδων διατεμνόντων ἄλληλα καὶ ἔχωσι μόνον τὴν ἀκμὴν κοινήν, ἀλλ' ἕδρας διαφόρους· τοιαῦται εἶνε αἱ δίεδροι γωνίαι ΔΑΒΓ καὶ ΕΑΒΖ.

Κάθετα λέγονται δύο ἐπίπεδα πρὸς ἄλληλα, ἐὰν διατέμνοντα ἄλληλα σχηματίζωσι τέσσαρας διέδρους γωνίας ἴσας· αἱ δὲ γωνίαι αὗται λέγονται *ὀρθαὶ* δίεδροι γωνίαι.

Ὅταν δίεδρος γωνία τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ἀκμὴν αὐτῆς, ἡ προκύπτουσα ἐπίπεδος γωνία λέγεται *ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον.*

Οὕτως ἡ ἐπίπεδος γωνία ΗΕΖ, ἥτις προκύπτει, ὅταν τμηθῇ ἡ δίεδρος δι' ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΒ, εἶνε ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον ΑΒ.

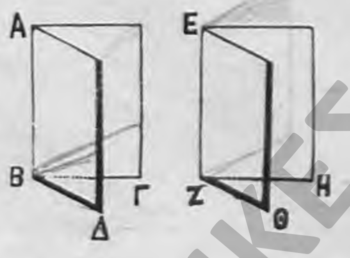


Εἶνε δὲ ἀδιάφορον, ἐκ τίνος σημείου τῆς ἀκμῆς θὰ ἀχθῇ τὸ κάθετον ἐπ' αὐτὴν ἐπίπεδον· διότι πᾶσαι αἱ οὕτω προκύπτουσαι ἐπίπεδοι γωνίαι εἶνε ἴσαι ἀλλήλαις. Ἔστωσαν τῷ ὄντι δύο τοιαῦται γωνίαι αἱ ΖΕΗ καὶ ΓΑΔ· τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν, ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, εἶνε παράλληλα καὶ διὰ τοῦτο αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ἑδρῶν θὰ εἶνε παράλληλοι· ἄρα αἱ ΑΓ καὶ ΕΖ εἶνε παράλληλοι· καὶ αἱ ΑΔ καὶ ΕΗ ὡσαύτως· ἐπομένως αἱ γωνίαι ΖΕΗ καὶ ΓΑΔ εἶνε ἴσαι. 322

ΘΕΩΡΗΜΑ

329. *Δύο δίεδροι γωνίαι εἶνε ἴσαι, ἐὰν αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

Ἔστωσαν δίεδροι γωνίαι αἱ ΑΒ καὶ ΕΖ, ἔχουσαι ἴσας τὰς ἀντι-



στοιχούσας ἐπιπέδους γωνίας ΓΒΔ καὶ ΗΖΘ· λέγω, ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶνε ἴσαι.

Διότι, ὅταν ἡ ἐπίπεδος γωνία ΗΖΘ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης της ΓΒΔ, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΖΕ ἐπὶ τῆς ΒΑ· διότι ἀμφότεραι θὰ εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον (τὸ τῶν γωνιῶν) εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Β· ἄρα θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν ΗΖ καὶ ΖΕ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΓΒ καὶ ΒΑ, τουτέστιν ἡ ἕδρα ΗΖΕ ἐπὶ τῆς ἕδρας ΓΒΑ· ὡσαύτως θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἕδρα ΘΖΕ ἐπὶ τῆς ἕδρας ΔΒΑ· ὥστε αἱ δίεδροι γωνίαι εἶνε ἴσαι.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ ἀντίστροφος πρότασις, τουτέστιν,

Ὅταν αἱ δίεδροι γωνίαι εἶνε ἴσαι, καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι εἶνε ἴσαι εἶνε ἀφ' ἑαυτῆς φανερά.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

330. *Τῶν ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι εἶνε ὀρθαί*, καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

331. *Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

Διότι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι πρὸς αὐτὰς ἐπίπεδοι εἶνε ἴσαι.

Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι δύο ἐπίπεδα εἶνε κάθετα πρὸς ἄλληλα, ἐὰν ἐκ τῶν τεσσάρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι, δύο ἐφεξῆς εἶνε ἴσαι.

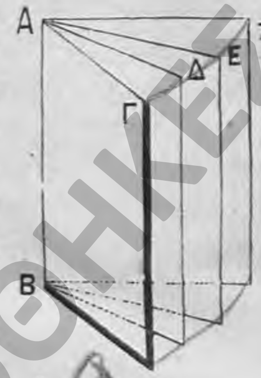
ΘΕΩΡΗΜΑ

332. *Δύο δίεδροι γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι γωνίαι.*

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 224 ἀρκεῖ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς διπλασίαν δίεδρον ἀντιστοιχεῖ διπλασία ἐπίπεδος, εἰς τριπλασίαν, τριπλασία, κτλ.

Ἔστω τυχοῦσα δίεδρος γωνία ἡ ΓΑΒΔ καὶ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς αὐτὴν ἐπίπεδος ἡ ΓΑΔ.

Ἂς ἐπαναληφθῇ τρὶς ἡ γωνία ΓΑΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, ἤτοι ἂς γίνωσιν αἱ γωνίαι ΔΑΕ, ΕΑΖ, ἴσαι τῇ ΓΑΔ· ἐὰν διὰ τῆς ἀκμῆς ΑΒ καὶ διὰ τῶν εὐθειῶν ΑΕ, ΑΖ ἀχθῶσιν ἐπίπεδα γίνονται δίεδροι γωνίαι, αἱ ΔΑΒΕ, ΕΑΒΖ ἴσαι τῇ ΓΑΒΔ· διότι αἱ πρὸς αὐτὰς ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι εἶνε ἴσαι τῇ ΓΑΔ· εἶνε λοιπὸν ἡ μὲν δίεδρος γωνία ΓΑΒΕ, διπλασία τῆς ΓΑΒΔ καὶ ἀντιστοιχεῖ πρὸς αὐτὴν διπλασία ἐπίπεδος, ἡ ΓΑΕ, ἡ δὲ δίεδρος γωνία ΓΑΒΖ τριπλασία τῆς ΓΑΒΔ καὶ ἀντιστοιχεῖ πρὸς αὐτὴν τριπλασία ἐπίπεδος, ἡ ΖΑΓ. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι δύο τυχοῦσαι δίεδροι γωνίαι ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι γωνίαι.



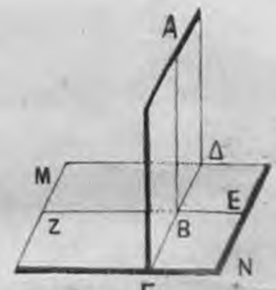
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὡς μέτρον τῆς διέδρου γωνίας λαμβάνεται διὰ τοῦτο ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος γωνία· ἤτοι παρίστανται ἀμφότεραι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

333. *Ἐὰν εὐθεῖα εἶνε κάθετος πρὸς ἐπίπεδον καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς διερχόμενα ἐπίπεδα εἶνε κάθετα πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.*

Ἔστω ἐπίπεδον τὸ ΜΝ καὶ κάθετος πρὸς αὐτὸ ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τυχὸν ἐπίπεδον δι' αὐτῆς διερχόμενον τὸ ΓΔΑ· λέγω, ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἶνε κάθετον πρὸς τὸ ΜΝ.

Ἐκ τοῦ σημείου Β τῆς κοινῆς τομῆς ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων ἂς ἀχθῇ ἡ ΕΒΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ· τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ εἶνε τότε κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ (διότι ἀμφότεραι αἱ ΑΒ, ΒΕ εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ), ἐπειδὴ δὲ ἡ ΒΓ εἶνε ἡ κοινὴ ἀκμὴ τῶν διέδρων γωνιῶν ΑΓΔΕ καὶ ΑΓΔΖ, ἔπεται, ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΕΒΑ καὶ ΖΒΑ ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς διέδρους ταύτας· ἀλλ' αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ΕΒΑ καὶ ΖΒΑ εἶνε ὀρθαὶ (διότι ἡ ΒΑ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ), ἄρα καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΓΔΕ, ΑΓΔΖ εἶνε ὀρθαί· τουτέστι τὰ ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΜΝ εἶνε κάθετα πρὸς ἄλληλα.



ΘΕΩΡΗΜΑ

334. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶνε κάθετα πρὸς ἄλληλα, πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἐν τῷ ἑτέρῳ τῶν ἐπιπέδων ἄγεται κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν αὐτῶν, εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο.*

Ἔστωσαν δύο ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα τὰ ΑΓΔ καὶ ΜΝ· καὶ ἐν τῷ πρώτῳ ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν αὐτῶν τομὴν ΓΔ· λέγω, ὅτι ἡ ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

Διότι αἱ δύο δίεδροι γωνίαι ΑΓΔΜ καὶ ΑΓΔΝ εἶνε ἴσαι· ἐὰν δὲ διὰ τοῦ σημείου τῆς κοινῆς αὐτῶν ἀκμῆς ΓΔ ἀχθῇ ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΜΝ, αἱ δύο ἐπίπεδοι γωνίαι ΑΒΕ καὶ ΑΒΖ ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς διέδρους (διότι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ)· ἄρα εἶνε ἴσαι καὶ διὰ τοῦτο ὀρθαί· ὥστε ἡ ΒΑ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας ΒΔ καὶ ΕΖ· ἄρα κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΜΝ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

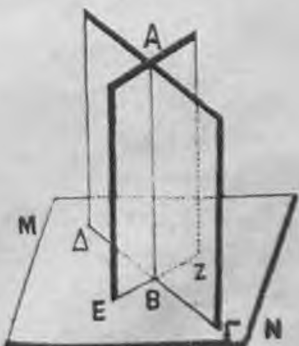
335. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶνε κάθετα πρὸς ἄλληλα, ὡς τὰ ΜΝ καὶ ΑΓΔ, καὶ ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Α τοῦ ἑνὸς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο, αὕτη θὰ κεῖται ὅλη ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ.*

Διότι, ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἐναντίον, δυνάμεθα ἐκ τοῦ σημείου Α νὰ φέρωμεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων, ἥτις κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν, θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, κειμένη ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΓΔ· τότε δὲ ἐκ τοῦ σημείου Α θὰ ἦσαν δύο κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ· ὅπερ ἄτοπον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

336. *Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα εἶνε ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ ἄλλο, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.*

Ἔστωσαν τὰ δύο ἐπίπεδα ΑΓΔ καὶ ΑΕΖ ἀμφότερα κάθετα ἐπὶ τὸ ΜΝ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν ΑΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ΜΝ.



Διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Α τῆς κοινῆς τομῆς ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ, αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐν τῷ πρώτῳ ἐπιπέδῳ καὶ ἐν τῷ δευτέρῳ· ἄρα θὰ εἶνε ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ ΑΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Περὶ τῶν διέδρων γωνιῶν δύνανται νὰ ἀποδειχθῶσι καὶ ἄλλα θεωρήματα (διὰ τῆς βοηθείας τῶν ἀντιστοιχουσῶν ἐπιπέδων γωνιῶν) ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀποδειχθέντα περὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν. Ἐκ τούτων ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς:

1) Δι' ἑκάστης εὐθείας κειμένης ἐν ἐπιπέδῳ ἄγεται ἐπίπεδον κάθετον ἐπ' αὐτὸ καὶ ἓν μόνον.

2) Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐφεξῆς διέδρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουσι δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα, εἶνε δύο ὀρθαὶ δίεδροι γωνίαι.

3) Τὸ ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου.

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

337. *Στερεὰ γωνία* λέγεται τὸ σχῆμα, ὅπερ ἀποτελοῦσι τρία ἢ περισσότερα ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ περατούμενα ἕκαστον εἰς τὰς δύο εὐθείας, καθ' ἃς τέμνεται ὑπὸ τῶν πλησίον αὐτοῦ δύο ἐπιπέδων.

Τὰ ἐπίπεδα τὰ τὴν στερεὰν γωνίαν σχηματίζοντα, λέγονται *ἕδραι* αὐτῆς· αἱ δὲ τομαὶ αὐτῶν (ἑκάστου ὑπὸ τῶν δύο πλησίον αὐτοῦ) λέγονται *ἀκμαὶ* τῆς στερεᾶς γωνίας· καὶ τὸ σημεῖον, εἰς ὃ αἱ ἀκμαὶ πᾶσαι συνέρχονται, λέγεται *κορυφὴ* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦσιν αἱ ἀκμαὶ ἑκάστης τῶν ἑδρῶν λέγονται καὶ αὐταὶ *ἕδραι* ἢ *ἐπίπεδοι γωνίαι* τῆς στερεᾶς γωνίας· αἱ δὲ γωνίαι, τὰς ὁποίας ἀποτελοῦσιν αἱ δι' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν διερχόμεναι ἕδραι, λέγονται *δίεδροι γωνίαι* τῆς στερεᾶς γωνίας.

Τὸ σχῆμα ΟΑΒΓ παριστᾷ στερεὰν γωνίαν.

Ἕδραι αὐτῆς εἶνε τὰ τρία ἐπίπεδα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ, ὑφ' ὧν σχηματίζεται· ἀκμαὶ αὐτῆς εἶνε αἱ εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, καθ' ἃς τέμνονται τὰ ἐπίπεδα, καὶ κορυφὴ αὐτῆς τὸ Ο.

Τρίεδρος λέγεται ἡ στερεὰ γωνία ἡ τρεῖς ἕδρας μόνον ἔχουσα.

Κυρτὴ λέγεται ἡ στερεὰ γωνία, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτῆς ἐκβαλλομένη ἀφίνῃ τὴν στερεὰν γωνίαν ὁλόκληρον πρὸς ἓν μέρος αὐτῆς.

Ἐν τοῖς ἑξῆς ὁ λόγος γίνεται μόνον περὶ κυρτῶν γωνιῶν.

338. Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ στερεᾶς γωνίας προεκβληθῶσι πᾶσαι πέραν τῆς

κορυφῆς, σχηματίζεται νέα στερεὰ γωνία, ἥτις λέγεται *κατὰ κορυφὴν* ἢ *συμμετρικὴ* τῆς πρώτης.

Τοιαῦται εἶνε αἱ στερεαὶ γωνίαι ΟΑΒΓ καὶ ΟΑ΄Β΄Γ΄.

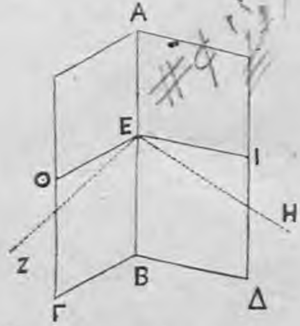
Δύο κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι ἔχουσι προδήλως καὶ τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς διέδρους ἐπίσης ἴσας (διότι, παραδείγματος χάριν, αἱ δίεδροι γωνίαι ΟΒ καὶ ΟΒ΄ γίνονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν δύο ἐπιπέδων), τουτέστιν ἔχουσι τὰ αὐτὰ στοιχεῖα. Ἀλλ᾽ ὅμως δὲν δύνανται ἐν γένει νὰ ἐφαρμόσωσιν. Ἐὰν τῷ ὄντι ὑποτεθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΟΑ΄ καὶ ΓΟΓ΄ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ χάρτου καὶ ἡ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ἡ ΟΒ΄ θὰ εἶνε ὄπισθεν τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἑπομένως, ὅταν περιστρέψωμεν τὴν γωνίαν Γ΄ΟΑ΄ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτῆς, μέχρις οὗ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΓΟΑ, θὰ πέσῃ ἡ ΟΑ΄ ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ ἡ ΟΓ΄ ἐπὶ τῆς ΟΓ, ἀλλ᾽ ἡ ΟΒ θὰ εὑρίσκηται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΓ, ἐνῷ ἡ ΟΒ εἶνε ἔμπροσθεν αὐτοῦ. Ἐὰν δὲ πάλιν ἐφαρμόσωμεν τὴν γωνίαν Γ΄ΟΑ΄ ἐπὶ τῆς ΑΟΓ οὕτως, ὥστε νὰ πέσῃ ἡ ΟΓ΄ ἐπὶ τῆς ΟΑ καὶ ἡ ΟΑ΄ ἐπὶ τῆς ΟΓ, θὰ ἔλθῃ ἡ δίεδρος γωνία ΟΑ΄ εἰς τὴν δίεδρον ΟΓ καὶ ἡ δίεδρος ΟΓ΄ εἰς τὴν δίεδρον ΟΑ, ὥστε καὶ πάλιν δὲν ἐφαρμόζουσιν, ἐκτὸς ἐὰν αἱ δίεδροι γωνίαι ΟΑ καὶ ΟΓ εἶνε ἴσαι, ἤτοι, ἂν ἡ τρίεδρος στερεὰ γωνία ἔχῃ δύο διέδρους ἴσας· διότι τότε ἐφαρμόζουσιν. Αἱ τοιαῦται στερεαὶ γωνίαι ἂς λέγωνται *ἰσοσκελεῖς*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

339. *Ἐὰν ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἀκμῆς διέδρου γωνίας ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἕδρας αὐτῆς ἑκατέρα δὲ τῶν καθέτων τούτων ἀχθῇ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου της, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ἄλλη ἕδρα, ἡ γωνία τῶν δύο τούτων καθέτων θὰ εἶνε παραπλήρωμα τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον.*

Ἔστω δίεδρος γωνία ἡ ΑΒ καὶ τυχὸν σημεῖον τῆς ἀκμῆς τὸ Ε καὶ ἐξ αὐτοῦ ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΔ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ἕδρα ΑΒΓ, καὶ ἡ ΕΗ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΑΒΓ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς, πρὸς ὃ εὑρίσκεται καὶ ἡ ΑΒΔ.

Τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο καθέτων, τὸ ΖΕΗ, εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ τέμνει τὰς ἕδρας κατὰ τὰς εὐθείας ΕΘ καὶ ΕΙ, ὧν ἡ γωνία, ἡ ΘΕΙ, ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ΕΖ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΔ, ἡ γωνία ΖΕΙ εἶνε ὀρθή· δι' ὅμοιον λόγον καὶ ἡ γωνία ΗΕΘ εἶνε ὀρθή· ἄρα εἶνε $ΗΕΘ+ΖΕΙ=2$ ὀρθ.



καὶ ἐπειδὴ $ΗΕΘ=ΗΕΖ+ΖΕΘ$, ἕπεται·

$$ΗΕΖ+ΖΕΘ+ΖΕΙ=2 \text{ ὀρθ.}$$

ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $ΖΕΘ+ΖΕΙ$ ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ ΘΕΙ· ὅθεν συνάγεται

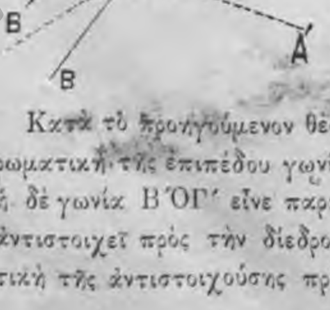
$ΘΕΙ+ΖΕΗ=2$ ὀρθ. ὅ. ἔ. δ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ, ΕΗ κεῖνται ἐντὸς τῆς διέδρου γωνίας, ἐὰν ἡ δίεδρος γωνία (ἤτοι ἡ ἀντίστοιχος αὐτῇ ἐπίπεδος ΘΕΙ) εἶνε ἀμβλεῖα· ἐκτὸς δ' αὐτῆς, ἐὰν ἡ δίεδρος γωνία εἶνε ὀξεῖα· συμπίπτουσι δὲ ταῖς ΕΘ, ΕΙ, ἐὰν ἡ δίεδρος γωνία εἶνε ὀρθή.

ΘΕΩΡΗΜΑ

340. *Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς τριέδρου γωνίας ἀχθῶσι κάθετοι ἐπὶ τὰς τρεῖς ἕδρας, ἑκάστη πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου της, πρὸς τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται καὶ ἡ τρίτη ἀκμή, ἡ τρίεδρος γωνία, ἡ ἔχουσα ἀκμὰς τὰς τρεῖς ταύτας καθέτους, εἶνε παραπληρωματικὴ τῆς δοθείσης, ἤτοι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς μιᾶς εἶνε παραπληρώματα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ἄλλης.*

Ἔστω τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΓ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ μὲν ΟΑ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΟΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἔνθα εὑρίσκεται καὶ ἡ ἀκμὴ ΟΑ (τουτέστιν ἡ γωνία ΑΟΑ΄ νὰ εἶνε ὀξεῖα), ἡ δὲ ΟΒ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΟΑΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἔνθα εὑρίσκεται καὶ ἡ ΟΒ, καὶ τέλος ἡ ΟΓ΄ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν ΟΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς, ἔνθα εὑρίσκεται καὶ ἡ ΟΓ.



Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ μὲν γωνία Α΄ΟΒ΄ εἶνε παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον ΟΓ, ἡ δὲ γωνία Β΄ΟΓ΄ εἶνε παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον ΟΑ· καὶ ἡ Γ΄ΟΑ΄ εἶνε παραπληρωματικὴ τῆς ἀντιστοιχούσης πρὸς τὴν δίεδρον ΟΒ· ὥστε αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας ΟΑ'Β'Γ' εἶνε παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΟΑΒΓ.

Ἀλλὰ καὶ τὸ ἀντίστροφον συμβαίνει· τουτέστιν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΟΑΒΓ εἶνε παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων τῆς ΟΑ'Β'Γ'.

Τῷ ὄντι ἡ ΟΓ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ' (διότι ἡ ΟΑ ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΟΓ), εἶνε δὲ κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΟΒ' (διότι ἡ ΟΒ' ἤχθη κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΟΑ)· ἄρα ἡ ΟΓ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν ΟΑ', ΟΒ', ἤτοι ἐπὶ τὴν ἕδραν Α'ΟΒ'. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΟΑ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Β'ΟΓ', καὶ ἡ ΟΒ κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν Γ'ΟΑ'· εὑρίσκεται δὲ ἡ ΟΑ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἕδρας Β'ΟΓ' (ἐφ' ἣν εἶνε κάθετος), πρὸς ὃ καὶ ἡ ἀκμὴ ΟΑ'· διότι ἡ γωνία ΑΟΑ' εἶνε ὀξεῖα. Ὅμοιον δὲ ἀληθεύει καὶ περὶ τῶν δύο ἄλλων ΟΒ, ΟΓ. Ἐπομένως ἡ στερεὰ γωνία ΟΑΒΓ προκύπτει ἐκ τῆς ΟΑ'Β'Γ', καθ' ὃν τρόπον προέκυψεν ἡ ΟΑ'Β'Γ' ἐκ τῆς ΟΑΒΓ. Ἄρα αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς ΟΑΒΓ εἶνε παραπληρωματικαὶ τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς ΟΑ'Β'Γ'.

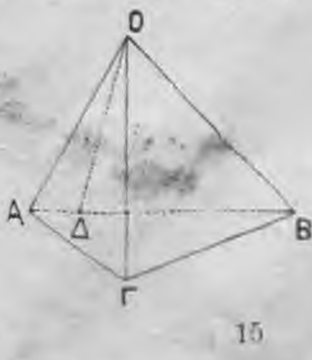
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ νέα στερεὰ γωνία συμπίπτει τῇ δοθείσῃ, ὅταν ἡ δοθεῖσα ἔχῃ τὰς ἀκμὰς αὐτῆς καθέτους πρὸς ἀλλήλας ἀνὰ δύο. Ἡ τρίεδρος γωνία, ἥτις ἔχει τὰς τρεῖς αὐτῆς ἀκμὰς καθέτους πρὸς ἀλλήλας ἀνὰ δύο, ἔχει ὀρθὰς τὰς διέδρους αὐτῆς γωνίας (ὡς καὶ τὰς ἐπιπέδους) καὶ λέγεται *τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία.*) Ἐν τῷ ...

ΘΕΩΡΗΜΑ

341. *Ἐν πάσῃ τριέδρῳ στερεᾷ γωνίᾳ ἑκάστη τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.*

Τὸ θεώρημα χρήζει ἀποδείξεως, μόνον ὅταν ἡ ἐπίπεδος γωνία, τὴν ὁποίαν συγκρίνομεν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, ὑπερβαίνῃ ἑκατέραν ἐξ αὐτῶν.

Ἔστω λοιπὸν τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΓ, ἐν τῇ ὁποίᾳ ἡ γωνία ΑΟΒ ὑποτίθεται μεγαλητέρα καὶ τῆς ΒΟΓ καὶ τῆς ΓΟΑ· λέγω, ὅτι εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.



Ἂς ἀχθῇ τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ΑΒ, τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΑΟΒ καὶ ἂς σχηματισθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΑΟΒ ἡ γωνία ΒΟΔ ἴση τῇ ΒΟΓ. Ἡ πλευρὰ ΟΔ θὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Δ·

ἂς ληφθῇ ἔπειτα ἡ ΟΓ ἴση τῇ ΟΔ καὶ ἂς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΓ.

Τὰ τρίγωνα ΟΒΓ καὶ ΟΒΔ εἶνε ἴσα· διότι ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν ΓΟΒ ἴσην τῇ ΔΟΒ) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἴσας (ΟΔ=ΟΓ καὶ ΟΒ=ΟΒ)· ἐπομένως εἶνε ΒΓ=ΒΔ.

Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εὑρίσκομεν

$$ΑΒ<ΑΓ+ΒΓ,$$

ἀφαιροῦντες δ' ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἀνίσων τὰς ἴσας ΒΓ καὶ ΒΔ, λαμβάνομεν ΑΔ<ΑΓ.

Συγκρίνοντες νῦν τὰ δύο τρίγωνα ΑΟΔ καὶ ΑΟΓ, βλέπομεν, ὅτι ἔχουσι δύο πλευρὰς ἴσας (ΑΟ=ΑΟ καὶ ΟΔ=ΟΓ), τὴν δὲ τρίτην ἄνισον (ΑΔ<ΑΓ)· ἄρα εἶνε καὶ ΑΟΔ<ΑΟΓ·

προσθέτοντες δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ ἄνισα τὰς ἴσας γωνίας ΔΟΒ καὶ ΓΟΒ, εὑρίσκομεν

$$ΑΟΒ<ΑΟΓ+ΓΟΒ$$

ὅ. ἔ. δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

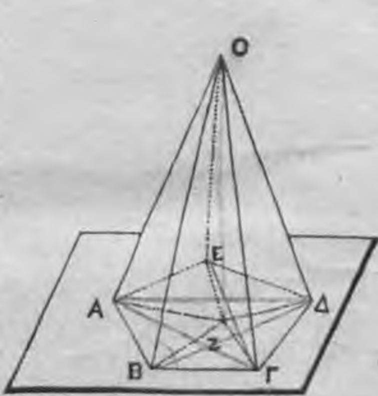
342. *Ἐν πάσῃ κυρτῇ στερεᾷ γωνίᾳ τὸ ἄθροισμα πασῶν τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶνε μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν.*

Ἔστω κυρτὴ στερεὰ γωνία ἡ Ο· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων αὐτῆς γωνιῶν

$$ΑΟΒ+ΒΟΓ+ΓΟΔ+ΔΟΕ+ΕΟΑ$$

εἶνε μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν.

Ἂς ἀχθῇ τυχὸν ἐπίπεδον τέμνον πάσας τὰς ἀκμὰς τῆς στερεᾶς γωνίας (γίνεται δὲ τοῦτο, ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ ἐγγίζῃ τὴν στερεὰν γωνίαν μόνον εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ ἔπειτα ἄλλο ἐπίπεδον παράλληλον τούτου καὶ πρὸς τὸ μέρος τῶν ἀκμῶν)· ἂς τέμνῃ δ' αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα, Α, Β, Γ, Δ, Ε. Ἂς ληφθῇ ἔπειτα ἐντὸς τοῦ σχηματιζομένου πολυγώνου ΑΒΓΔΕ σημεῖον οἱονδήποτε, τὸ Ζ, καὶ ἂς ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, αἱ ΖΑ, ΖΒ, ΖΓ, ΖΔ, ΖΕ.



Τὰ τρίγωνα, τὰ ἔχοντα κορυφὴν τὸ Ο, εἶνε τόσα, ὅσα εἶνε καὶ τὰ ἔχοντα κορυφὴν τὸ Ζ· διὰ τοῦτο καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ δεύτερα ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν. Ἀλλ' εἰς τὸ σημεῖον Β, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, εἶνε

$$ABO + OB\Gamma > AB\Gamma,$$

ἢ

$$ABO + OB\Gamma > ABZ + ZB\Gamma\cdot$$

τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ εἰς τὰς ἄλλας κορυφὰς τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

Ἄρα αἱ πρὸς τὰς βάσεις γωνίαι τῶν τὴν στερεὰν γωνίαν Ο ἀποτελούντων τριγώνων ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον ἢ αἱ πρὸς τὰς βάσεις γωνίαι τῶν τὸ πολύγωνον ἀποτελούντων· ἑπομένως, πρὸς ἐξίσωσιν, τὸ ἄθροισμα τῶν περὶ τὸ Ο γωνιῶν (τῶν πρώτων τριγώνων) θὰ εἶνε μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν περὶ τὸ Ζ· ἀλλ' αἱ περὶ τὸ Ζ γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα τέσσαρας ὀρθάς· ἄρα αἱ περὶ τὸ Ο γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν· ὅ. ἔ. δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

343. *Ἐν πάσῃ τριέδρῳ στερεᾷ γωνίᾳ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων γωνιῶν εἶνε μεγαλήτερον μὲν δύο, μικρότερον δὲ ἓξ ὀρθῶν· καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν, αὐξηθεῖσα κατὰ δύο ὀρθάς, ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.*

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς τυχούσης τριέδρου γωνίας καὶ Α, Β, Γ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς παραπληρωματικῆς αὐτῆς· κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 340 εἶνε

$$\alpha = 2^{\text{ὀρθ.}} - A,\quad \beta = 2^{\text{ὀρθ.}} - B,\quad \gamma = 2^{\text{ὀρθ.}} - \Gamma,$$

ὅθεν

$$\alpha + \beta + \gamma = 6^{\text{ὀρθ.}} - (A + B + \Gamma),$$

ἐξ οὗ φαίνεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ εἶνε μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀφαιρούμενον ἄθροισμα $A + B + \Gamma$ εἶνε μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν (342), συνάγεται, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον $\alpha + \beta + \gamma$ ὑπερβαίνει τὰς δύο ὀρθάς.

Ἵνα ἀποδείξωμεν τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως, παρατηροῦμεν, ὅτι εἶνε (341)

$$A < B + \Gamma$$

καὶ ἐπειδὴ $A = 2^{\text{ὀρθ.}} - \alpha,\quad B = 2^{\text{ὀρθ.}} - \beta,\quad \Gamma = 2^{\text{ὀρθ.}} - \gamma,$

ἡ ἀνισότης γίνεται $2 - \alpha < 2 - \beta + 2 - \gamma$

καὶ ἂν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ ἄνισα τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ καὶ ἔπειτα ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων 2 ὀρθάς, εὑρίσκομεν

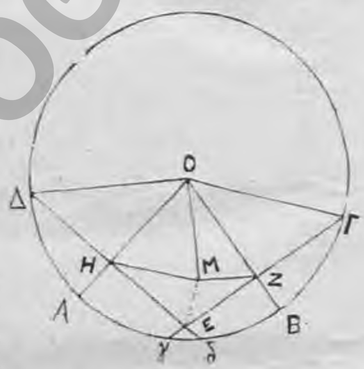
$$\beta + \gamma < \alpha + 2.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

344. *Ἐκ τριῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, ὧν ἑκάστη εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶνε μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν, δύναται νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία.*

Ἂς τεθῶσιν αἱ τρεῖς γωνίαι εἰς ἓν ἐπίπεδον ἐφεξῆς ἀλλήλαις, ἂς τεθῇ δὲ εἰς τὸ μέσον ἡ μεγίστη (ἢ ἡ μηδεμιᾶς μικροτέρα)· ἔστωσαν δὲ αὗται αἱ ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΔΟΑ. Ἐκ τῆς κοινῆς αὐτῶν κορυφῆς Ο, ὡς κέντρου, ἂς γραφῇ τυχοῦσα περιφέρεια τέμνουσα τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ.

Ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ, ὅπερ δὲν εἶνε μικρότερον τοῦ ΒΓ (διότι ἡ γωνία ΑΟΒ δὲν εἶνε μικροτέρα τῆς ΒΟΓ), ἂς ληφθῇ μέρος ἴσον τῷ ΒΓ, ἔστω τὸ Βγ, καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ χορδὴ Γγ, ἥτις θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ. Ὁμοίως ἂς ληφθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ μέρος, τὸ Αδ, ἴσον τῷ ΑΔ καὶ ἂς ἀχθῇ ἡ χορδὴ Δδ, ἥτις θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ. Τὸ σημεῖον δ πίπτει μεταξὺ γ καὶ Β (ἄλλως θὰ περιεῖχε τὸ τόξον ΑΒ ἀμφότερα τὰ τόξα ΑΔ καὶ ΒΓ, ἤτοι τὰ ἴσα αὐτῶν Αδ καὶ Βγ, ἑπομένως καὶ ἡ γωνία ΑΟΒ θὰ ἦτο μεγαλητέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων· ὅπερ ἐναντίον τῇ ὑποθέσει).



Διὰ τοῦτο αἱ χορδαὶ Γγ, Δδ θὰ τέμνωνται ἐντὸς τοῦ κύκλου εἴς τι σημεῖον Ε. Ἂς ὑψωθῇ ἔπειτα ἐκ τοῦ Ε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ἡ ΕΜ, καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΕΖΜ ἂς γραφῇ κύκλος μὲ κέντρον τὸ Ζ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΖΓ· ὁ κύκλος οὗτος θὰ τέμνῃ τὴν κάθετον ΕΜ εἴς τι σημεῖον Μ (διότι $ΖΕ<ΖΓ$), καὶ ἂν ἀχθῇ ἡ ΟΜ, θὰ σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΜ ἔχουσα ἐπιπέδους γωνίας τὰς δοθείσας. Διότι τὰ τρίγωνα ΟΖΓ καὶ ΟΖΜ εἶνε ἴσα, ὡς ὀρθογώνια ἀμφότερα εἰς τὸ Ζ (308 Σημ. β΄) καὶ ἔχοντα τὴν ΟΖ κοινὴν καὶ τὴν $ΖΓ=ΖΜ$· ἄρα εἶνε ἴσα καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΖΟΜ εἶνε ἴση τῇ ΖΟΓ. Καὶ τὰ τρίγωνα ΟΗΔ καὶ ΟΗΜ εἶνε ἴσα, ὡς ὀρθογώνια ἀμφότερα εἰς τὸ Η καὶ ἔχοντα τὴν ΟΗ κοινὴν καὶ τὴν ΟΔ ἴσην τῇ ΟΜ (διότι $ΟΜ=ΟΓ=ΟΔ$)· ἄρα εἶνε ἴσα καὶ διὰ τοῦτο ἡ γωνία ΑΟΜ ἰσοῦται τῇ ΑΟΔ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ἀμφότεραι αἱ ΖΕ καὶ ΖΜ εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν ΟΒ, ἡ γωνία ΕΖΜ εἶνε ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον γωνίαν ΟΒ τῆς στερεᾶς γωνίας ΟΑΒΜ· τὴν γωνίαν ταύτην ΕΖΜ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κατασκευάζοντες τὸ τρίγωνον ΕΖΜ, οὗτινος ἔχομεν τὴν ὑποτείνουσαν ΜΖ(=ΓΖ) καὶ μίαν τῶν καθέτων, τὴν ΕΖ. Ὁμοίως κατασκευάζοντες ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχον ὑποτείνουσαν τὴν ΗΔ καὶ μίαν πλευρὰν τὴν ΗΕ, εὑρίσκομεν τὴν ἐπίπεδον γωνίαν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὴν δίεδρον ΟΑ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

345. *Ἐκ τριῶν δοθεισῶν διέδρων γωνιῶν, αἵτινες πληροῦσι τοὺς περιορισμοὺς τοῦ θεωρήματος 343, δύναται νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία*

Ἔστωσαν α, β, γ αἱ δοθεῖσαι δίεδροι γωνίαι.

Ἂν σχηματισθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία, ἔχουσα ἐπιπέδους γωνίας τὰς 2—α, 2—β, 2—γ, ἡ παραπληρωματικὴ αὐτῆς (340) θὰ ἔχῃ διέδρους τὰς δοθείσας α, β, γ.

Δύναται δὲ νὰ σχηματισθῇ στερεὰ γωνία, ἔχουσα ἐπιπέδους γωνίας τὰς 2—α, 2—β, 2—γ· διότι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν

$$(2-\alpha)+(2-\beta)+(2-\gamma) \text{ ἢ } 6-(\alpha+\beta+\gamma)$$

εἶνε μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν (ἀφοῦ τὸ α+β+γ ὑπερβαίνει τὰς δύο ὀρθάς)· καὶ ἡ μεγαλητέρα ἐκ τῶν γωνιῶν τούτων, ἔστω τοιαύτη ἡ 2—α, εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Καὶ ὄντως ἔχομεν (343)

$$\alpha+2>\beta+\gamma,$$

καὶ ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ἀνίσων τὸ α+β+γ—2, εὑρίσκομεν

$$(2-\beta)+(2-\gamma)>2-\alpha.$$

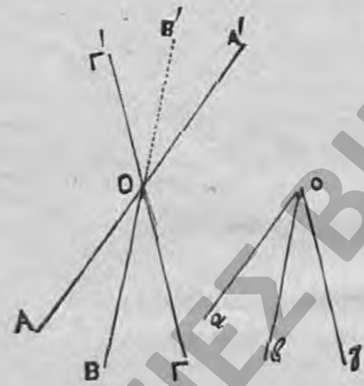
*ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ε' ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΕΔΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

*ΘΕΩΡΗΜΑ

346. *Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι μίαν δίεδρον γωνίαν ἴσην καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν ἕδρας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ αὐτῶν στοιχεῖα ἴσα καὶ θὰ εἶνε ἢ ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.*

Ἔστω ἡ δίεδρος γωνία ΟΒ ἴση τῇ διέδρῳ οβ καὶ ἡ ἐπίπεδος γωνία ΑΟΒ ἴση τῇ αοβ, ἔτι δὲ καὶ ἡ ΒΟΓ ἴση τῇ βογ.



Ἔστω ἡ ἀκμὴ οβ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ, ὡς καὶ ἡ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου ΑΟΓ.

Ἐὰν τότε ἐφαρμοσθῇ ἡ δίεδρος γωνία οβ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΟΒ, θὰ ἐφαρμόσῃ τὸ ἐπίπεδον αοβ ἐπὶ τοῦ ΑΟΒ καὶ τὸ ἐπίπεδον βογ ἐπὶ τοῦ ΒΟΓ· ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι αοβ καὶ ΑΟΒ εἶνε ἴσαι, θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκμὴ οα ἐπὶ τῆς ΟΑ· δι' ὅμοιον λόγον θὰ ἐφαρμόσῃ καὶ ἡ ἀκμὴ ογ ἐπὶ τῆς ΟΓ· ὥστε θὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ στερεαὶ γωνίαι.

Ἐὰν δὲ ἡ μὲν ἀκμὴ οβ κεῖται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ, ἡ δὲ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ΑΟΓ, ἐφαρμόζει ἡ στερεὰ γωνία οαβγ ἐπὶ τῆς ΟΑ'Β'Γ', ἥτις εἶνε κατὰ κορυφὴν τῆς ΟΑΒΓ.

*ΘΕΩΡΗΜΑ

347. *Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς εἰς αὐτὴν προσκειμένας διέδρους γωνίας ἴσας, θὰ ἔχωσι καὶ τὰ λοιπὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα· καὶ θὰ εἶνε ἢ ἴσαι ἢ κατὰ κορυφήν.*

Ἔστω ἡ ἕδρα ΑΟΓ ἴση τῇ αογ καὶ ἡ δίεδρος γωνία ΟΑ ἴση τῇ οα καὶ ἡ δίεδρος ΟΓ ἴση τῇ ογ.

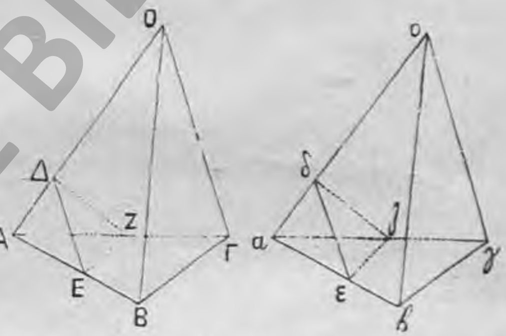
Ἔστω ἡ ἀκμὴ οβ ἔμπροσθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ, ὡς καὶ ἡ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ΑΟΓ.

Ἐὰν ἡ ἕδρα αογ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΟΓ, τὸ μὲν ἐπίπεδον αοβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΑΟΒ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων γωνιῶν οα καὶ ΟΑ, τὸ δὲ ἐπίπεδον ογβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ΟΓΒ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν διέδρων γωνιῶν ογ καὶ ΟΓ· ἐπομένως ἡ οβ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΒ· ἄρα ἡ στερεὰ γωνία οαβγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ΟΑΒΓ.

Ἐὰν δὲ ἡ ἀκμὴ οβ κεῖται ὄπισθεν τοῦ ἐπιπέδου αογ (ἡ δὲ ΟΒ ἔμπροσθεν τοῦ ΑΟΓ), ἐφαρμόζει ἡ στερεὰ γωνία οαβγ ἐπὶ τῆς ΟΑΒ΄Γ΄, ἥτις εἶνε κατὰ κορυφὴν τῆς ΟΑΒΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

348. *Ἐὰν δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ἔχωσι τὰ ἕδρας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, θὰ ἔχωσιν ἴσας καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας κατὰ μίαν, θὰ εἶνε δὲ ἴσαι αἱ ὑπὸ ἴσων ἑδρῶν περιεχόμεναι.*



Ἔστωσαν τρίεδροι γωνίαι αἱ ΟΑΒΓ καὶ οαβγ, ἔχουσαι ΑΟΒ = αοβ, ΒΟΓ=βογ, ΓΟΑ=γοα.

Ἄς ληφθῶσιν ἐπὶ τῶν ἓξ ἀκμῶν ἓξ ἴσα μέρη, τὰ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ οα, οβ, ογ καὶ ἄς ἀχθῶσιν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ αἱ αβ, βγ, γα.

Τὰ τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ περὶ τὸ Ο, εἶνε ἴσα πρὸς τὰ τρία ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ περὶ τὸ ο,

ἤτοι τρίγ. ΑΟΒ=τρίγ. αοβ,
τριγ. ΒΟΓ=τρίγ. βογ,
τρίγ. ΓΟΑ=τρίγ. γοα·

διότι ἔχουσιν ἕκαστα μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἴσων.

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων τούτων ἕπεται:

ΑΒ=αβ, ΒΓ=βγ, ΑΓ=αγ·

ἄρα καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶνε ἴσα.

Ἄς ληφθῇ νῦν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΟΑ τυχὸν σημεῖον το Δ καὶ ἄς ἀχθῶσιν ἐξ αὐτοῦ κάθετοι ἐπὶ τὴν ΟΑ, κείμεναι ἡ μὲν ΔΕ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ ΟΑΒ, ἡ δὲ ΔΖ ἐν τῷ ΟΑΓ. Αἱ κάθετοι αὗται θὰ συναντήσωσι τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ διότι αἱ γωνίαι ΟΑΒ, ΟΑΓ εἶνε ὀξεῖαι, ὡς γωνίαι εἰς τὰς βάσεις τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΟΒ, ΑΟΓ. Ἄς ἀχθῇ λοιπὸν καὶ ἡ ΖΕ. Μετὰ δὲ ταῦτα ἂς ληφθῇ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς οα ἡ οδ ἴση τῇ ΟΔ καὶ ἂς γίνῃ ἡ αὐτὴ κατασκευή.

Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ αδε εἶνε ἴσα· διότι ἔχουσι τὴν ΑΔ ἴσην τῇ αδ καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΔΑΒ ἴσην τῇ δαβ· ἄρα εἶνε ἴσα καὶ ἐκ τῆς ἰσότητος αὐτῶν ἕπεται ΑΕ=αε. Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΔΑΖ, δαζ ἴσα καὶ ἑπομένως ΑΖ=αζ.

Καὶ τὰ τρίγωνα ΑΕΖ, αεζ εἶνε ἴσα· διότι ἔχουσιν ΑΕ=αε, ΑΖ=αζ καὶ τὰς γωνίας ΒΑΓ, βαγ ἴσας. Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ τῶν τριγώνων τούτων συνάγεται ΕΖ=εζ.

Τέλος τὰ δύο τρίγωνα ΔΕΖ, δεζ ἔχοντα καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας κατὰ μίαν, εἶνε ἴσα· ἄρα γων. ΕΔΖ=γων. εδζ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι αὗται ΕΔΖ, εδζ εἶνε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι ἐπίπεδοι πρὸς τὰς διέδρους ΟΑ, οα, συμπεραίνομεν, ὅτι αἱ δίεδροι αὗται γωνίαι εἶνε ἴσαι.

Ὁμοίως δεικνύεται ἡ ἰσότης καὶ τῶν ἄλλων διέδρων γωνιῶν.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἂν αἱ ἀκμαὶ οβ, ΟΒ κεῖνται πρὸς τὰ ἐπίπεδα αογ, ΑΟΓ ὁμοίως (τουτέστιν ἀμφότεραι ἔμπροσθεν, ἢ ἀμφότεραι ὄπισθεν), ἐφαρμόζουσιν αἱ στερεαὶ γωνίαι, εἰ δὲ μή, εἶνε κατὰ κορυφήν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

349. *Ἐὰν δύο τρίεδροι γωνίαι ἔχωσι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν, θὰ ἔχωσι καὶ τὰς ἐπιπέδους ἴσας.*

Ἔστωσαν δύο τρίεδροι γωνίαι, ἔχουσαι τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας, αἱ Κ, Κ'.

Ἐπειδὴ αἱ στερεαὶ γωνίαι Κ, Κ' ἔχουσι τὰς διέδρους αὐτῶν ἴσας, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν, ἃς παριστῶμεν διὰ Π καὶ Π', θὰ ἔχωσι τὰς ἐπιπέδους γωνίας των ἴσας· ἄρα θὰ ἔχωσιν αἱ Π, Π' καὶ τὰς διέδρους αὐτῶν γωνίας ἴσας (348). Ἐπειδὴ δὲ αἱ στερεαὶ γωνίαι Π, Π' ἔχουσιν ἴσας τὰς διέδρους αὐτῶν, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν Κ, Κ' θὰ ἔχωσιν ἴσας τὰς ἐπιπέδους γωνίας των. ὅ. ἔ. δ.

1911

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΕΡΙ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

350. *Πολύεδρον* λέγεται στερεὸν πανταχόθεν ὑπὸ ἐπιπέδων περατούμενον.

Ἕδραι τοῦ πολυέδρου λέγονται τὰ ἐπίπεδα σχήματα, ὑφ' ὧν περατοῦται.

Γωνίαι τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ στερεαὶ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουσιν αἱ ἕδραι αὐτοῦ.

Κορυφαὶ δὲ αὐτοῦ αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν τούτων γωνιῶν.

Πλευραὶ ἢ *ἀκμαὶ* τοῦ πολυέδρου λέγονται αἱ πλευραὶ τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ.

Διαγώνιοι δὲ αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι δύο κορυφὰς μὴ κειμένας ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

Τὸ πολύεδρον ὀνομάζεται ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν του *τετράεδρον*, ἐὰν ἔχῃ τέσσαρας ἕδρας, *πεντάεδρον*, ἐὰν ἔχῃ πέντε, *ἑξάεδρον*, ἐὰν ἔχῃ ἕξ· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ ἁπλούστατον πάντων τῶν πολυέδρων εἶνε τὸ τετράεδρον· διότι τρία ἐπίπεδα σχηματίζουσι, τὸ πολύ, στερεὰν γωνίαν, ἵνα δὲ κλεισθῇ πανταχόθεν ὁ χῶρος, χρειάζεται τοὐλάχιστον καὶ τέταρτον ἐπίπεδον.

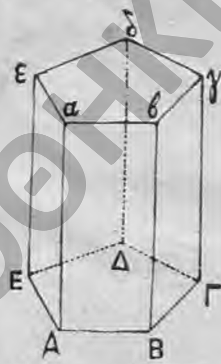
Κυρτὸν λέγεται τὸ πολύεδρον, ἐὰν ἑκάστη ἕδρα αὐτοῦ ἐκβαλλομένη ἀφίνῃ τὸ πολύεδρον ὁλόκληρον πρὸς ἓν μέρος αὐτῆς. Ἐν τοῖς ἑξῆς ὁ λόγος γίνεται μόνον περὶ τῶν κυρτῶν πολυέδρων.

Ἐὰν πολύεδρον κυρτὸν τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, ἡ τομὴ θὰ εἶνε πολύγωνον κυρτόν.

ΠΡΙΣΜΑΤΑ

351. *Πρίσμα* λέγεται τὸ στερεόν, οὗτινος δύο ἕδραι εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι, αἱ δὲ λοιπαὶ παραλληλόγραμμα.

Ἵνα κατασκευάσωμεν πρίσμα, λαμβάνομεν τυχὸν πολύγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ ἄγομεν ἐκ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εὐθείας ἴσας καὶ παραλλήλους, τὰς Αα, Ββ, Γγ, Δδ, Εε, κειμένας ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ. Τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν τούτων θὰ κεῖνται ἐφ' ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου τῷ ΑΒΓΔΕ (322, Σημ.), καὶ τὸ στερεόν, ὅπερ περατοῦται ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων σχημάτων ΑΒΓΔΕ, αβγδε καὶ ὑπὸ τῶν τετραπλεύρων ΑΒαβ, ΒΓβγ, ΓΔγδ, ΔΕδε, ΕΑεα, θὰ εἶνε πρίσμα.



Διότι τὸ τετράπλευρον ΑΒαβ, ὡς ἔχον δύο πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους Αα, Ββ, εἶνε παραλληλόγραμμον· ὁμοίως καὶ τὰ ἄλλα πέριξ τετράπλευρα εἶνε παραλληλόγραμμα. Καὶ τὰ δύο πολύγωνα ΑΒΓΔΕ, αβγδε εἶνε ἴσα· διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶνε ἴσαι κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμων, καὶ αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶνε ἴσαι κατὰ μίαν, ὡς σχηματιζόμεναι ὑπὸ εὐθειῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων.

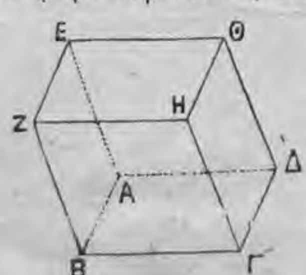
Βάσεις τοῦ πρίσματος λέγονται αἱ δύο ἴσαι καὶ παράλληλοι ἕδραι αὐτοῦ· *ὕψος* δὲ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

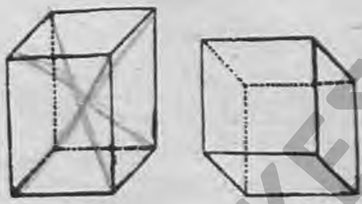
Τὸ πρίσμα λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτοῦ *τριγωνικόν*, ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον, *τετραγωνικόν*, ἐὰν τετράπλευρον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ πρίσμα λέγεται *ὀρθόν*, ὅταν αἱ εὐθεῖαι αἱ τὰς ἀντιστοιχούσας κορυφὰς τῶν βάσεων αὐτοῦ ἐπιζευγνύουσαι, (αἵτινες καὶ *πλευραὶ* ἰδίως καλοῦνται), εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις· εἰ δὲ μή, τὸ πρίσμα λέγεται *πλάγιον*.

Τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ἑκάστη πλευρὰ ἰσοῦται προφανῶς πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ· αἱ δὲ παράπλευροι ἕδραι εἶνε ὀρθογώνια.

Τὸ πρίσμα τὸ ἔχον βάσεις παραλληλόγραμμα, ἔχει πάσας τὰς ἕδρας παραλληλόγραμμα καὶ λέγεται *παραλληλεπίπεδον*· τοιοῦτον εἶνε τὸ στερεὸν ΑΗ.





Τὸ παραλληλεπίπεδον ἔχει ἓξ ἕδρας.

Ἐὰν τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε ὀρθόν, ἔχῃ δὲ καὶ βάσεις ὀρθογώνια, λέγεται *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον*.

Ἐὰν δὲ αἱ βάσεις εἶνε τετράγωνα καὶ αἱ λοιπαὶ ἕδραι ὡσαύτως, τὸ στερεὸν λέγεται *κύβος* ἢ *κανονικὸν ἑξάεδρον*.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

352. *Πυραμὶς* λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου μία ἕδρα εἶνε οἱονδήποτε πολύγωνον, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶνε τρίγωνα, βάσεις μὲν ἔχοντα τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, κορυφὴν δὲ κοινὴν σημεῖόν τι, ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου κείμενον. Τοιοῦτον εἶνε τὸ στερεὸν ΚΑΒΓΔΕ.

Βάσις τῆς πυραμίδος λέγεται τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ, *κορυφὴ* δὲ τὸ σημεῖον Κ· *ὕψος* δὲ ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν ἠγμένη κάθετος. Αἱ εἰς τὴν κορυφὴν συντρέχουσαι ἀκμαὶ λέγονται ἰδίως *πλευραί*· ἡ δὲ πέριξ αὐτῶν ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος, ἡ ἐκ τῶν ἑδρῶν ΑΚΒ, ΒΚΓ,..., ΕΚΑ συγκειμένη, λέγεται *παράπλευρος ἐπιφάνεια* τῆς πυραμίδος.

Ἡ πυραμὶς λέγεται ἐκ τῆς βάσεως αὐτῆς *τριγωνική*, ἐὰν ἔχῃ βάσιν τρίγωνον, *τετραγωνική*, ἐὰν τετράπλευρον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς εἶνε τετράεδρον· δύναται δὲ οἱαδήποτε ἐκ τῶν ἑδρῶν αὐτῆς νὰ ληφθῇ ὡς βάσις τῆς πυραμίδος.

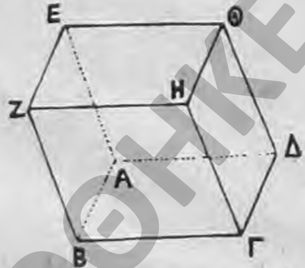
Κανονικὴ λέγεται ἡ πυραμίς, ἐὰν ἡ βάσις αὐτῆς εἶνε κανονικὸν πολύγωνον καὶ ἡ κάθετος, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν, πίπτῃ εἰς τὸ κέντρον αὐτῆς. Ἡ κάθετος αὕτη λέγεται τότε *ἄξων* τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

353. *Παντὸς παραλληλεπιπέδου αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι.*

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ. Αἱ μὲν βάσεις αὐτοῦ, ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν πρισμάτων. Δύο δὲ ἄλλαι ἀπέναντι ἕδραι, ὡς αἱ ΑΒΖΕ καὶ ΓΔΘΗ, εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι· διότι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι (ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ) καὶ ἡ ΑΕ εἶνε ἴση καὶ παράλληλος τῇ ΔΘ, καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΘΗ, καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΗΓ· καὶ αἱ γωνίαι δὲ τῶν παραλληλογράμμων τούτων, αἱ ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχόμεναι, εἶνε ἴσαι· διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶνε παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι· ἑπομένως τὰ παραλληλόγραμμα ΑΒΖΕ καὶ ΔΓΗΘ εἶνε ἴσα καὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶνε παράλληλα (322).



ΠΟΡΙΣΜΑ

354. *Ὡς βάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου δύνανται νὰ ληφθῶσι δύο οἱαιδήποτε ἀπέναντι ἕδραι αὐτοῦ.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ παραλληλεπίπεδον ὁρίζεται, ὅταν δοθῶσι τρεῖς ἀκμαὶ αὐτοῦ ἐκ μιᾶς κορυφῆς ἀρχόμεναι, ὡς λόγου χάριν αἱ ΑΒ, ΑΔ, ΑΕ. Ἐὰν τῷ ὄντι ἐκ τοῦ ἄκρου ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ τῶν δύο ἄλλων (ἐκ τοῦ Β ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ἐπιπέδῳ ΕΑΔ, ἐκ τοῦ Δ παράλληλον τῷ ΕΑΒ, καὶ ἐκ τοῦ Ε παράλληλον τῷ ΔΑΒ), σχηματίζεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΕΖΗΘ.

Ἐὰν αἱ τρεῖς δοθεῖσαι ἀκμαὶ εἶνε κάθετοι ἀνὰ δύο, τὸ προκύπτον παραλληλεπίπεδον εἶνε ὀρθογώνιον, ἐὰν δὲ εἶνε καὶ ἴσαι, τὸ προκύπτον εἶνε κύβος. Ἐὰν δὲ εἶνε μὲν ἴσαι αἱ ἀκμαί, ἀλλ' οὐχὶ κάθετοι, προκύπτει παραλληλεπίπεδον ὑπὸ ῥόμβων περατούμενον, καὶ τὸ ὁποῖον διὰ τοῦτο λέγεται *ῥομβόεδρον.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

355. *Τοῦ παραλληλεπιπέδου αἱ διαγώνιοι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.* 14

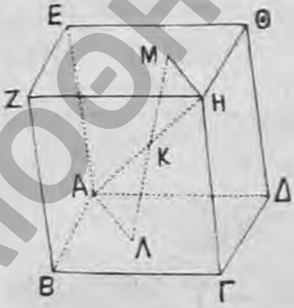
Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ καὶ δύο διαγώνιοι αὐτοῦ αἱ ΑΗ καὶ ΕΓ. Τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο παραλλήλων ΑΕ καὶ ΓΗ, ἐὰν ἀχθῇ, θὰ τέμνῃ τὰς ἕδρας ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΓ καὶ ΕΗ, αἵτινες μετὰ τῶν ἴσων καὶ παραλλήλων ΑΕ, ΗΓ σχηματίζουσι παραλληλόγραμμον τὸ ΑΓΗΕ· τούτου δὲ τοῦ παραλληλ.-

ΑΕ ≠ ΔΘ
ΖΒ ≠ ΗΓ

γράμμου διαγώνιοι εἶνε αἱ ΑΗ καὶ ΓΕ· ἄρα τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ εἶνε αἱ ἑξῆς τέσσαρες, ΑΗ, ΒΘ, ΓΕ, ΔΖ καὶ τέμνονται ἀνὰ δύο ὡς ἀπεδείχθη, εἰς τὸ μέσον αὐτῶν· ἐπομένως καὶ αἱ τέσσαρες διέρχονται διὰ τοῦ μέσου Κ τῆς ΑΗ· τοῦτο δὲ εἶνε τὸ μέσον καὶ τῶν ἄλλων.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Πᾶσα εὐθεῖα, διὰ τοῦ σημείου Κ ἠγμένη καὶ περατουμένη εἰς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου, τέμνεται δίχα εἰς τὸ σημεῖον Κ.

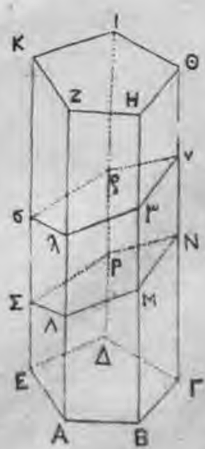


Ἔστω τῷ ὄντι τυχοῦσα εὐθεῖα διὰ τοῦ Κ, ἡ ΚΛΜ, τέμνουσα τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ παραλληλεπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα Λ καὶ Μ· Ἐὰν διὰ τῆς εὐθείας ταύτης καὶ διά τινος τῶν διαγωνίων, ὡς τῆς ΑΗ, ἀχθῇ ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ τὰς ἀπέναντι ἕδρας τοῦ παραλληλεπιπέδου κατὰ τὰς παραλλήλους ΑΛ καὶ ΗΜ, καὶ τὰ προκύπτοντα τρίγωνα ΚΛΑ καὶ ΚΗΜ, εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα ΚΑ ἴσην τὴν τῇ ΚΗ, τὴν γωνίαν ΛΚΑ ἴσην τῇ ΜΚΗ, καὶ τὴν γωνίαν Μ ἴσην τῇ Λ (διὰ τὰς παραλλήλους ΜΗ καὶ ΑΛ)· ἄρα εἶνε ΚΛ=ΚΜ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Διὰ τὴν ἰδιότητα ταύτην τὸ σημεῖον Κ λέγεται *κέντρον* τοῦ παραλληλεπιπέδου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

356. *Αἱ τομαὶ πρίσματος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων εἶνε πολύγωνα ἴσα.*



Ἔστω τυχὸν πρίσμα τοῦ ΑΙ καὶ τομαὶ αὐτοῦ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων (μὴ τεμνόντων τὰς βάσεις), αἱ ΛΜΝΡΣ καὶ λμνρσ· λέγω, ὅτι τὰ πολύγωνα ταῦτα εἶνε ἴσα.

Αἱ εὐθεῖαι Λλ, Μμ,.., ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχόμεναι, εἶνε ἴσαι· ἄρα τὸ σχῆμα ΛΜλμ εἶνε παραλληλόγραμμον καὶ διὰ τοῦτο ἡ ΛΜ εἶνε ἴση καὶ παράλληλος τῇ λμ. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ΜΝ ἴση καὶ παράλληλος τῇ μν, καὶ ἡ ΝΡ τῇ νρ, καὶ ἡ ΡΣ τῇ ρσ, καὶ ἡ ΣΛ τῇ σλ. Καὶ ἡ γωνία

ΛΜΝ εἶνε ἴση τῇ λμν· διότι αἱ πλευραὶ αὐτῶν εἶνε παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι· ὁμοίως ἡ ΜΝΡ εἶνε ἴση τῇ μνρ· καὶ ἡ ΡΣΑ τῇ ρσα, καὶ καθεξῆς. Τὰ δύο πολύγωνα λοιπὸν ΛΜΝΡΣ καὶ λμνρσ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς γωνίας, τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας ἴσας· ἄρα εἶνε ἴσα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

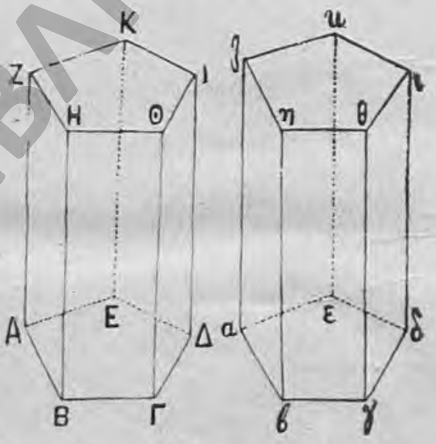
357. *Ἐὰν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ, ἡ τομὴ εἶνε ἴση τῇ βάσει.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. *Κάθετος* λέγεται ἡ τομὴ τοῦ πρίσματος, ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἶνε κάθετον ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτοῦ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

358. *Δύο ὀρθὰ πρίσματα εἶνε ἴσα, ἐὰν ἔχωσιν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.* 15

Ἔστωσαν ὀρθὰ πρίσματα τὰ ΑΙ καὶ αι· καὶ ἂς ὑποτεθῶσιν αἱ βάσεις αὐτῶν, ΑΒΓΔΕ, αβγδε, ἴσαι, καὶ τὰ ὕψη ΑΖ, αζ ἴσα. Ἐὰν ἡ βάσις αβγδε ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΒΓΔΕ, ἡ αζ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΖ· διότι ἀμφότεραι θὰ εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔΕ καὶ εἰς τὸ σημεῖον Α· ἐπειδὴ δὲ εἶνε καὶ ἴσαι, θὰ πέσῃ τὸ σημεῖον ζ εἰς τὸ σημεῖον Ζ· ὁμοίως θὰ πέσῃ καὶ τὸ η εἰς τὸ Η καὶ τὸ θ εἰς τὸ Θ καὶ καθεξῆς· ὥστε τὰ δύο πρίσματα θὰ ἐφαρμόσωσι.



ΠΟΡΙΣΜΑ

Δύο ὀρθὰ πρίσματα ἔχοντα βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα εἶνε ἰσοδύναμα.

Διότι, ἂν αἱ δύο βάσεις διῃρημέναι εἰς τὰ μέρη α, β, γ, δ,.. ἐφαρμόζωσι, καὶ τὰ δύο πρίσματα θὰ ἐφαρμόζωσιν, ἐὰν διαιρεθῶσιν εἰς ἰσοϋψῆ καὶ ὀρθὰ πρίσματα ἔχοντα βάσεις τὰ μέρη α, β, γ, δ,... 13

ΘΕΩΡΗΜΑ

359. *Δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὴν αὐτὴν ἔχοντα βάσιν, εἶνε πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.*

Κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 224, ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι διπλασιαζομένου τοῦ ὕψους διπλασιάζεται καὶ τὸ πρίσμα, καὶ τριπλασιαζομένου τριπλασιάζεται, καὶ καθεξῆς.

Ἔστω πρίσμα ὀρθὸν τὸ ΑΒΓΔαβγδ· ἐὰν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ Αα, Ββ, Γγ, Δδ διπλασιασθῶσι καὶ γίνωσιν Αα', Ββ', Γγ', Δδ' τὸ πρίσμα διπλασιάζεται· διότι τὰ δύο πρίσματα, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται, τὰ ΑΒΓΔαβγδ καὶ αβγδα'β'γ'δ', εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Ἐὰν δὲ αἱ πλευραὶ αὐτοῦ τριπλασιασθῶσι καὶ γίνωσιν Αα'', Ββ'', Γγ'', Δδ'', καὶ τὸ πρίσμα τριπλασιάζεται· διότι τὰ τρία πρίσματα, ἐξ ὧν σύγκειται, εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ πάντα ἄλλον ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν, ὅτι τὰ ἴσας βάσεις ἔχοντα ὀρθὰ πρίσματα εἶνε ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

360. *Πᾶν πλάγιον πρίσμα εἶνε ἰσοδύναμον ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν μὲν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου, ὕψος δὲ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.*

Ἔστω πλάγιον πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕαβγδε καὶ κάθετος τομὴ αὐτοῦ ἡ ΖΗΘΙΚ. Ἐὰν προσεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ καὶ ληφθῇ Αζ=αΖ, Βη=βΗ, Γθ=γΘ, Δι=δΙ, Εκ=εΚ, ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ εὐθεῖαι ζη, ηθ, θι, ικ, κζ, προκύπτει πρίσμα (351) ὀρθόν, τὸ ΖΗΘΙΚζηθικ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαγίου καὶ ὕψος τὴν Ζζ ἴσην τῇ πλευρᾷ Αα τοῦ πλαγίου (διότι ἐλήφθη ζΑ=Ζα). Λέγω δέ, ὅτι τὸ ὀρθὸν τοῦτο πρίσμα εἶνε ἰσοδύναμον τῷ δοθέντι πλαγίῳ.

Διότι τὰ πρίσματα ταῦτα ἔχουσι κοινὸν μέρος τὸ στερεὸν ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΚ, τὰ δὲ μὴ κοινὰ μέρη αὐτῶν, τὰ ΑΒΓΔΕζηθικ καὶ αβγδεΖΗΘΙΚ, εἶνε ἴσα. Ἐὰν τῷ ὄντι ἐφαρμόσῃ τὸ πολύγωνον

ΖΗΘΙΚ ἐπὶ τοῦ ἴσου του ζηθικ, ἡ Ζα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ζΑ (διότι θὰ εἶνε ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον ζηθικ καὶ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου) καὶ ἐπειδὴ ἐλήφθη ζΑ=Ζα, θὰ πέσῃ τὸ α εἰς τὸ Α, ὁμοίως θὰ πέσῃ καὶ τὸ β εἰς τὸ Β, καὶ τὸ γ εἰς τὸ Γ, καὶ καθεξῆς. Ὥστε τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΔΕζηθικ καὶ αβγδεΖΗΘΙΚ θὰ ἐφαρμόσωσιν.

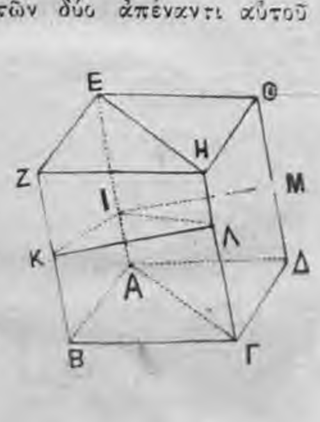
Ἄρα τὸ ὀρθὸν πρίσμα καὶ τὸ δοθὲν πλάγιον ἐφαρμόζουσιν, ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· ἤτοι εἶνε ἰσοδύναμα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετος τομὴ διαιροῦσα τὸ δοθὲν πρίσμα εἰς δύο μέρη καὶ μὴ τέμνουσα τὰς βάσεις αὐτοῦ· τοῦτο γίνεται πάντοτε, ὅταν τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς Αα τοῦ πρίσματος ὑπερβαίνῃ τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ληφθῇ δὲ καὶ τὸ Ζ εἰς τὸ μέσον τῆς Αα· διότι αἱ εὐθεῖαι ΖΗ, ΖΘ, ΖΙ, ΖΚ, εἶνε τὰ ὕψη τῶν παραλληλογράμμων ΑαΒβ, ΑαΓγ, ΑαΔδ, ΑαΕε· ταῦτα δὲ τὰ ὕψη πίπτουσι τότε ἐντὸς τῶν παραλληλογράμμων· ὥστε ἡ τομὴ ΖΗΘΙΚ κεῖται τότε ὅλη ἐντὸς τοῦ πρίσματος. Διαιροῦντες ὅμως τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος εἰς μέρη εὐθύγραμμα ἱκανῶς μικρά, δυνάμεθα νὰ κατορθώσωμεν, ὥστε τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς Αα νὰ ὑπερβαίνῃ πᾶσαν εὐθεῖαν κειμένην ἐντὸς ἑκάστου τῶν μερῶν τούτων. Ἐὰν τότε διαιρέσωμεν καὶ τὸ πρίσμα εἰς μέρη ἰσάριθμα ἔχοντα βάσεις τὰ μέρη τῆς βάσεώς του, πλευρὰς δὲ παραλλήλους τῇ Αα καὶ ἐφαρμόσωμεν ἐπὶ ἑκάστου τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα, φθάνομεν εἰς τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον.

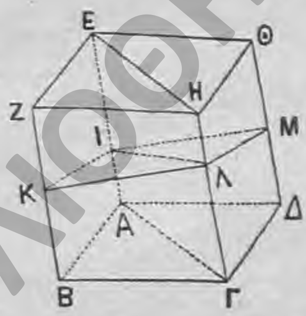
ΘΕΩΡΗΜΑ

361. *Τὸ διὰ δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλεπιπέδου ἀγόμενον ἐπίπεδον διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.*

Ἔστω παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ· διὰ τῶν δύο ἀπέναντι αὐτοῦ πλευρῶν ΑΕ καὶ ΗΓ (αἵτινες, ὡς παράλληλοι τῇ ΒΖ, εἶνε καὶ ἀλλήλαις παράλληλοι), ἂς ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΑΕΗΓ, ὅπερ διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΕΖΗ καὶ ΑΓΔΕΗΘ. Ἀμφότερα τὰ στερεὰ ταῦτα εἶνε πρίσματα· διότι αἱ εὐθεῖαι ΒΖ, ΑΕ, ΓΗ, ΔΘ εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι (ὡς πλευραὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου).



Καὶ ἂν μὲν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶνε ὀρθόν, τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα, εἰς ἃ διηρέθη, εἶνε ἴσα· διότι εἶνε ὀρθὰ καὶ ἔχουσι βάσεις ἴσας, ΑΒΓ, ΑΓΔ, καὶ ὕψη ἴσα, τὸ ΑΕ. Ἂν δὲ τὸ παραλληλεπίπεδον εἶνε πλάγιον, καὶ τὰ πρίσματα εἶνε ἐπίσης πλάγια, καὶ δὲν δύνανται μὲν τότε ἐν γένει νὰ ἐφαρμόσωσιν, ὡς παρακατιόντες θὰ ἀποδείξωμεν, εἶνε ὅμως ἰσοδύναμα· διότι, ἐὰν ἀχθῇ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ, ὡς τὸ ΙΚΛΜ, τὸ μὲν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΕΖΗ εἶνε (360) ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΚΛ καὶ ὕψος τὴν ΑΕ· τὸ δὲ ΑΓΔΕΗΘ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΛΜ καὶ ὕψος τὴν ΑΕ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΙΚΛ, ΙΛΜ εἶνε ἴσα, διότι τὸ σχῆμα ΙΚΛΜ εἶνε παραλληλόγραμμον (ἡ ΙΚ εἶνε παράλληλος τῇ ΛΜ, ἐπειδὴ εἶναι τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τοῦ ΙΚΛΜ· ὁμοίως καὶ ἡ ΙΜ τῇ ΛΚ)· ὥστε τὰ δύο εἰρημένα ὀρθὰ πρίσματα εἶνε ἴσα· ἐπομένως καὶ τὰ πρὸς αὐτὰ ἰσοδύναμα τριγωνικὰ πρίσματα, ΑΒΓΕΖΗ, ΑΓΔΕΗΘ, εἶνε ἰσοδύναμα· διότι ἀμφότερα προκύπτουσιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ ὀρθοῦ πρίσματος διαιρεθέντος εἰς μέρη.



Ὅτι δὲ τὰ δύο τριγωνικὰ πλάγια πρίσματα, εἰς τὰ ὁποῖα διηρέθη τὸ παραλληλεπίπεδον, δὲν δύνανται ἐν γένει νὰ ἐφαρμόσωσιν, ἀποδεικνύομεν, παρατηροῦντες, ὅτι ἡ ἕδρα ΘΑ εἶνε ἴση τῇ ΒΗ· ἐπίσης ἡ ΘΓ τῇ ΒΕ καὶ ἡ ΘΕΗ τῇ ΒΓΑ· αἱ στερεαὶ λοιπὸν γωνίαι Θ καὶ Β ἔχουσι τὰς ἕδρας των ἴσας κατὰ μίαν· ἀλλ' ἂν νοήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν Β κινουμένην οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς νὰ διατρέξῃ τὴν διαγώνιον ΒΘ (αἱ δὲ ἀκμαὶ ΒΓ, ΒΖ, ΒΑ νὰ μένωσι παράλληλοι πρὸς τὰς ἀρχικὰς θέσεις των), θὰ γίνῃ ἡ Β κατὰ κορυφὴν τῆς Θ· εἶνε λοιπὸν κατὰ κορυφὴν γωνίαι καὶ ἐπομένως (338) δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει.

ΠΟΡΙΣΜΑ

362. *Πᾶν τριγωνικὸν πρίσμα, ὡς τὸ ΒΑΓΗΕΖ, εἶνε ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου, ὅπερ κατασκευάζεται (354, Σημ.) ἐκ τῶν τριῶν ἀκμῶν ΒΑ, ΒΓ, ΒΖ μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν Β.*

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ

363. Ὡς μονὰς τῶν στερεῶν λαμβάνεται ὁ κύβος, ὁ ἔχων πλευρὰν τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

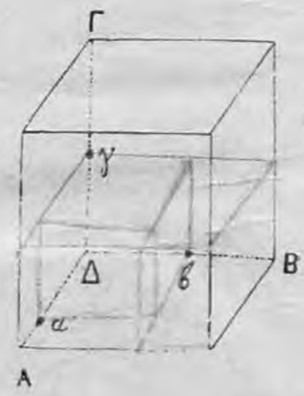
Ὁ ἐκ τῆς καταμετρήσεως στερεοῦ προκύπτων ἀριθμός, ὁ τὴν ἔκτασιν αὐτοῦ ἐκφράζων, ἤτοι ὁ λόγος αὐτοῦ πρὸς τὸν ῥηθέντα κύβον, λέγεται ὄγκος αὐτοῦ (178).

ΘΕΩΡΗΜΑ

364. Ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶνε τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἀριθμῶν, οἵτινες μετροῦσι τὰς τρεῖς ἀκμὰς μιᾶς τῶν στερεῶν αὐτοῦ γωνιῶν.

Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ μιᾶς στερεᾶς γωνίας τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγονται *διαστάσεις* αὐτοῦ (ἡ μὲν *μῆκος*, ἡ δὲ *πλάτος*, ἡ δὲ *ὕψος*).

Ἔστω ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ καὶ αἱ διαστάσεις αὐτοῦ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, μετρηθεῖσαι μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους, ἂς ἔχωσι τὰ μήκη α, β, γ. Ἐὰν ληφθῇ ἐπὶ τῆς ΔΓ (ἢ ἐπὶ τῆς προσεκβολῆς αὐτῆς) ἡ Δγ ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΔΑ, ΔΒ, Δγ, θὰ ἔχῃ καὶ αὐτὸ τὴν βάσιν ΑΔΒ τοῦ δοθέντος. Ἐντεῦθεν ἕπεται, κατὰ τὸ ἐδάφ. 359,



$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΒγΔ)}=\frac{γ}{1}.$$

Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΒ ληφθῇ ἡ Δβ ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΔΑ, Δβ, Δγ, τὰ δύο παραλληλεπίπεδα ΔΑΒγ, καὶ ΔΑβγ θὰ ἔχωσι τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΑγ· ἄρα θὰ εἶνε ὡς τὰ ὕψη των ΔΒ καὶ Δβ, τουτέστιν

$$\frac{(ΑΒγΔ)}{(Αβγ Δ)}=\frac{β}{1}.$$

Ἐὰν δὲ τέλος ληφθῇ καὶ ἐπὶ τῆς ΔΑ ἡ Δα ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους καὶ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον ἐπὶ τῶν ἀκμῶν Δα, Δβ, Δγ, τοῦτο θὰ εἶνε ἡ μονὰς τῶν στερεῶν καὶ θὰ ἔχῃ μὲ τὸ παραλληλεπίπεδον ΑβγΔ τὴν αὐτὴν βάσιν Δβγ· ἄρα θὰ εἶνε

$$\frac{(\mathrm{A}\beta\gamma\Delta)}{(\alpha\beta\gamma\Delta)}=\frac{\alpha}{1}$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐξαλείφοντες τοὺς κοινοὺς παράγοντας, εὑρίσκομεν

ὄγκος $\mathrm{AB\Gamma\Delta}=\alpha.\beta.\gamma.$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. Τὸ ἀποδειχθὲν θεώρημα δύναται καὶ ἄλλως νὰ ἐκφρασθῇ. Ἐπειδὴ δηλονότι τὸ γινόμενον δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, οἷον τὸ α. β, εἶνε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς τῶν ἑδρῶν, τῆς ΑΒΔ, ὁ δὲ τρίτος γ εἶνε τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ὅταν ἡ ἕδρα αὕτη ληφθῇ ὡς βάσις, συμπεραίνομεν, ὅτι

Ὁ ὄγκος παντὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶνε γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ὁ ὄγκος τοῦ κύβου, οὗτινος ἡ πλευρὰ ἔχει τὸ μῆκος α, εἶνε α. α. α, ἤτοι α^3· διὰ τοῦτο ἡ τρίτη δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται *κύβος αὐτοῦ*.

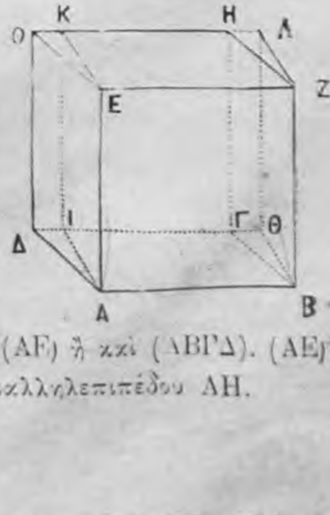
16

ΘΕΩΡΗΜΑ

365. *Ὁ ὄγκος παντὸς παραλληλεπιπέδου εἶνε γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

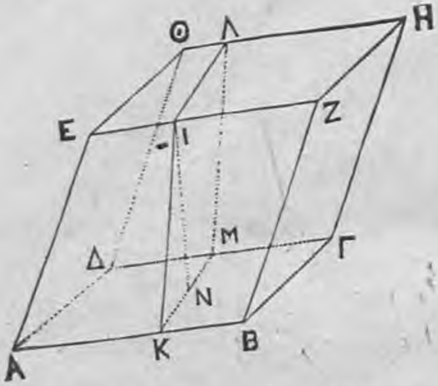
Διὰ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα ἀπεδείχθη τὸ θεώρημα· μένει λοιπὸν νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τὰ μὴ ὀρθογώνια.

Ἔστω πρότερον ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ, ἔχον βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.



Ἐὰν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ μετασχηματισθῇ εἰς ὀρθογώνιον τὸ ΑΙΘΒ, τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ θὰ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΘΙ καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ (ἐδ. 358, πόρισμα)· ἀλλὰ τοῦτο εἶνε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον· ἄρα ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶνε (ΑΒΘΙ) (ΑΕ) ἢ καὶ (ΑΒΓΔ). (ΑΕ)· τοῦτο δὲ εἶνε καὶ ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος παραλληλεπιπέδου ΑΗ.

Ἔστω νῦν πλάγιον παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΗ· καὶ κάθετος τομὴ αὐτοῦ ἡ ΙΚΛΜ, ἥτις θὰ εἶνε παραλληλόγραμμον (315). Τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΗ θὰ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ὀρθῷ παραλληλεπιπέδῳ, ὅπερ ἔχει βάσιν τὴν ΙΚΛΜ καὶ ὕψος τὴν ΑΒ· τὸ ὀρθὸν δὲ τοῦτο παραλληλεπίπεδον ἔχει ὄγκον (ΙΚΛΜ). (ΑΒ)· ἄρα καὶ τὸ δοθὲν τὸ αὐτὸν ἔχει ὄγκον.



Ἀλλὰ τοῦ παραλληλογράμμου ΙΚΛΜ βάσις μὲν εἶνε ἡ ΚΜ (κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ), ὕψος δὲ ἡ ἐκ τοῦ Ι ἐπὶ τὴν ΚΜ ἀγομένη κάθετος ΙΝ, ἥτις θὰ εἶνε κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ (334)· καὶ ἐπομένως θὰ εἶνε τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ· ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΗ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς (ΑΒ). (ΚΜ). (ΙΝ). Καὶ ἐπειδὴ (ΑΒ). (ΚΜ) εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος εἶνε (ΑΒΓΔ). (ΙΝ).

Ἤτοι πάλιν *τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.*

17

ΘΕΩΡΗΜΑ

15

366. *Ὁ ὄγκος παντὸς πρίσματος εἶνε γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

α'). Ἔστω πρότερον τριγωνικὸν πρίσμα ἔχον βάσιν β καὶ ὕψος υ.

Ἐὰν ἐκ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τῶν στερεῶν γωνιῶν του κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦτο θὰ εἶνε διπλάσιον τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος (362) καὶ θὰ ἔχῃ βάσιν διπλασίαν 2β καὶ ὕψος τὸ αὐτὸ υ. Ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου θὰ εἶνε 2β. υ· ἄρα τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ὁ ὄγκος θὰ εἶνε τὸ ἥμισυ, τουτέστι β.υ, ἤτοι τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

β'.) Ἔστω νῦν πολυγωνικὸν πρίσμα, τὸ ΑΙ.

Ἐὰν ἐκ τῆς κορυφῆς Α διαιρεθῇ ἡ βάσις αὐτοῦ εἰς τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ καὶ ἀχθῶσι τὰ ἐπίπεδα ΖΑΓ, ΖΑΔ, διαιροῦσι τὸ πρίσμα εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, ἔχοντα βάσεις τὰ τρίγωνα, εἰς ἃ διῃρέθη ἡ βάσις ΑΒΓΔΕ τοῦ πρίσματος καὶ ὕψος τὸ τοῦ πρίσματος, ὅπερ ὕψος ἔστω υ.

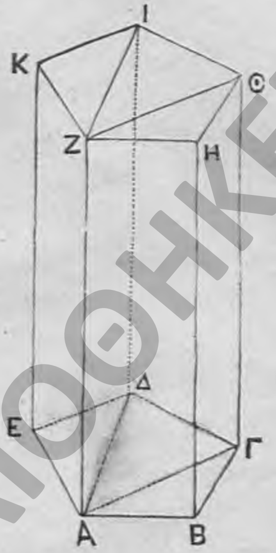
Ὁ ὄγκος τῶν πρισμάτων τούτων εἶνε

$$(AB\Gamma).\upsilon,\ (A\Gamma\Delta).\upsilon,\ (A\Delta E).\upsilon\cdot$$

ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ δοθέντος πολυγωνικοῦ πρίσματος εἶνε

$$(AB\Gamma).\upsilon+(A\Gamma\Delta).\upsilon+(A\Delta E).\upsilon,$$
$$\text{ἢ}\quad (AB\Gamma+A\Gamma\Delta+A\Delta E).\upsilon,$$
$$\text{ἢ}\quad (AB\Gamma\Delta E).\upsilon$$

τουτέστι γινόμενον τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ ἐπὶ τὸ ὕψος υ.



ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

367. *Τὰ πρίσματα τὰ ἔχοντα βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα εἶνε ἰσοδύναμα.* Διότι αὐτοῦ θὰ ἔχουν βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους [illegible]

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

368. *Τὰ ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους βάσεις ἔχοντα πρίσματα εἶνε πρὸς ἄλληλα ὡς τὰ ὕψη των, καὶ τὰ ἰσοϋψῆ εἶνε ὡς αἱ βάσεις των.*

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Κυβικὸς πῆχυς ἢ *κυβικὸν μέτρον* λέγεται ὁ κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ ἕνα πῆχυν. Ὁ κύβος δὲ οὗτος λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν στερεῶν (363).

Κυβικὴ παλάμη λέγεται ὁ κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ μίαν παλάμην· εἶνε δὲ ἡ κυβικὴ παλάμη τὸ χιλιοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως (364).

Κυβικὸς δάκτυλος λέγεται ὁ κύβος ὁ ἔχων πλευρὰν ἕνα δάκτυλον· εἶνε δὲ ὁ κυβικὸς δάκτυλος τὸ ἑκατομμυριοστὸν τοῦ κυβικοῦ πήχεως (364).

ΖΗΤΗΜΑΤΑ

1) Αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου τινὸς παραλληλεπιπέδου εἶνε ἡ μὲν $4^{\pi\chi}, 3$, ἡ δὲ $8^{\pi\chi}, 91$, ἡ δὲ $2^{\pi\chi}, 17$· ποῖος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (Ἀπ. $4,3 \times 8,91 \times 2,17$ ἢ $83^{\kappa\pi}, 13921$, ἤτοι 83 κυβ. πήχεις, 139 κυβ. παλάμαι καὶ 210 κυβικοὶ δάκτυλοι).

2) Κύβος τις ἔχει πλευρὰν 5 πήχ.· ποία εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ διπλασίου κύβου (κατὰ τὸν ὄγκον); (Ἀπ. $5\sqrt[3]{2}$ ἤτοι 6,2995...).

3) Ἡ βάσις πρίσματός τινος ὀρθοῦ εἶνε τρίγωνον ἰσόπλευρον ἔχον περίμετρον $6^{\pi\chi}$, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ εἶνε $5^{\pi\chi}$· ζητεῖται ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ

(Ἀπ. Ἡ βάσις εἶνε ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχον πλευρὰν $2^{\pi\chi}$, ἐπομένως (σελ. 180) τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶνε $\frac{1}{4}(2)^2\sqrt{3}$, ἢ $\sqrt{3}$· ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶνε $5\sqrt{3}$ ἢ $8^{\kappa\pi}, 66025$....)

Ἡ δὲ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος σύγκειται ἐκ τῶν δύο αὐτοῦ βάσεων (ὧν τὸ ἐμβαδὸν εἶνε $2\sqrt{3}$) καὶ ἐκ τριῶν ἴσων ὀρθογωνίων ἐχόντων βάσιν 2 καὶ ὕψος 5· ἄρα ὅλη εἶνε $30+2\sqrt{3}$, ἤτοι $33^{\tau\pi}, 4641$....

4) Δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ ἡ μὲν ἄνω βάσις αὐτῆς εἶνε τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε $10^{\pi\chi}, 2$, τὸ δὲ βάθος αὐτῆς εἶνε $1^{\pi\chi}, 8$· πόσον ὕδωρ δύναται νὰ χωρέσῃ;

Ἐὰν νοηθῇ ἡ δεξαμενὴ πλήρης ὕδατος, ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος θὰ εἶνε $10,2 \times 10,2 \times 1,8$, ἤτοι $187^{\kappa\pi}, 272^{\kappa\pi\lambda}$.

Ἐὰν ζητεῖται τὸ βάρος τοῦ ὕδατος πρέπει νὰ εἰξεύρωμεν, ὅτι μία κυβικὴ παλάμη ὕδατος, τουτέστι μία λίτρα αὐτοῦ (ἀπεσταγμένου καὶ εἰς θερμοκρασίαν 4°) ἔχει βάρος $312\frac{1}{2}$ δράμια· τὸ τὴν δεξαμενὴν πληροῦν ὕδωρ εἶνε 187272 λίτραι, ὥστε τὸ βάρος αὐτοῦ εἶνε $\frac{187272 \times 312\frac{1}{2}}{400}$ ὀκάδες, τουτέστιν $146306^{\text{ὀκ.}}\ 100^{\text{δράμ.}}$

5) Πόσα κυβικὰ μέτρα ἀέρος χωρεῖ δωμάτιόν τι, οὗτινος τοῦ ὕψος εἶνε $6^{\pi\chi}$, τὸ δὲ πάτωμα ἔχει μῆκος $5^{\pi\chi}, 8$ καὶ πλάτος $3^{\pi\chi}, 2$; καὶ πόσον εἶνε τὸ βάρος τοῦ ἀέρος τούτου;

(Ἀπ. $6 \times 5,8 \times 3,2$ ἤτοι $111^{\kappa\mu}, 360$)

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ βάρος, πρέπει νὰ ἐνθυμώμεθα, ὅτι ὁ ἀὴρ εἶνε 770 φορὰς ἐλαφρότερος τοῦ ὕδατος· ἂν ἀντὶ ἀέρος ἦτο ὕδωρ, θὰ εἶχε βάρος 111360 χιλιόγραμμα (διότι ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶνε 111360 κυβ. παλάμας ἤτοι λίτραι)· ἄρα ὁ ἀὴρ θὰ ἔχῃ βάρος $\frac{111360}{770}$ χιλιόγρ. ἤτοι $144^{\text{χιλιόγρ.}}\ 623^{\text{γραμμάρ.}}$

$\frac{1}{400}$ = 1η οὕτω 3,2 γραμμάρια

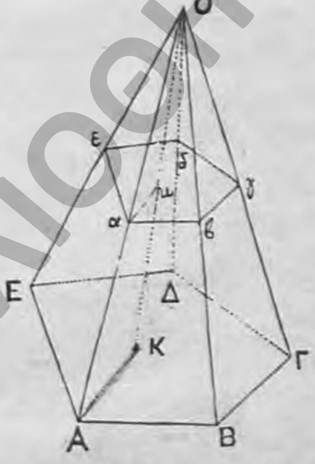
1 λιτρ. 312,5 δράμ. 1 γραμμάριον = 0,3125 δραμ.

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

369. *Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος καὶ τὸ ὕψος τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, καὶ ἡ τομὴ εἶνε ὁμοία τῇ βάσει.*

Ἔστω πυραμὶς ἡ ΟΑΒΓΔΕ καὶ τομὴ αὐτῆς παράλληλος τῇ βάσει ἡ αβγδε, ὕψος δὲ ἡ ΟΚ.



Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ αβ, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓΔΕ, αβγδε ὑπὸ τοῦ ΟΑΒ, εἶνε παράλληλοι· δι' ὅμοιον λόγον εἶνε καὶ ἡ βγ παράλληλος τῇ ΒΓ, καὶ ἡ γδ τῇ ΓΔ, καὶ ἡ δε τῇ ΔΕ, καὶ ἡ εα τῇ ΕΑ· ἔτι δὲ καὶ ἡ ακ τῇ ΑΚ. Διὰ τὰς παραλλήλους ταύτας τὸ ἐφ' ἑκάστης ἕδρας σχηματιζόμενον τρίγωνον εἶνε ὅμοιον αὐτῇ, ἤτοι τὸ Οαβ εἶνε ὅμοιον τῷ ΟΑΒ, τὸ Οβγ τῷ ΟΒΓ, καὶ καθεξῆς.

Ἐκ τῶν ὁμοίων δὲ τούτων τριγώνων συνάγεται ἡ ἰσότης πάντων τῶν λόγων

$$\frac{O\alpha}{OA}\quad \frac{O\beta}{OB}\quad \frac{O\gamma}{O\Gamma}\quad \frac{O\delta}{O\Delta}\quad \frac{O\varepsilon}{OE}$$

$$\frac{\alpha\beta}{AB}\quad \frac{\beta\gamma}{B\Gamma}\quad \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}\quad \frac{\delta\varepsilon}{\Delta E}\quad \frac{\varepsilon\alpha}{EA}$$

ὅθεν βλέπομεν, ὅτι αἱ πλευραὶ τῆς πυραμίδος διῃρέθησαν εἰς μέρη ἀνάλογα.

Καὶ ἡ τομὴ αβγδε εἶνε ὁμοία τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ· τῷ ὄντι ἡ γωνία α εἶνε ἴση τῇ Α· διότι σχηματίζονται ὑπὸ πλευρῶν παραλλήλων καὶ ὁμορρόπων· καὶ ἡ β εἶνε ἴση τῇ Β, δι' ὅμοιον λόγον· καὶ ἡ γ ἴση τῇ Γ, καὶ καθεξῆς· ἔχουσι λοιπὸν τὰ δύο πολύγωνα αβγδε καὶ ΑΒΓΔΕ τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας, κατὰ μίαν καὶ κατὰ σειράν· ἔχουσι δέ, ὡς ἀνωτέρω ἀπεδείχθη, καὶ τὰς ἀντιστοιχούσας πλευράς των ἀναλόγους· ἄρα εἶνε ὅμοια.

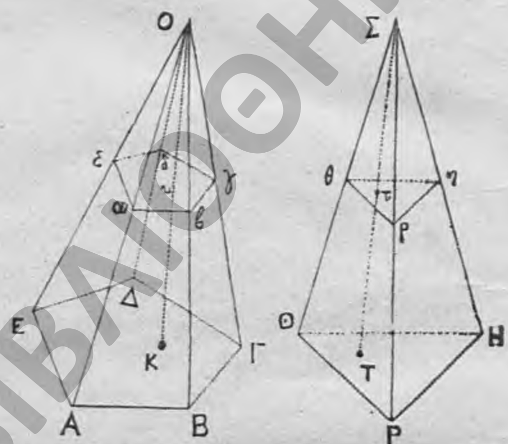
Καὶ τὸ ὕψος ΟΚ τῆς πυραμίδος τέμνεται εἰς τὸν αὐτὸν λόγον, εἰς ὃν καὶ αἱ πλευραί· διότι ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΚ, Οακ, συνάγεται

$$\frac{Οα}{ΟΑ}=\frac{Οκ}{ΟΚ}=\frac{ακ}{ΑΚ}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ πᾶσα εὐθεῖα ἐκ τῆς κορυφῆς εἰς τὴν βάσιν ἠγμένη τέμνεται εἰς τὸν αὐτὸν λογον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

370. *Ἐὰν δύο πυραμίδες ἰσοϋψεῖς τμηθῶσιν ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις αὐτῶν καὶ ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ τομαὶ θὰ εἶνε ἀνάλογοι τῶν βάσεων.*



Ἔστωσαν πυραμίδες ἰσοϋψεῖς αἱ ΟΑΒΓΔΕ καὶ ΣΡΗΘ ἔχουσαι ὕψη τὰ ΟΚ καὶ ΣΤ, καὶ τομαὶ αὐτῶν, παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν, αἱ αβγδε καὶ ρηθ· λέγω, ὅτι θὰ εἶνε

$$\frac{(αβγδε)}{(ΑΒΓΔΕ)}=\frac{(ρηθ)}{(ΡΗΘ)}.$$

Διότι κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ τομὴ αβγδε εἶνε ὁμοία τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ καὶ ὁ λόγος $\frac{αβ}{ΑΒ}$ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶνε ἴσος τῷ λόγῳ $\left(\frac{Οκ}{ΟΚ}\right)$· ἄρα εἶνε (245)

$$\frac{(αβγδε)}{(ΑΒΓΔΕ)}=\frac{(αβ)^2}{(ΑΒ)^2}=\frac{(Οκ)^2}{(ΟΚ)^2}.$$

Ἀλλὰ καὶ ἐν τῇ πυραμίδι ΣΡΗΘ εἶνε δι' ὅμοιον λόγον

$$\frac{(ρηθ)}{(ΡΗΘ)}=\frac{(Στ)^2}{(ΣΤ)^2}.$$

ἐπειδὴ δὲ ὑπετέθη ΣΤ=ΟΚ καὶ Στ=Οκ, ἕπεται ἡ ἰσότης

$$\frac{(αβγδε)}{(ΑΒΓΔΕ)}=\frac{(ρηθ)}{(ΡΗΘ)}.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

371. *Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχωσιν ἴσα ὕψη καὶ βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους, αἱ τομαὶ αὐτῶν, αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις καὶ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τῶν κορυφῶν, θὰ εἶνε ἐπίσης ἴσαι ἢ ἰσοδύναμοι.*

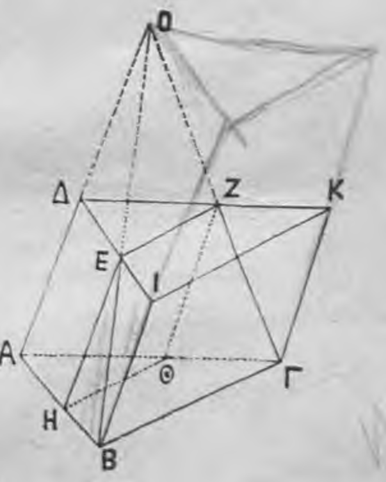
Διότι, ἂν εἶνε (ΑΒΓΔΕ)=(ΡΗΘ), θὰ εἶνε καὶ (αβγδε)=(ρηθ).

ΘΕΩΡΗΜΑ

372. *Πᾶν τμῆμα τριγωνικῆς πυραμίδος περιεχόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἅτινα τέμνουσι τὰς τρεῖς ἀκμὰς μιᾶς κορυφῆς, περιλαμβάνεται μεταξὺ δύο πρισμάτων ἐχόντων ὕψος τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο παραλλήλων τριγωνικῶν βάσεων αὐτοῦ, βάσεις δέ, τὸ μὲν ἓν τὴν κάτω βάσιν τοῦ τμήματος, τὸ δὲ ἄλλο τὴν ἄνω.*

Ἔστω τμῆμα τοιοῦτο τὸ ΑΒΓΔΕΖ.

Ἂν ἐκ τῶν κορυφῶν Ε, Ζ ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΔΑ, ἡ μὲν ἐκ τοῦ Ε, ὡς κειμένη ἐν τῷ τραπεζίῳ ΔΕΒΑ, θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Η, ἡ δὲ ἐκ τοῦ Ζ, ὡς κειμένη ἐν τῷ τραπεζίῳ ΔΖΓΑ, θὰ συναντήσῃ τὴν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Θ· θὰ εἶνε δὲ ΕΗ=ΔΑ καὶ ΖΘ=ΔΑ· διότι τὰ σχήματα ΕΔΑΗ καὶ ΖΔΑΘ εἶνε παραλληλόγραμμα· ἑπομένως αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΔΑ, ΕΗ, ΖΘ, αἱ ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ σχήματος ΔΕΖ ἠγμέναι, εἶνε ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα τὸ στερεὸν ΔΕΖΑΗΘ εἶνε (351) πρίσμα. Τὸ πρίσμα τοῦτο εἶνε προδήλως μικρότερον τοῦ τμήματος ΑΒΓΔΕΖ καὶ ἔχει βάσιν τὴν ΔΕΖ καὶ ὕψος τὸ τοῦ τμήματος.



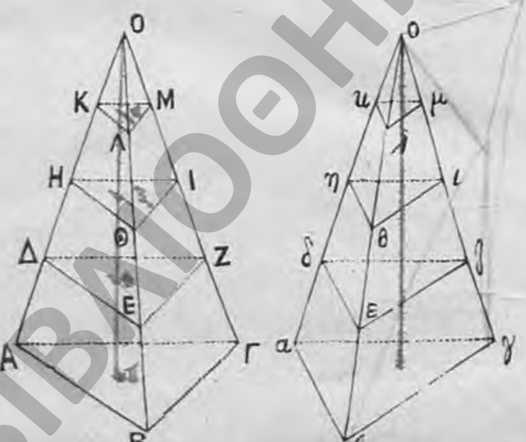
Ἂν δὲ πάλιν ἐκ τῶν κορυφῶν Β, Γ ἀχθῶσι παράλληλοι τῇ ΔΑ καὶ προσεκβληθῶσιν αἱ ΔΕ, ΔΖ, σχηματίζεται τὸ στερεὸν ΑΒΓΔΙΚ, ὅπερ ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι εἶνε πρίσμα· εἶνε δὲ τὸ πρίσμα τοῦτο μεγαλήτερον τοῦ τμήματος ΑΒΓΔΕΖ καὶ ἔχει βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ ὕψος τὸ ὕψος τοῦ τμήματος.

 (20)

ΘΕΩΡΗΜΑ

373. *Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, ἔχουσαι βάσεις ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα, εἶνε ἰσοδύναμοι.*

Ἔστωσαν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΟΑΒΓ, οαβγ ἔχουσαι τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΒΓ, αβγ ἴσας ἢ ἰσοδυνάμους καὶ ὕψη ἴσα· λέγω, ὅτι αἱ πυραμίδες αὗται εἶνε ἰσοδύναμοι.



Ἂς τεθῶσιν αἱ βάσεις τῶν δύο πυραμίδων ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀφοῦ διαιρεθῇ τὸ ὕψος τῆς μιᾶς εἰς ἴσα μέρη, ἂς ἀχθῶσιν ἀπὸ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἐπίπεδα παράλληλα τῷ ἐπιπέδῳ τῶν βάσεων. Τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διαιροῦσι τὰς πυραμίδας εἰς μέρη, τὴν μὲν ΟΑΒΓ εἰς τὰ μέρη ΑΒΓΔΕΖ, ΔΕΖΗΘΙ, ΗΘΙΚΛΜ, ΚΛΜΟ, τὴν δὲ οαβγ εἰς τὰ μέρη αβγδεζ, δεζηθι, ηθικλμ, κλμο.

Ἐφαρμόζοντες τὸ προηγούμενον θεώρημα εἰς τὰ τμήματα τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ καὶ παριστῶντες διὰ τοῦ φ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, εὑρίσκομεν τὰς ἀνισότητας.

τμ. ΑΒΓΔΕΖ $<$(ΑΒΓ).φ.		τμ. ΑΒΓΔΕΖ $>$(ΔΕΖ).φ
τμ. ΔΕΖΗΘΙ $<$(ΔΕΖ).φ.	ἀλλὰ καὶ	τμ. ΔΕΖΗΘΙ $>$(ΗΘΙ).φ
τμ. ΗΘΙΚΛΜ $<$(ΗΘΙ).φ.		τμ. ΗΘΙΚΛΜ $>$(ΚΛΜ).φ
τμ. ΚΛΜΟ $<$(ΚΛΜ).φ.		τμ. ΚΛΜΟ $>$0,

ἐξ ὧν προστιθεμένων κατὰ μέλη προκύπτει, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων

(ΑΒΓ + ΔΕΖ + ΗΘΙ + ΚΛΜ).φ
(ΔΕΖ + ΗΘΙ + ΚΛΜ).φ (θ)

Ὁμοίως δεικνύομεν, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος οαβγ περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀθροισμάτων

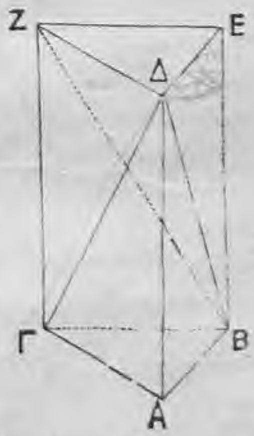
(αβγ + δεζ + ηθι + κλμ).φ
(δεζ + ηθι + κλμ).φ

Ἐπειδὴ δὲ εἶνε αβγ=ΑΒΓ καὶ (κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ θεωρήματος 370) δεζ=ΔΕΖ, ηθι=ΗΘΙ, κλμ=ΚΛΜ, συνάγεται, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων περιλαμβάνονται ἀμφότεροι μεταξὺ τῶν αὐτῶν δύο ἀθροισμάτων (θ)· ἑπομένως οἱ ὄγκοι οὗτοι διαφέρουσιν ἀπ' ἀλλήλων ὀλιγώτερον ἢ ὅσον τὰ δύο ἀθροίσματα διαφέρουσιν, ἤτοι ὀλιγώτερον τοῦ (ΑΒΓ).φ. Ἀλλὰ τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ, ὅταν τὸ ὕψος τῶν πυραμίδων διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη ἀρκούντως πολλά· διότι ὁ μὲν παράγων (ΑΒΓ) μένει ἀμετάβλητος, ὁ δὲ φ καταντᾷ ὅσον θέλομεν μικρός. Ἐντεῦθεν συμπεραίνομεν, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο πυραμίδων οαβγ, ΟΑΒΓ οὐδεμίαν δύνανται νὰ ἔχωσι διαφοράν, ἤτοι εἶνε ἴσοι· ἄρα αἱ πυραμίδες αὗται εἶνε ἰσοδύναμοι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

374. *Πᾶσα τριγωνικὴ πυραμὶς εἶνε τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

Ἔστω τριγωνικὴ πυραμὶς ἡ ΑΒΓΔ.



Ἐκ τῶν κορυφῶν Β, Γ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἴσαι καὶ παράλληλοι τῇ ΑΔ, αἱ ΓΖ, ΒΕ καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ σημεῖα Δ,Ε,Ζ· τὸ προκύπτον σχῆμα ΑΒΓΔΕΖ εἶνε πρίσμα τριγωνικὸν καὶ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰ τῆς πυραμίδος· λέγω, ὅτι ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶνε τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ. Διότι ἀφαιρουμένης τῆς πυραμίδος ΑΒΓΔ ἀπὸ τοῦ πρίσματος, μένει τὸ στερεὸν ΔΒΓΖΕ, ὅπερ εἶνε πυραμὶς βάσιν ἔχουσα τὸ παραλληλόγραμμον ΒΓΖΕ καὶ κορυφὴν τὸ Δ. Ἐὰν δὲ διὰ τῶν σημείων Δ, Β, Ζ ἀχθῇ ἐπίπεδον, διαιρεῖται ἡ πυραμὶς ΔΒΓΖΕ εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας ΔΒΓΖ, ΔΒΖΕ, αἵτινες εἶνε ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουσι βάσεις ΒΓΖ, ΒΖΕ ἴσας (ὡς ἡμίση τοῦ παραλληλογράμμου ΒΕΖΓ), καὶ ὕψος κοινὸν τὴν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΕΖΓ τῶν βάσεων ἀγομένην κάθετον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΔΒΖΕ εἶνε ἰσοδύναμος τῇ ΑΒΓΔ· διότι, ἂν ληφθῶσιν ὡς βάσεις αὐτῶν τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ, κορυφαὶ δὲ (352) τὰ σημεῖα Δ, Β, καὶ τὰ ὕψη αὐτῶν θὰ εἶνε ἴσα, ὡς κάθετοι ἠγμέναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΔΕΖ. Ἐπείχθῇ λοιπόν, ὅτι ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶνε ἰσοδύναμος τῇ ΔΒΕΖ, αὕτη δὲ ἰσοδύναμος τῇ ΔΒΓΖ· ἐπομένως αἱ τρεῖς πυραμίδες, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ, εἶνε ἰσοδύναμοι· ἄρα ἡ πυραμὶς ΑΒΓΔ εἶνε τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΕΖ, ὅπερ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

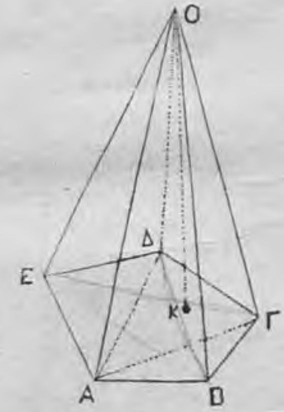
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θεώρημα τοῦτο, δι' οὗ ἀνάγεται ἡ μέτρησις τῶν πυραμίδων εἰς τὴν μέτρησιν τῶν πρισμάτων, ἀποδίδεται εἰς τὸν Εὔδοξον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

375 *Ὁ ὄγκος πάσης πυραμίδος εἶνε τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.*

Ἔστω κατὰ πρῶτον τριγωνικὴ πυραμὶς ἔχουσα βάσιν β καὶ ὕψος υ. Ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, ὅπερ ἔχει βάσιν β καὶ ὕψος υ, εἶνε β.υ· ἐπειδὴ δὲ ἡ πυραμὶς εἶνε τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος τούτου, ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶνε

$$\frac{1}{3}\ \beta.\upsilon.$$



Ἔστω νῦν ἡ τυχοῦσα πολυγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓΔΕ· ἐὰν διαιρεθῇ ἡ βάσις εἰς τρίγωνα διὰ τῶν διαγωνίων ΑΓ, ΑΔ καὶ ἀχθῶσιν ἐπίπεδα διὰ τῆς κορυφῆς Ο καὶ διὰ τῶν διαγωνίων τούτων, διαιρεῖται ἡ πολυγωνικὴ πυραμὶς εἰς τριγωνικὰς πυραμίδας ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο καὶ βάσεις τὰ τρίγωνα, εἰς ἃ διῃρέθη τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ· κοινὸν δὲ ὕψος τὸ ὕψος ΟΚ τῆς δοθείσης πυραμίδος. Οἱ ὄγκοι τῶν πυραμίδων τούτων εἶνε

$$\frac{1}{3}\,\text{ΑΒΓ.ΟΚ},\quad \frac{1}{3}\,\text{ΑΓΔ.ΟΚ},\quad \frac{1}{3}\,\text{ΑΔΕ.ΟΚ}\cdot$$

ὥστε ὁ ὄγκος τῆς δοθείσης πυραμίδος ΟΑΒΓΔΕ εἶνε τὸ ἄθροισμα

$$\frac{1}{3}\,\text{ΑΒΓ.ΟΚ} + \frac{1}{3}\,\text{ΑΓΔ.ΟΚ} + \frac{1}{3}\,\text{ΑΔΕ.ΟΚ}$$

ἢ $\frac{1}{3}\cdot\text{ΟΚ.(ΑΒΓ}+\text{ΑΓΔ}+\text{ΑΔΕ)}$, ἤτοι $\frac{1}{3}\cdot\text{ΟΚ.\ (ΑΒΓΔΕ)}$,

τουτέστι τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς.

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

376. *Πᾶσα πυραμὶς εἶνε τὸ τρίτον πρίσματος ἔχοντος τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.*

$\frac{O}{o} = \frac{\frac{1}{3} BY}{\frac{1}{3} bv}$ $\frac{O}{o} = \frac{B}{b}$

$\frac{O}{o} = \frac{BY}{bv}$ $\frac{O}{o} = \frac{V}{v}$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

377. *Αἱ ἰσοϋψεῖς πυραμίδες εἶνε πρὸς ἀλλήλας ὡς αἱ βάσεις αὐτῶν, αἱ δὲ ἔχουσαι ἴσας βάσεις ἢ ἰσοδυνάμους εἶνε ὡς τὰ ὕψη αὐτῶν.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸν ὄγκον οἱουδήποτε πολυέδρου εὑρίσκομεν ἀναλύοντες αὐτὸ εἰς πυραμίδας. Ἐὰν τῷ ὄντι ἐντὸς τοῦ πολυέδρου ληφθῇ τυχὸν σημεῖον Ο καὶ ἐξ αὐτοῦ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυέδρου, αἱ εὐθεῖαι αὗται μετὰ τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου σχηματίζουσι τρίγωνα ἐντὸς τοῦ στερεοῦ, τὰ δὲ ἐπίπεδα τῶν τριγώνων τούτων διαιροῦσι τὸ στερεὸν εἰς πυραμίδας, κοινὴν κορυφὴν ἐχούσας τὸ Ο καὶ βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ στερεοῦ. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.. τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν τοῦ στερεοῦ, καὶ διὰ $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ τὰς ἀποστάσεις τῶν ἑδρῶν ἀπὸ τοῦ Ο, ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ θὰ εἶνε

$$\frac{1}{3}\cdot(\varepsilon_1\rho_1 + \varepsilon_2\rho_2 + \varepsilon_3\rho_3 + \ldots).$$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

19 1) Πυραμίς τις ἔχει βάσιν τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε $5^{\pi}, 2$, τὸ δὲ ὕψος της εἶνε 12^{π}· ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

$$(\text{Ἀπ.} \frac{1}{3}\times 5,2\times 5,2\times 12, \text{ ἤτοι } 108^{\kappa\pi}, 16).$$

20 2) Κανονική τις πυραμὶς ἔχει βάσιν ἑξάγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἶνε $3^{\pi\chi}, 2$, ἑκάστη δὲ τῶν εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς συντρεχουσῶν ἀκμῶν εἶνε $8^{\pi\chi}$· ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

Ἀπ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος εἶνε (σελ. 181) $\frac{3}{2}\times 3,2\times 3,2\times\sqrt{3}$, τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς εἶνε πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶνε $8^{\pi\chi}$, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ εἶνε $3^{\pi\chi}, 2$ (διότι τὸ ὕψος, ἐὰν ἀχθῇ, πίπτει εἰς τὸ κέντρον τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου), ὥστε τὸ ὕψος εἶνε $\sqrt{8^2-(3,2)^2}$ ἢ $\sqrt{53,76}$· ἐπομένως ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶνε $\frac{1}{2}\times 3,2\times 3,2\times\sqrt{3}\times\sqrt{53,76}$.

Ἐκτελοῦντες δὲ τὰς πράξεις διὰ τῶν λογαρίθμων, εὑρίσκομεν τὸν ὄγκον ἴσον μὲ $65^{\kappa\pi}, 02\ldots$

3) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος πυραμίδος, ἥτις περικλείεται ὑπὸ τεσσάρων ἰσοπλεύρων τριγώνων.

Ἀπ. Ἐὰν διὰ τοῦ μ παρασταθῇ ἡ πλευρὰ τῶν τριγώνων, ἡ μὲν βάσις θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $\frac{1}{4}\mu^2\sqrt{3}\cdot$ τὸ δὲ ὕψος τῆς πυραμίδος, ἐὰν ἀχθῇ, θὰ πέσῃ εἰς τὸ κέντρον τῆς βάσεως, ἑπομένως θὰ εἶνε πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶνε μ, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ εἶνε ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ εἰς τὴν βάσιν περιγεγραμμένου κύκλου, ἥτις εἶνε (267) $\frac{\mu}{\sqrt{3}}$, ὥστε τὸ ὕψος εἶνε $\sqrt{\mu^2-\frac{\mu^2}{3}}$ ἢ $\mu\sqrt{\frac{2}{3}}$ ἑπομένως ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\mu^2\sqrt{3}.\ \mu.\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot \text{ ἤτοι } \frac{\sqrt{2}}{12}.\ \mu^3.$$

22

ΠΕΡΙ ΚΟΛΟΥΡΟΥ ΠΥΡΑΜΙΔΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

378. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου περιεχόμενον μέρος αὐτῆς λέγεται *κόλουρος πυραμίς*.

Βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος λέγονται αἱ παράλληλοι ἕδραι αὐτῆς, *ὕψος* δὲ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

379. *Πᾶσα κόλουρος πυραμὶς εἶνε ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ ὕψος τῆς κολούρου, βάσεις δέ, ἡ μὲν τὴν μίαν βάσιν τῆς κολούρου, ἡ δὲ τὴν ἄλλην, ἡ δὲ μέσην ἀνάλογον τῶν δύο τούτων βάσεων.*

Ἔστω κατὰ πρῶτον κόλουρος πυραμὶς τριγωνικὴ ἡ ΑΒΓΔΕΖ. Ἐὰν διὰ τῶν τριῶν σημείων Δ, Γ, Β, ἀχθῇ ἐπίπεδον, ἀποκόπτει ἀπὸ τῆς κολούρου πυραμίδος τὴν πυραμίδα ΔΑΒΓ, ἥτις ἔχει βάσιν τὴν ΑΒΓ, ὕψος δὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἤτοι τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος.

Τὸ δὲ μένον στερεὸν ΔΒΓΖΕ εἶνε πυραμὶς τετραγωνική, ἥτις διαιρεῖται διὰ τοῦ ἐπιπέδου ΔΖΒ εἰς δύο τριγωνικὰς ΔΒΕΖ, ΔΒΓΖ. Ἐκ τούτων ἡ ΔΒΕΖ ἔχει βάσιν μὲν τὴν ΔΕΖ, ὕψος δὲ καὶ αὐτὴ τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος· ἡ δὲ πυραμὶς ΔΒΓΖ δὲν βλάπτεται κατὰ τὸν ὄγκον, ἐὰν μεταφέρωμεν τὴν κορυφὴν αὐτῆς Δ ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς ΓΖΒ (διότι τοῦτο δὲν μεταβάλλει τὸ ὕψος)· ἐὰν λοιπὸν ἀχθῇ ἡ ΔΗ παράλληλος τῇ ΖΓ (ὅτε θὰ εἶνε παράλληλος (311) καὶ τῷ ἐπιπέδῳ ΖΓΒ), ἡ πυραμὶς ΔΒΓΖ θὰ εἶνε ἰσοδύναμος τῇ ΗΓΒΖ. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς ΗΓΒΖ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει βάσιν μὲν τὸ τρίγωνον ΓΗΒ, κορυφὴν δὲ τὸ Ζ· ἑπομένως ἔχει ὕψος τὸ τῆς κολούρου πυραμίδος· μένει λοιπὸν ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ βάσις αὐτῆς, ἡ ΓΗΒ, εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων ΑΒΓ, ΔΕΖ.

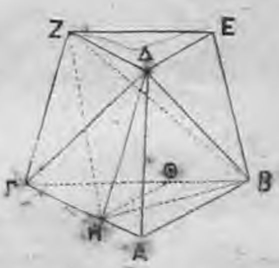
Πρὸς τοῦτο ἄγομεν ἐκ τοῦ Η τὴν ΗΘ παράλληλον τῇ ΑΒ (ἑπομένως καὶ τῇ ΔΕ) καὶ σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΓΗΘ, ὅπερ εἶνε ἴσον τῷ ΔΕΖ· διότι αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶνε ἴσαι κατὰ μίαν, ὡς ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν περιεχόμεναι (322), εἶνε δὲ καὶ ΖΔ=ΓΗ, ὡς παράλληλοι μεταξὺ παραλλήλων.

Συγκρίνοντες νῦν τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΗΒ βλέπομεν, ὅτι ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Β καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΑΓ, ΓΗ ἐπ' εὐθείας· ἑπομένως ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος (τὴν ἐκ τοῦ Β ἐπὶ τὴν ΑΓ καταβιβαζομένην κάθετον)· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ὡς αἱ βάσεις των, τουτέστιν εἶνε

$$\frac{ΑΒΓ}{ΓΗΒ}=\frac{ΑΓ}{ΓΗ}, \quad (1)$$

Ἐπίσης καὶ τὰ δύο τρίγωνα ΓΗΒ καὶ ΓΗΘ ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν τὸ Η καὶ τὰς βάσεις αὐτῶν ΓΒ, ΓΘ ἐπ' εὐθείας· ἄρα εἶνε ἰσοϋψῆ καὶ ἑπομένως εἶνε ὡς αἱ βάσεις των, ἤτοι εἶνε

$$\frac{ΓΗΒ}{ΓΗΘ}=\frac{ΓΒ}{ΓΘ} \quad (2)$$



Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ΗΘ παράλληλος τῇ ΑΒ, ἔχομεν (228)

$$\frac{ΑΓ}{ΓΗ}=\frac{ΓΒ}{ΓΘ},$$

διὰ δὲ τὴν ἰσότητα ταύτην αἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) δίδουσιν

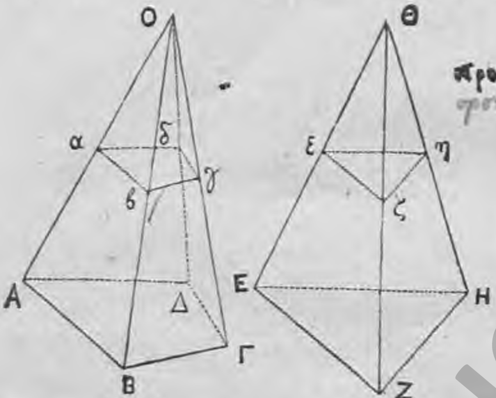
$$\frac{ΑΒΓ}{ΓΗΒ}=\frac{ΓΗΒ}{ΓΗΘ},$$

ἢ ΑΒΓ : ΓΗΒ=ΓΗΒ : ΓΗΘ ἢ καὶ ΑΒΓ : ΓΗΒ=ΓΗΒ : ΔΕΖ† (διότι ΓΗΘ=ΔΕΖ), ἤτοι τὸ τρίγωνον ΓΗΒ εἶνε μέσον ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων ΑΒΓ, ΔΕΖ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς ΑΒΓΔΕΖ εἶνε ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινόν, τὸ ὕψος της, βάσεις δὲ ἡ μὲν τὴν μίαν βάσιν ΑΒΓ τῆς κολούρου, ἡ δὲ τὴν ἄλλην ΔΕΖ, ἡ δὲ μέσην ἀνάλογον τῶν δύο ἄλλων, τὴν ΒΗΓ.

† ἀναλογία συνεχὴς ὡς 12:6=6:3 ἢ 16:8=8:4.
[illegible] 8 ἢ 6 [illegible] μέσον ἀνάλογον
[illegible]

Ἔστω νῦν κόλουρος πυραμὶς πολυγωνικὴ ἡ ΑΒΓΔαβγδ, ἥτις προέκυψε τμηθείσης τῆς πυραμίδος ΟΑΒΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, τοῦ αβγδ. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ ~~συγκλίνοντος~~ προεκτεινομένου κατασκευάζομεν τρίγωνον ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ ΑΒΓΔ, τὸ ΕΖΗ, καὶ ἐπ᾽ αὐτοῦ ὡς βάσεως κατασκευάζομεν πυραμίδα, τὴν ΘΕΖΗ, ἰσοϋψῆ τῇ δοθείσῃ. Αἱ δύο πυραμίδες ΟΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ θὰ εἶνε ἰσοδύναμοι, τὸ δὲ ἐπίπεδον αβγδ ἐκβαλλόμενον θὰ τέμνῃ τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα κατὰ τὸ τρίγωνον εζη, τὸ ὁποῖον θὰ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ πολυγώνῳ αβγδ (371)· διὰ τοῦτο καὶ ἡ πυραμὶς Οαβγδ θὰ εἶνε ἰσοδύναμος τῇ Θεζη. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τῶν ἰσοδυνάμων, ΟΑΒΓΔ καὶ ΘΕΖΗ, ἀφαιρεθῶσιν ἰσοδύναμα, τὰ Οαβγδ καὶ Θεζη, τὰ μένοντα στερεά, ἤτοι αἱ κόλουροι πυραμίδες, θὰ εἶνε ἰσοδύναμα. Ἄρα ἡ κόλουρος πυραμὶς θὰ εἶνε ἰσοδύναμος τῷ ἀθροίσματι τριῶν πυραμίδων ἐχουσῶν ὕψος, ὅσον καὶ αὐτή, βάσεις δέ, ἡ μὲν τὴν ΕΖΗ, ἡ δὲ τὴν εζη, ἡ δὲ μέσην αὐτῶν ἀνάλογον· ἀλλ᾽ αἱ τρεῖς εἰρημέναι πυραμίδες εἶνε ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς πυραμίδας, αἵτινες ἔχουσι τὸ αὐτὸ ὕψος, βάσεις δὲ τὰς ΑΒΓΔ, αβγδ καὶ τὴν μέσην τούτων ἀνάλογον. Ἄρα κτλ.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ Β καὶ β τὰς δύο βάσεις κολούρου πυραμίδος καὶ διὰ υ τὸ ὕψος αὐτῆς, ὁ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶνε

$$\frac{1}{3}B.\upsilon + \frac{1}{3}\beta.\upsilon + \frac{1}{3}\sqrt{B.\beta}.\upsilon, \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{3}\upsilon(B+\beta+\sqrt{B\beta})$$

Ἡ παράστασις αὕτη τοῦ ὄγκου δύναται νὰ λάβῃ καὶ ἄλλην ἁπλουστέραν μορφήν· διότι, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν βάσεων Β καὶ β, θὰ εἶνε $\beta = B.\rho^2$,

ὅθεν $\sqrt{B.\beta} = \sqrt{B.B\rho^2} = B\rho$,

ὅθεν ὁ ὄγκος γίνεται $\frac{1}{3}\upsilon(B + B\rho^2 + B\rho)$, ἤτοι

$$\frac{1}{3}B.\upsilon(1+\rho+\rho^2).$$

ἕως ἐδῶ

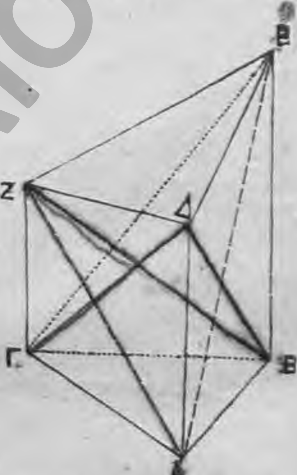
ΠΕΡΙ ΚΟΛΟΒΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

380. Ἐὰν πρίσμα τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου μὴ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ, μηδὲ τέμνοντος τὴν βάσιν, τὸ μεταξὺ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἐπιπέδου περιεχόμενον μέρος λέγεται *κολοβὸν πρίσμα*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

381. *Πᾶν κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα εἶνε ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἵτινες ἔχουσι βάσιν μὲν κοινὴν τὴν βάσιν τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς κορυφὰς τῆς τομῆς.*



Ἔστω κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα τὸ ΑΒΓΔΕΖ, ἔχον βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ τομὴν μὴ παράλληλον τῇ βάσει, τὴν ΔΕΖ· λέγω, ὅτι τὸ στερεὸν τοῦτο εἶνε ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν κορυφὰς τὰ σημεῖα Δ,Ε,Ζ καὶ βάσιν κοινὴν τὴν ΑΒΓ.

Τὸ ἐπίπεδον ΔΒΓ, ἐὰν ἀχθῇ, τέμνει ἀπὸ τοῦ στερεοῦ τὴν πυραμίδα ΔΑΒΓ, ἥτις ἔχει βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ.

Τὸ δὲ μένον στερεὸν ΔΒΓΖΕ εἶνε πυραμὶς τετραγωνικὴ ἔχουσα κορυφὴν τὸ Δ, καὶ ἂν ἀχθῇ τὸ ἐπίπεδον ΔΒΖ, διαιρεῖ αὐτὴν εἰς δύο τριγωνικὰς ΔΒΓΖ, ΔΒΖΕ. Τὴν κορυφὴν Δ τῆς πυραμίδος ΔΒΓΖ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ Α· διότι ἡ εὐθεῖα ΔΑ εἶνε παράλληλος τῇ βάσει αὐτῆς ΒΓΖ, εἶνε λοιπὸν ἡ πυραμὶς ΔΒΓΖ ἰσοδύναμος τῇ ΑΒΓΖ, τῆς ὁποίας βάσιν δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Ζ. Καὶ τῆς πυραμίδος ΔΒΖΕ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν τὴν κορυφὴν Δ εἰς τὸ Α (διότι ἡ ΔΑ εἶνε παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΒΖΕ), ὅτε εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς τὴν πυραμίδα ΑΒΖΕ· ἀλλὰ καὶ ταύτης τὴν κορυφὴν Ζ δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ Γ (διότι ἡ ΖΓ εἶνε παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ ΑΒΕΔ, ἐφ' οὗ κεῖται ἡ βάσις αὐτῆς ΑΒΕ), ὅτε εὑρίσκομεν ἰσοδύναμον αὐτῆς τὴν πυραμίδα ΑΒΓΕ, τῆς ὁποίας βάσιν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὴν ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Ε.

Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι τὸ τριγωνικὸν κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶνε ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, ἐχουσῶν βάσιν κοινὴν τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ πρίσματος, κορυφὰς δὲ τὰς τρεῖς κορυφὰς Δ,Ε,Ζ τῆς τομῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐὰν τὸ κολοβὸν πρίσμα εἶνε ὀρθόν, τουτέστιν ἂν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ εἶνε κάθετοι ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ, ὁ ὄγκος αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{1}{3}$ (ΑΒΓ).(ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ).

Ἐὰν δὲ εἶνε πλάγιον, διαιρεῖται διὰ τῆς καθέτου τομῆς εἰς δύο ὀρθὰ καὶ εὑρίσκεται ὁ ὄγκος αὐτοῦ ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν παραλλήλων πλευρῶν του.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Τὰ κολοβὰ πολυγωνικὰ πρίσματα διαιροῦνται εἰς τριγωνικά, καθ' ὃν τρόπον καὶ τὰ τέλεια (366, β΄).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Κόλουρός τις πυραμὶς ἔχει βάσεις ὀρθογώνια τρίγωνα· τοῦ ἑνὸς αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶνε $5^{\pi\chi},8$ καὶ $3^{\pi\chi},2$, τοῦ δὲ ἄλλου ἡ ὑποτείνουσα εἶνε $2^{\pi\chi}$. Τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος εἶνε $4^{\pi\chi},25$· ζητεῖται ὁ ὄγκος αὐτῆς.

Ἀπ. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς μιᾶς βάσεως εἶνε $\frac{1}{2}\times 5,8\times 3,2$, ἤτοι 9, 28, τῆς δὲ ἄλλης (ἐπειδὴ εἶνε ὁμοία τῇ πρώτῃ) τὸ ἐμβαδὸν ε θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν 9,28 τῆς πρώτης, ὃν ἔχουσι καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ὑποτεινουσῶν, ἤτοι θὰ εἶνε

$$\frac{\varepsilon}{9,28}=\frac{4}{43,88},\ \text{ὅθεν}\ \varepsilon=\frac{9,28}{10,97}.$$

ἑπομένως ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε $\frac{1}{3}.4,25.\left(9,28+\frac{9,28}{10,97}+\frac{9,28}{\sqrt{10,97}}\right)$

$$\text{ἢ}\quad \frac{4,25\times 9,28}{3\times 10,97}(11,97+\sqrt{10,97})=\frac{4,25\times 9,28\times 15,28...}{3\times 10,97},$$

διότι $\sqrt{10,97}$ εὑρίσκεται (διὰ τῶν λογαρίθμων) ἴση μὲ 3,31...·ὑπολογίζοντες δὲ τὴν τελευταίαν παράστασιν διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν τέλος τὸν ζητούμενον ὄγκον ἴσον μὲ $18^{\kappa\pi},31...$

2) Πρίσμα τι ὀρθὸν ἔχει βάσιν τρίγωνον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν εἶνε $20^{\tau\pi}$, ἐτμήθη δὲ δι' ἐπιπέδου πλαγίως πρὸς τὴν βάσιν του, ὥστε αἱ τρεῖς παράλληλοι αὐτοῦ ἀκμαὶ ἔγιναν ἡ μὲν 8 πήχεις, ἡ δὲ 2, ἡ δὲ 7· ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ τούτου πρίσματος.

$$\left(\text{Ἀπ.}\ \frac{1}{3}.20.(8+2+7),\ \text{ἤτοι}\ 113^{\kappa\pi}\ \frac{1}{3}\right).$$

ΠΕΡΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

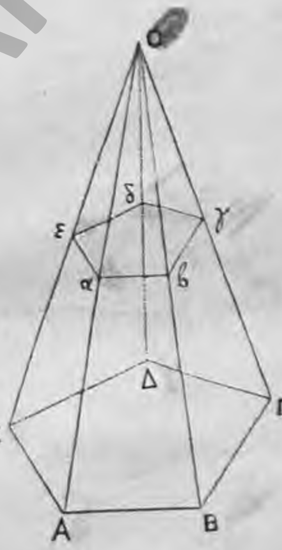
382. *Ὅμοια* λέγονται δύο πολύεδρα, ἐὰν ἔχωσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας.

Αἱ ὅμοιαι ἕδραι λέγονται *ὁμόλογοι* ἕδραι. Καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν λέγονται *ὁμόλογοι* κορυφαί.

Καὶ αἱ ὁμολόγους κορυφὰς ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι λέγονται καὶ αὗται *ὁμόλογοι*.

ΘΕΩΡΗΜΑ

383. *Ἐὰν αἱ πλευραὶ πυραμίδος (αἱ εἰς τὴν κορυφὴν αὐτῆς συντρέχουσαι) πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, ἡ προκύπτουσα νέα πυραμὶς εἶναι ὁμοία τῇ πρώτῃ.*



Ἔστω πυραμὶς ἡ ΟΑΒΓΔΕ· ἂς πολλαπλασιασθῶσιν αἱ πλευραὶ αὐτῆς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ, (ἐν τῷ σχήματι ἐλήφθη $\rho = \frac{1}{2}$), ὅτε γίνονται Οα, Οβ, Ογ, Οδ, Οε, καὶ ἂς ἐπιζευχθῶσι τὰ ἄκρα τούτων, ὡς καὶ πρίν· λέγω, ὅτι τὸ σχῆμα αβγδε εἶνε ἐπίπεδον καὶ ὅτι ἡ πυραμὶς Οαβγδε εἶνε ὁμοία τῇ δοθείσῃ ΟΑΒΓΔΕ.

Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, Οαβ ἔχουσι μίαν γωνίαν ἴσην (τὴν Ο) καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὴν πλευρὰς ἀναλόγους (ἐπειδὴ ἐλήφθη Οα=ρ. ΟΑ καὶ Οβ=ρ. ΟΒ)· ἄρα τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶνε ὅμοια καὶ ἡ αβ εἶνε παράλληλος τῇ ΑΒ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύονται τὰ τρίγωνα ΟΒΓ, Οβγ, ὅμοια καὶ ἡ βγ παράλληλος τῇ ΒΓ· ὡσαύτως τὰ ΟΓΔ, Ογδ, καὶ καθεξῆς.

Τὸ δὲ σχῆμα αβγδε εἶνε ἐπίπεδον καὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ εἶνε παράλληλον τῇ βάσει ΑΒΓΔΕ· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου α ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ΑΒΓΔΕ, θὰ τέμνῃ τὴν ἕδραν ΟΑΒ κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΑΒ, ἄρα κατὰ τὴν αβ· θὰ τέμνῃ καὶ τὴν ἕδραν ΟΒΓ κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΒΓ καὶ διὰ τοῦ β διερχομένην, ἄρα κατὰ τὴν βγ· καὶ τὴν ἕδραν ΟΓΔ θὰ τέμνῃ κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον τῇ ΓΔ· ἄρα κατὰ τὴν γδ, καὶ οὕτω καθεξῆς· ὥστε τὸ σχῆμα αβγδε κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου.

Κατὰ δὲ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 369, τὰ δύο σχήματα ΑΒΓΔΕ, αβγδε εἶνε ὅμοια καὶ οἱ λόγοι

$$\frac{\alpha\beta}{AB},\ \frac{\beta\gamma}{B\Gamma},\ \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta}\cdots$$

τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶνε ἴσοι τῷ λόγῳ $\frac{O\alpha}{OB}$, τουτέστι τῷ ἀριθμῷ ρ.

Ὥστε αἱ δύο πυραμίδες ΟΑΒΓΔΕ, Οαβγδε ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ὁμοίας κατὰ μίαν.

Καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν, αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι, εἶνε ἴσαι. Ἔστωσαν, παραδείγματος χάριν, αἱ στερεαὶ γωνίαι Α καὶ α αἱ τρεῖς ἐπίπεδοι γωνίαι, ὑφ' ὧν σχηματίζεται ἡ Α, εἶνε ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας, ὑφ' ὧν σχηματίζεται ἡ α, εἶνε δὲ καὶ ὁμοίως τεταγμέναι καὶ αἱ δίεδροι δὲ γωνίαι Αα καὶ αΟ τῶν στερεῶν τούτων γωνιῶν εἶνε ἴσαι· διότι σχηματίζονται ὑπὸ δύο τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων· ἐὰν λοιπὸν νοήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν α κινουμένην οὕτως, ὥστε ἡ δίεδρος γωνία αΟ νὰ ἐφαρμόζῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ ΑΟ, βλέπομεν, ὅτι, ὅταν τὸ α πέσῃ εἰς τὸ Α, θὰ πέσῃ καὶ ἡ αε ἐπὶ τῆς ΑΕ, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν Οαε καὶ ΟΑΕ· ἐπίσης καὶ ἡ αβ ἐπὶ τῆς ΑΒ διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν Οαβ καὶ ΟΑΒ· ἐπομένως ἡ στερεὰ γωνία α θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς Α, ἄρα εἶνε ἴσαι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι αἱ δύο πυραμίδες ΟΑΒΓΔΕ, Οαβγδε ἔχουσι τὰς ἕδρας αὐτῶν ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας· ἄρα εἶνε ὅμοιαι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

384. Ἐὰν πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτῆς, ἡ ἀποτεμνομένη πυραμὶς εἶνε ὁμοία τῇ ὅλῃ.

Διότι, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδαφίου 369, αἱ πλευραὶ αὐτῆς τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα, ἤτοι προκύπτοντα ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιαζομένων ἐπί τινα ἀριθμόν.

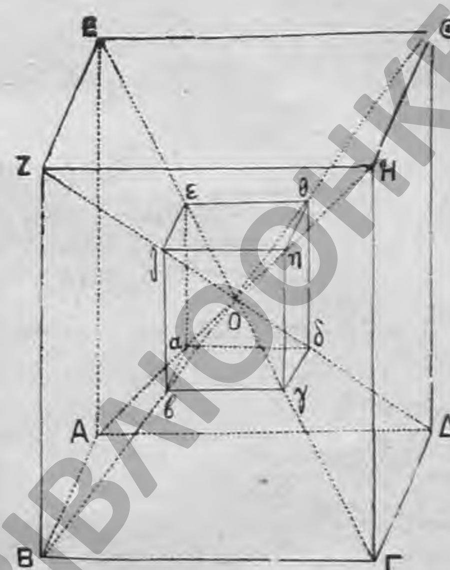
ΘΕΩΡΗΜΑ

385. Δοθέντος πολυέδρου δύναται νὰ κατασκευασθῇ ὅμοιον.

Ἔστω δοθὲν πολύεδρον τὸ ΑΒΓΔΕΖΗΘ.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ στερεοῦ ἂς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς τὰς κορυφὰς αὐτοῦ, αἱ ΟΑ, ΟΒ, ..., ΟΘ καὶ ἂς πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ, ὅτε γίνονται Οα, Οβ, ..., Οθ, ἂς ἐπιζευχθῶσι δὲ τὰ ἄκρα αὐτῶν α, β,..., θ, ὡς εἶνε καὶ εἰς τὸ στερεόν· λέγω, ὅτι τὸ προκύπτον στερεὸν αβγδεζηθ εἶνε ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν ΑΒΓΔΕΖΗΘ.

Διότι τὰ δύο στερεὰ σύγκεινται ἐξ ἰσαρίθμων πυραμίδων ὁμοίων καὶ ὁμοίως κειμένων· παραδείγματος χάριν, ἡ πυραμὶς Οαβγδ εἶνε ὁμοία τῇ ΟΑΒΓΔ (κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα) καὶ ἡ Οαβεζ ὁμοία τῇ ΟΑΒΕΖ, καὶ καθεξῆς· ἑπομένως εἶνε ἡ ἕδρα αβγδ ὁμοία καὶ παράλληλος τῇ ΑΒΓΔ, καὶ ἡ αβεζ ὁμοία καὶ παράλληλος τῇ ΑΒΕΖ, καὶ καθεξῆς· ὥστε τὰ δύο στερεὰ ἔχουσι τὰς ἕδρας των ἰσαρίθμους καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν. Ἀλλὰ καὶ αἱ στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι, αἱ ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζόμεναι, εἶνε ἴσαι· διότι αἱ στερεαὶ γωνίαι Α καὶ α (ἵνα ταύτας θεωρήσωμεν) ἔχουσι τὰς ἐπιπέδους αὐτῶν γωνίας ἴσας κατὰ μίαν (ὡς ἀντιστοίχους γωνίας ὁμοίων πολυγώνων) καὶ ὁμοίως τεταγμένας, καὶ τὰς ἕδρας αὐτῶν παραλλήλους· ἐὰν λοιπὸν νοήσωμεν τὴν στερεὰν γωνίαν α οὕτω κινουμένην, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς νὰ διατρέχῃ τὴν εὐθεῖαν αΑ, αἱ δὲ ἕδραι αὐτῆς νὰ μένωσι παράλληλοι ἑαυταῖς, βλέπομεν ἀμέσως ὅτι, ὅταν τὸ α φθάσῃ εἰς τὸ Α, ἡ μὲν ἕδρα αβζε θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΑΒΖΕ παραλλήλου αὐτῆς, ἡ αβγδ ἐπὶ τῆς ΑΒΓΔ καὶ ἡ αεδθ ἐπὶ τῆς ΑΕΔΘ· ἤτοι αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι α καὶ Α ἐφαρμόζουσιν.



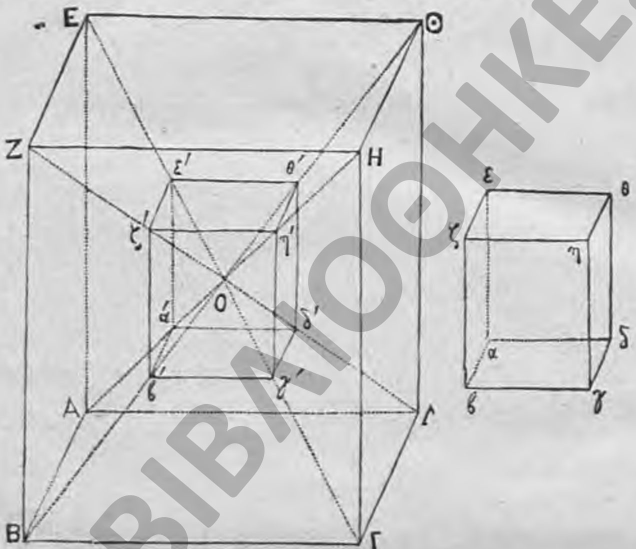
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι τὰ δύο στερεὰ ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ αβγδεζηθ ἔχουσι τὰς ἕδρας των ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ὁμοίων ἑδρῶν σχηματιζομένας στερεὰς γωνίας ἴσας· ἄρα εἶνε ὅμοια· ὅ. ἔ. δ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

386. Δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ διαιρεθῶσιν εἰς ἰσαρίθμους πυραμίδας, ὁμοίας κατὰ μίαν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν τεταγμένας.

Ἔστωσαν ὅμοια πολύεδρα τὰ ΑΒΓΔΕΖΗΘ καὶ αβγδεζηθ· καὶ δύο ὁμόλογοι ἀκμαὶ αὐτῶν αἱ αβ, ΑΒ ἔχουσαι λόγον $\frac{\alpha\beta}{AB}$ ἴσον τῷ ἀριθμῷ ρ.

Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου Ο τοῦ στερεοῦ ΑΗ ἂς κατασκευασθῇ (κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον) πολύεδρον ὅμοιον τῷ ΑΗ πολλαπλασιαζομένων τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ,..., ΟΘ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ· τὸ πολύεδρον τοῦτο α΄β΄γ΄δ΄ε΄ζ΄η΄θ΄ εἶνε ἴσον τῷ αβγδεζηθ.



Διότι αἱ στερεαὶ αὐτῶν γωνίαι εἶνε ἴσαι κατὰ μίαν· ὡς ἴσαι ταῖς τοῦ πολυέδρου ΑΗ καὶ αἱ ἕδραι αὐτῶν εἶνε ἴσαι κατὰ μίαν· διότι αἱ ἕδραι αβγδ, α΄β΄γ΄δ΄, ὡς ὅμοιαι τῇ ΑΒΓΔ, εἶνε ὅμοιαι καὶ πρὸς ἀλλήλας· ἐπειδὴ δὲ εἶνε $\frac{\alpha\beta}{AB}=\rho$ καὶ $\frac{\alpha'\beta'}{AB}=\rho$ (ὡς ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων Οα΄β΄, ΟΑΒ εὑρίσκεται), συμπεραίνεται αβ=α΄β΄. Τὰ δύο λοιπὸν ὅμοια πολύγωνα αβγδ, α΄β΄γ΄δ΄ ἔχουσι δύο ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας· ἄρα εἶνε ἴσα (διότι, ὅταν ἐκ τῶν ἴσων λόγων $\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\beta}$, $\frac{\beta'\gamma'}{\beta\gamma}$.., $\frac{\delta'\alpha'}{\alpha\delta}$ εἷς εἶνε ἴσος τῇ μονάδι 1, καὶ οἱ ἄλλοι θὰ εἶνε 1). Καὶ αἱ ἕδραι αβεζ, α΄β΄ε΄ζ΄ εἶνε ὅμοιαι (ὡς ὅμοιαι τῇ ΑΒΕΖ) καὶ ἔχουσι δύο ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας, τὰς αβ, α΄β΄, ἄρα εἶνε ἴσαι. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ἡ ἰσότης τῶν ἑδρῶν εζηθ, ε΄ζ΄η΄θ΄ καὶ καθεξῆς.

Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι τὰ δύο στερεὰ αη, α΄η΄ ἐφαρμόζουσιν, ἐὰν ἡ στερεὰ γωνία α ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης αὐτῇ α΄ τούτου δὲ γενομένου, θὰ εὑρεθῇ τὸ στερεὸν αη διῃρημένον εἰς πυραμίδας, αἵτινες εἶνε τόσαι, ὅσαι εἶνε αἱ πυραμίδες τοῦ στερεοῦ ΑΗ καὶ ὅμοιαι πρὸς αὐτὰς καὶ ὁμοίως κείμεναι.

ΠΟΡΙΣΜΑ

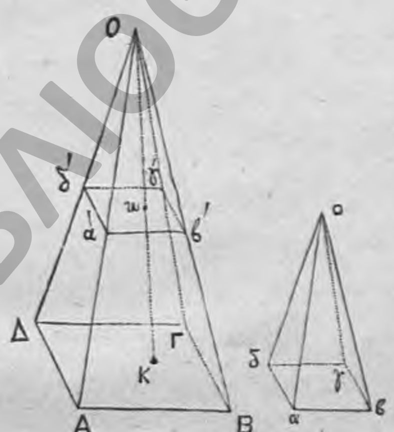
387. *Δύο ὁμοίων στερεῶν αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ ἔχουσι πᾶσαι τὸν αὐτὸν λόγον.*

Διότι ὁ λόγος $\frac{\varepsilon\theta}{\mathrm{E\Theta}}$ ἰσοῦται τῷ λόγῳ $\frac{\varepsilon\zeta}{\mathrm{EZ}}$ (ἕνεκα τῶν ὁμοίων πολυγώνων εζηθ, ΕΖΗΘ) οὗτος δὲ πάλιν ἰσοῦται τῷ λόγῳ $\frac{\alpha\beta}{\mathrm{AB}}$ (ἕνεκα τῶν ὁμοίων, πολυγώνων ΑΒΕΖ, αβεζ)· καὶ οὕτω καθεξῆς.

ΘΕΩΡΗΜΑ

388. *Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες εἶνε πρὸς ἀλλήλας ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.*

Ἔστωσαν ὅμοιαι αἱ πυραμίδες ΟΑΒΓΔ, οαβγδ.



Ἂς τεθῇ ἡ μικροτέρα ἐντὸς τῆς μεγαλειτέρας οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσωσιν αἱ ἴσαι στερεαὶ γωνίαι Ο καὶ ο· τότε ἡ βάσις αβγδ θὰ καταλάβῃ τὴν θέσιν α'β'γ'δ' καὶ θὰ εἶνε παράλληλος τῇ ΑΒΓΔ· διότι, ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν λόγον $\frac{\text{οα}}{\text{ΟΑ}}$ δύο ὁμολόγων ἀκμῶν τῶν ὁμοίων πυραμίδων, θὰ εἶνε

$$\mathrm{O}\alpha'=\text{ο}\alpha=\rho.\mathrm{OA},$$
$$\mathrm{O}\beta'=\text{ο}\beta=\rho.\mathrm{OB},$$
$$\mathrm{O}\gamma'=\text{ο}\gamma=\rho.\mathrm{O\Gamma},$$
$$\mathrm{O}\delta'=\text{ο}\delta=\rho.\mathrm{O\Delta}.$$

προκύπτει λοιπὸν ἡ πυραμὶς Οα'β'γ'δ' ἐκ τῆς ΟΑΒΓΔ, ἐὰν ταύτης αἱ πλευραὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν ρ, ἑπομένως (383) ἡ ἕδρα α'β'γ'δ' εἶνε παράλληλος τῇ ΑΒΓΔ· διὰ τοῦτο δὲ διαιρεῖ τὸ ὕψος ΟΚ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον ρ (369).

Τούτου τεθέντος εἶνε

$$\mathrm{OAB\Gamma\Delta}=\frac{1}{3}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})(\mathrm{OK}),\qquad \text{ο}\alpha\beta\gamma\delta=\frac{1}{3}(\alpha\beta\gamma\delta)(\mathrm{O}\varkappa),$$

ἐξ ὧν ἕπεται

$$\frac{(\text{ο}\alpha\beta\gamma\delta)}{(\mathrm{OAB\Gamma\Delta})}=\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)\,(\mathrm{O}\varkappa)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})\,(\mathrm{OK})}=\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}\,\frac{(\mathrm{O}\varkappa)}{(\mathrm{OK})}$$

Ἀλλ' αἱ ἕδραι αβγδ, ΑΒΓΔ εἶνε ὅμοιαι· ὅθεν

$$\frac{(\alpha\beta\gamma\delta)}{(ΑΒΓΔ)}=\frac{(\alpha\beta)^2}{(ΑΒ)^2}=\rho^2.$$

ἐπειδὴ δὲ εἶνε καὶ $\frac{(Ο\kappa)}{(ΟΚ)}=\rho$, συνάγεται

$$\frac{(ο\alpha\beta\gamma\delta)}{(ΟΑΒΓΔ)}=\rho^3=\frac{(\alpha\beta)^3}{(ΑΒ)^3},$$

τουτέστιν ὁ λόγος τῶν δύο ὁμοίων πυραμίδων ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν κύβων δύο ὁμολόγων πλευρῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ

389. *Ἐὰν αἱ πλευραὶ πυραμίδος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ (διατηρηθῶσι δὲ αἱ γωνίαι), ὁ ὄγκος αὐτῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ ρ, ἤτοι ἐπὶ ρ^3.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

390. *Δύο ὅμοια πολύεδρα Σ καὶ σ εἶνε πρὸς ἄλληλα ὡς οἱ κύβοι τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.*

Ἐπειδὴ τὰ ὅμοια πολύεδρα διαιροῦνται εἰς ἴσας τὸ πλῆθος πυραμίδας καὶ ὁμοίας κατὰ μίαν, ἔστωσαν αἱ μὲν πυραμίδες, ἐξ ὧν σύγκειται τὸ Σ, αἱ Τ, Τ', Τ'',..., αἱ δὲ ἀποτελοῦσαι τὸ σ, αἱ τ, τ', τ'',... ἔστω δὲ τῇ Τ ὁμοία ἡ τ, καὶ τῇ Τ' ἡ τ' καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων ἀκμῶν τῶν ὁμοίων πολυέδρων, καὶ αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ τῶν ὁμοίων πυραμίδων θὰ ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον· διότι αἱ πυραμίδες Τ, τ ἔχουσι μετὰ τῶν στερεῶν Σ, σ κοινὰς ἀκμάς, τὰς ἀκμὰς δύο ὁμολόγων ἑδρῶν· ὡσαύτως καὶ αἱ λοιπαί. Ἐντεῦθεν ἕπεται, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα,

$$\tau=Τ.\rho^3,\qquad \tau'=Τ'.\rho^3,\qquad \tau''=Τ''\rho^3..,$$

ἐξ ὧν προκύπτει $\tau+\tau'+\tau''+...=(Τ+Τ'+Τ''+...)\rho^3$,

τουτέστι $\sigma=\Sigma.\rho^3$

καὶ $$\frac{\sigma}{\Sigma}=\rho^3=\frac{\alpha^3}{Α^3}.$$

Ἔνθα Α καὶ α παριστῶσι δύο ὁμολόγους ἀκμὰς τῶν ὁμοίων πολυέδρων Σ, σ.

ΠΟΡΙΣΜΑ

391. *Ἐὰν αἱ ἀκμαὶ στερεοῦ πολλαπλασιασθῶσι πᾶσαι ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν ρ (διατηρηθῶσι δὲ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτοῦ ἀμετάβλητοι), ὁ ὄγκος αὐτοῦ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν τρίτην δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ρ, ἤτοι ἐπὶ $ρ^3$.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ πρότασις: *Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶνε πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα δύο ὁμολόγων ἀκμῶν αὐτῶν.*

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ ΕΝ ΓΕΝΕΙ

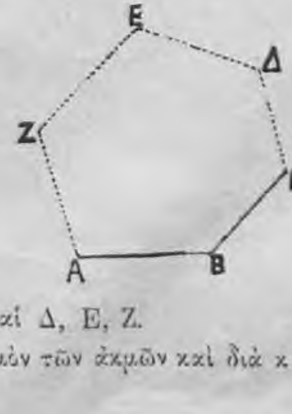
ΘΕΩΡΗΜΑ

392. *Ἐν παντὶ πολυέδρῳ ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν κατὰ δύο αὐξηθεὶς γίνεται ἴσος τῷ ἀθροίσματι τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν.*

Ἐὰν δηλονότι παραστήσωμεν διὰ τοῦ Α τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου, καὶ διὰ τοῦ Κ τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν αὐτοῦ, διὰ δὲ τοῦ Ε τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν, θὰ εἶνε

$$Κ+Ε=Α+2.$$

Νοήσωμεν τὰς ἕδρας ἐξ ὧν σύγκειται ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυέδρου, ἀφαιρουμένας ἀπ' αὐτοῦ μίαν μετ' ἄλλην, ἀλλ' οὕτως, ὥστε ἡ ἑκάστοτε ἀφαιρουμένη νὰ εἶνε ἐξ ἐκείνων, μεθ' ὧν συνείχετο ἡ προηγουμένως ἀφαιρεθεῖσα καὶ τὸ μένον μέρος τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου νὰ εἶνε ἓν συνεχές. Ὅταν ἀφαιρεθῇ ἡ πρώτη ἕδρα, φανερόν, ὅτι οὔτε ἀκμὴ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας οὔτε κορυφή· ὅταν δὲ ἡ τελευταία, ἀφαιροῦνται προδήλως τόσαι ἀκμαί, ὅσαι καὶ κορυφαί. Ὅταν δέ τις ἄλλη ἐν τῷ μεταξὺ ἀφαιρῆται, ἀποβάλλει ἡ ἐπιφάνεια ἀκμὰς περισσοτέρας τῶν κορυφῶν κατὰ μίαν. Διότι, ἂν ὑποτεθῇ, ὅτι πρόκειται νὰ ἀφαιρεθῇ ἡ ἕδρα ΑΒΓΔΕΖ καὶ ὅτι αὕτη συνέχεται μετὰ τῆς μενούσης ἐπιφανείας μόνον διὰ τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΒΓ, φανερὸν εἶνε ὅτι, ἀφαιρουμένης αὐτῆς, θὰ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας αἱ τέσσαρες ἀκμαὶ ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ· ἐνῷ κορυφαὶ θὰ ἀφαιρεθῶσι τρεῖς, αἱ Δ, Ε, Ζ.



Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ α, τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν καὶ διὰ κ, τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν, αἵτινες ἀφαιροῦνται ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας, ὅταν ἀφαιρεθῇ ἡ νυοστὴ ἕδρα, θὰ εἶνε

$$\alpha_1 - \varkappa_1 = 0$$
$$\alpha_2 - \varkappa_2 = 1$$
$$\alpha_3 - \varkappa_3 = 1$$
$$\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots$$
$$\alpha_{\tau-1} - \varkappa_{\tau-1} = 1$$
$$\alpha_\tau - \varkappa_\tau = 0\cdot$$

προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ ἐνθυμούμενοι, ὅτι εἶνε τόσαι, ὅσαι εἶνε αἱ ἕδραι, τουτέστιν Ε, εὑρίσκομεν

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_\tau) - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_\tau) = E - 2,$$

ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\tau$ ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν πασῶν τῶν ἀκμῶν, καὶ τὸ ἄθροισμα $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_\tau$ τὸν ἀριθμὸν πασῶν τῶν κορυφῶν· ὅθεν εἶνε $\quad A - K = E - 2$

ἢ $\quad K + E = A + 2 \quad$ ὅ. ἔ. δ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ἐὰν πολυέδρου τινὸς αἱ ἕδραι πᾶσαι ἔχωσι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν πλευρῶν, (ἔστω ν) καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι πᾶσαι τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἑδρῶν, (ἔστω ρ), τὸ τοιοῦτο πολύεδρον ἂς λέγηται *ὁμοιομερὲς* πολύεδρον.

Ἐὰν τὸ ὁμοιομερὲς πολύεδρον ἔχῃ Ε ἕδρας καὶ ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἔχῃ ν πλευράς, ἔχουσι πᾶσαι αἱ ἕδραι ν. Ε πλευράς· ἀλλ' αἱ πλευραὶ αὗται ἐφαρμόζουσιν ἀνὰ δύο καὶ ἀποτελοῦσι μίαν ἀκμὴν τοῦ πολυέδρου· ὥστε αἱ ἀκμαὶ εἶνε $\frac{\nu E}{2}$, ἤτοι $A = \frac{\nu E}{2}$. (1)

Αἱ γωνίαι πασῶν τῶν ἑδρῶν εἶνε νΕ καὶ ρ ἐξ αὐτῶν συνέρχονται εἰς ἑκάστην κορυφὴν τοῦ πολυέδρου· ὅθεν ἕπεται $K = \frac{\nu E}{\rho}$ (2)

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν Α καὶ Κ εἰς τὴν ἰσότητα $K + E = A + 2$, εὑρίσκομεν

$$E\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\nu} \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος ταύτης βλέπομεν, ὅτι ἡ παράστασις $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\nu} - \frac{1}{2}$ ἀνάγκη νὰ εἶνε θετικὸς ἀριθμός· ἤτοι $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\nu} > \frac{1}{2}$.

Ἡ ἐλαχίστη τιμή, τὴν ὁποίαν δύνανται νὰ ἔχωσιν οἱ ἀριθμοὶ ν καὶ ρ, εἶνε 3. Ἂν ὑποτεθῇ ν=3, ἡ ἀνισότης γίνεται $\frac{1}{\rho}>\frac{1}{6}$· ἄρα $\rho<6$· ἔχομεν λοιπὸν (ἐκ τριγώνων) τὰς ἑξῆς λύσεις

$$\nu=3,\quad \rho=3,\quad E=4,\quad K=4,\quad A=6,$$
$$\nu=3,\quad \rho=4,\quad E=8,\quad K=6,\quad A=12,$$
$$\nu=3,\quad \rho=5,\quad E=20,\quad K=12,\quad A=30.$$

Ἂν ὑποτεθῇ ν=4, ἡ ἀνισότης γίνεται $\frac{1}{\rho}>\frac{1}{4}$· ὅθεν $\rho<4$· ἐπομένως ἔχομεν μίαν μόνην λύσιν

$$\nu=4,\quad \rho=3,\quad E=6,\quad K=8,\quad A=12.$$

Ἂν ὑποτεθῇ ν=5, ἡ ἀνισότης γίνεται $\frac{1}{\rho}>\frac{3}{10}$· ὅθεν $\rho<\frac{10}{3}$· ὥστε πάλιν ἔχομεν μίαν μόνην λύσιν

$$\nu=5,\quad \rho=3,\quad E=12,\quad K=20,\quad A=30.$$

Ἂν τέλος ὑποτεθῇ ν=6, ἢ >6, οὐδεμία τιμὴ τοῦ ρ εὑρίσκεται πληροῦσα τὴν ἀνισότητα.

Ὥστε ὁμοιομερῆ πολύεδρα μόνον πέντε δύνανται νὰ ὑπάρξωσι, τὰ ἑξῆς·

τετράεδρον, ὀκτάεδρον, εἰκοσάεδρον,	ἐκ τριγώνων
ἑξάεδρον	ἐκ τετραπλεύρων
δωδεκάεδρον	ἐκ πενταγώνων

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ ὁμοιομερῆ ταῦτα πολύεδρα λέγονται *κανονικά*, ὅταν αἱ ἕδραι αὐτῶν εἶνε κανονικὰ πολύγωνα καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν ἴσαι πρὸς ἀλλήλας.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

1) Αἱ ἐπιφάνειαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶνε πρὸς ἀλλήλας ὡς ὁ 2 πρὸς τὸ 3· τίνα λόγον ἔχουσιν οἱ ὄγκοι αὐτῶν καὶ τίνα αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ αὐτῶν; (Ἀπ. Αἱ ἀκμαὶ εἶνε ὡς $\sqrt{2}$ πρὸς $\sqrt{3}$, οἱ δὲ ὄγκοι ὡς $2\sqrt{2}$ πρὸς $3\sqrt{3}$).

2) Δοθέντος πολυέδρου κατασκευάζομεν ἄλλο ὅμοιον διπλασιάζοντες πάσας τὰς ἀκμὰς αὐτοῦ· ποσαπλασία θὰ εἶνε ἡ ἐπιφάνεια τοῦ νέου καὶ ποσαπλάσιος ὁ ὄγκος αὐτοῦ; (Ἀπ. Ἡ ἐπιφάνεια τετραπλασία, ὁ δὲ ὄγκος ὀκταπλάσιος).

3) Δοθέντος πολυέδρου θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἄλλο ὅμοιον καὶ διπλάσιον κατὰ τὸν ὄγκον· μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἀκμάς του; (Ἀπ. $\sqrt[3]{2}$ ἤτοι 1,26...).

4) Νὰ δειχθῇ, ὅτι πολύεδρον ἔχον 7 ἀκμὰς εἶνε ἀδύνατον.

* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ ϛ' ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

393. Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικὰ* πρός τι ἐπίπεδον, ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἡ τὰ σημεῖα ταῦτα συνδέουσα, εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ τέμνηται ὑπ' αὐτοῦ δίχα.

Δύο γραμμαὶ ἢ δύο ἐπιφάνειαι λέγονται *συμμετρικαὶ* πρός τι ἐπίπεδον, ἐὰν πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἑτέρας ἔχωσι τὰ συμμετρικά των ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Δύο δὲ στερεὰ λέγονται *συμμετρικὰ* πρός τι ἐπίπεδον, ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶνε συμμετρικαὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ συμμετρικὸν οἱουδήποτε ἀντικειμένου βλέπομεν, ὅταν παρουσιάσωμεν αὐτὸ ἐνώπιον κατόπτρου ἐπιπέδου (ἢ εἰς ἐπιφάνειαν ἠρεμοῦντος ὑγροῦ)· διότι κατὰ τοὺς νόμους τῆς ὀπτικῆς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἀντικειμένου ἔχει τὸ εἴδωλον αὐτοῦ ὄπισθεν τοῦ κατόπτρου καὶ ἐπὶ εὐθείας, ἥτις ἄγεται ἐκ τοῦ σημείου τούτου κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κατόπτρου καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτοῦ· ὥστε ἕκαστον σημεῖον καὶ τὸ εἴδωλον αὐτοῦ εἶνε συμμετρικὰ πρὸς τὸ κάτοπτρον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

394. *Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας εἶνε εὐθεῖα ἴση.*

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ· λέγω, ὅτι πάντα τὰ σημεῖα αὐτῆς ἔχουσι τὰ συμμετρικά των (πρὸς τὸ τυχὸν ἐπίπεδον ΜΝ) ἐπί τινος εὐθείας ἴσης αὐτῇ.

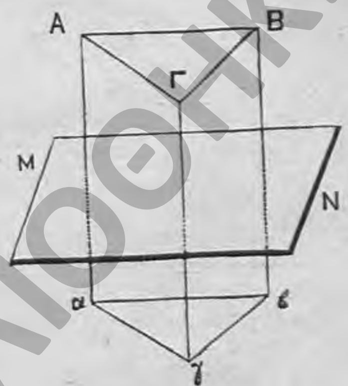
Ἂς ἀχθῶσιν ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ αἱ ΑΠ, ΒΡ, καὶ ἂς προσεκβληθῶσιν, ὥστε νὰ γίνῃ ἡ Πα ἴση τῇ ΠΑ καὶ ἡ Ρβ ἴση τῇ ΡΒ· τὸ σημεῖον α εἶνε τὸ συμμετρικὸν τοῦ Α καὶ τὸ β τοῦ Β· τὰ δὲ σημεῖα τῆς αβ θὰ εἶνε συμμετρικὰ τῶν σημείων τῆς ΑΒ.

Διότι, ἂν τὸ ἐπίπεδον ΑΠΡΒ τῶν δύο παραλλήλων (305) ΑΠ, ΒΡ στραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν ΠΡ, καθ' ἣν τέμνει τὸ ΜΝ, μέχρις οὗ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΠΡαβ, ἡ ΠΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς Πα διὰ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν Π, καὶ τὸ Α εἰς τὸ α διὰ τὴν ἰσότητα τῶν εὐθειῶν ΠΑ, Πα· διὰ τὸν αὐτὸν λόγον θὰ πέσῃ καὶ ἡ ΡΒ ἐπὶ τῆς Ρβ καὶ τὸ Β εἰς τὸ β· ἄρα καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΒ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς αβ· καὶ τὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς, οἷον τὸ Γ, θὰ πέσῃ ἐπί τινος σημείου γ τῆς αβ (αγ=ΑΓ), τοῦτο δὲ εἶνε τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ· διότι τῆς εὐθείας Γγ τὸ μέρος ΓΣ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὸ Σγ· εἶνε λοιπὸν ΓΣ=Σγ καὶ ἡ Γγ κάθετος ἐπὶ τὴν ΠΡ· ἄρα (334) κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

395. *Τὸ συμμετρικὸν γωνίας εἶνε γωνία ἴση.*

Ἔστω γωνία ἡ Α καὶ δύο σημεῖα τῶν πλευρῶν αὐτῆς, τὰ τυχόντα, Β καὶ Γ· συμμετρικὰ δὲ τῶν σημείων Α, Β, Γ, τὰ α, β, γ.



Τῆς εὐθείας ΑΒ συμμετρικὴ εἶνε ἡ αβ καὶ τῆς ΑΓ ἡ αγ καὶ τῆς ΒΓ ἡ βγ· ἄρα εἶνε

ΑΒ=αβ, ΑΓ=αγ, ΒΓ=βγ·

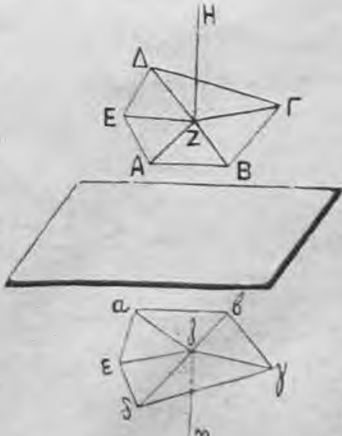
ἐπομένως τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ, αβγ εἶνε ἴσα· ἄρα ἡ γωνία Α εἶνε ἴση τῇ συμμετρικῇ αὐτῆς α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

396. *Τὸ συμμετρικὸν ἐπιπέδου σχήματος εἶνε ἐπίπεδον σχῆμα ἴσον.*

Ἔστω σχῆμα ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ ἡ ΖΗ· συμμετρικὰ δὲ τῶν σημείων Α, Β, Γ. . Ζ, Η τὰ σημεῖα α, β, γ, .., ζ, η.

Τῆς ΑΒ συμμετρικὴ εἶνε ἡ αβ καὶ τῆς ΒΓ ἡ βγ καὶ καθεξῆς· καὶ τῆς ΖΗ ἡ ζη. Τὸ δὲ σχῆμα αβγδε εἶνε ἐπίπεδον σχῆμα· διότι τῶν γωνιῶν ΗΖΑ, ΗΖΒ, ΗΖΓ... ΗΖΕ οὐσῶν ὀρθῶν, καὶ αἱ συμμετρικαὶ αὐτῶν ηζα,.., ηζε εἶνε ὀρθαί· ἄρα ἡ ζη εἶνε κάθετος ἐπὶ πάσας τὰς εὐθείας ζα, ζβ, ζγ,.., ζε· ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι αὗται κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ὅπερ ἄγεται ἐκ τοῦ ζ κάθετον ἐπὶ τὴν ζη· ἐπ' αὐτοῦ δὲ κεῖται καὶ τὸ σχῆμα αβγδε.



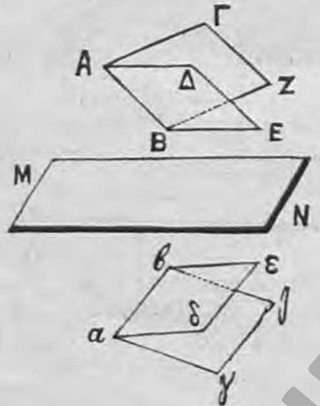
Εἶνε δὲ ἴσα τὰ δύο ἐπίπεδα σχήματα, ΑΒΓΔΕ, αβγδε, διότι ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν καὶ τὰς ὑπὸ τῶν ἴσων πλευρῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

397. *Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶνε κάθετα πρὸς ἄλληλα, καὶ τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν εἶνε κάθετα πρὸς ἄλληλα.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

398. *Τὸ συμμετρικὸν διέδρου γωνίας εἶνε δίεδρος γωνία ἴση.*



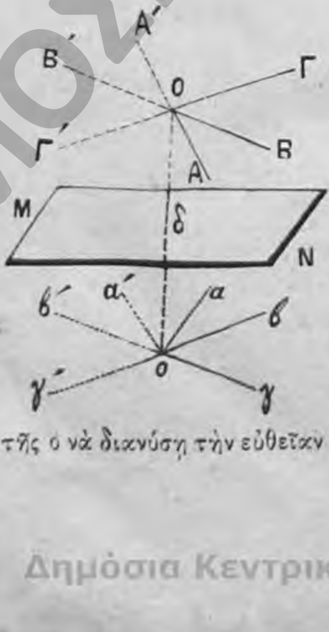
Ἔστω δίεδρος γωνία ἡ ΑΒ καὶ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς αὐτὴν ἐπίπεδος ἡ ΓΑΔ συμμετρικὰ δὲ τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ τὰ α, β, γ, δ, ε, ζ.

Τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΖ συμμετρικὸν θὰ εἶνε τὸ ἐπίπεδον αβγζ καὶ τοῦ ΑΒΕΔ τὸ αβεδ· ὥστε τῆς διέδρου γωνίας ΑΒ συμμετρικὴ θὰ εἶνε ἡ δίεδρος αβ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι ΒΑΔ, ΒΑΓ εἶνε ὀρθαὶ καὶ αἱ συμμετρικαὶ αὐτῶν βαδ, βαγ εἶνε ὀρθαί· ἄρα ἡ γωνία γαδ εἶνε ἡ ἐπίπεδος γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς τὴν δίεδρον αβ· καὶ ἐπειδὴ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι εἶνε ἴσαι (ὡς συμμετρικαί), καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι ΑΒ, αβ θὰ εἶνε ἴσαι (330).

ΘΕΩΡΗΜΑ

399. *Τὸ συμμετρικὸν στερεᾶς γωνίας εἶνε ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς στερεὰ γωνία εἰς ἄλλην θέσιν.*



Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ ΟΑΒΓ, συμμετρικὴ δὲ αὐτῆς ἡ οαβγ (τουτέστι συμμετρικὴ τῆς εὐθείας ΟΑ ἡ οα, τῆς ΟΒ ἡ οβ, καὶ τῆς ΟΓ ἡ ογ)· λέγω, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία οαβγ εἶνε ἡ κατὰ κορυφὴν τῆς ΟΑΒΓ, ἤτοι ἡ ΟΑ′Β′Γ′, εἰς ἄλλην θέσιν.

Ἀχθῇ ἡ οα′ παράλληλος καὶ ὁμόρροπος τῇ ΟΑ′ καὶ ἡ οβ′ τῇ ΟΒ′ καὶ ἡ ογ′ τῇ ΟΓ′. Ἡ στερεὰ γωνία οα′β′γ′ εἶνε ἴση τῇ ΟΑ′Β′Γ′· διότι, ἂν ἡ στερεὰ γωνία οαβγ κινηθῇ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ αὐτῆς ο νὰ διανύσῃ τὴν εὐθεῖαν οΟ, αἱ δὲ ἀκμαὶ αὐτῆς νὰ μένωσι παράλληλοι ἑαυταῖς, ὅταν τὸ ο φθάσῃ εἰς τὸ Ο, θὰ ἐφαρμόσῃ ἡ οα΄ ἐπὶ τῆς ΟΑ΄ καὶ ἡ οβ΄ ἐπὶ τῆς ΟΒ΄ καὶ ἡ ογ΄ ἐπὶ τῆς ΟΓ΄· ἤτοι αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι οα΄β΄γ΄, ΟΑ΄Β΄Γ΄ εἶνε ἴσαι. Τούτου δειχθέντος παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ οα΄ θὰ κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αοΟΑ (διότι αἱ συμμετρικαὶ εὐθεῖαι οα, ΟΑ κεῖνται ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ) καὶ ἡ οβ΄ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ βοΟΒ, καὶ ἡ ογ΄ ἐν τῷ γοΟΓ.

Αἱ δὲ γωνίαι α΄οδ καὶ αοδ θὰ εἶνε ἴσαι, ὡς ἴσαι ἀμφότεραι τῇ δΟΑ (395)· ὁμοίως αἱ γωνίαι β΄οδ, βοδ θὰ εἶνε ἴσαι, καὶ αἱ γωνίαι γ΄οδ, γοδ ὡσαύτως ἴσαι.

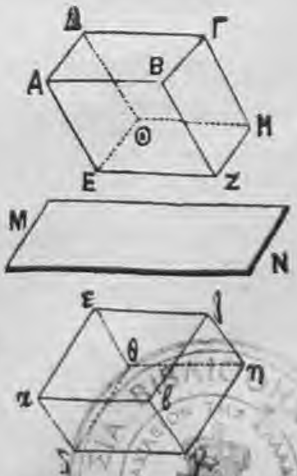
Ἂν νῦν τὸ σχῆμα οαβγ στραφῇ περὶ τὴν εὐθεῖαν Οο, μέχρι οὗ τὸ ἐπίπεδον δοα πέσῃ ἐπὶ τοῦ δοα΄, καὶ τὸ ἐπίπεδον δοβ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ δοβ΄, διὰ τὴν ἰσότητα τῶν κατὰ κορυφὴν διέδρων γωνιῶν βδοα, β΄δοα΄, ὡσαύτως καὶ τὸ ἐπίπεδον δογ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ δογ΄, δι᾽ ὅμοιον λόγον· τότε δὲ καὶ ἡ εὐθεῖα οα θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς οα΄ (διὰ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν δοα, δοα΄) καὶ ἡ οβ ἐπὶ τῆς οβ΄ καὶ ἡ ογ ἐπὶ τῆς ογ΄· ὥστε ἡ στερεὰ γωνία οαβγ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τὴν οα΄β΄γ΄· ἀλλ᾽ αὕτη ἐφαρμόζει ἐπὶ τὴν ΟΑ΄Β΄Γ΄· ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ στερεὰ γωνία οαβγ, ἡ συμμετρικὴ τῆς ΟΑΒΓ, εἶνε ἡ κατὰ κορυφὴν αὐτῆς ΟΑ΄Β΄Γ΄ εἰς ἄλλην θέσιν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

400. *Τὸ συμμετρικὸν στερεοῦ εἶνε στερεόν, ἔχον ἀκμάς, ἕδρας, ἐπιπέδους γωνίας καὶ διέδρους γωνίας, ἴσα πρὸς τὰ ἀντιστοιχοῦντα τοῦ πρώτου, στερεὰς δὲ γωνίας τὰς κατὰ κορυφὴν τῶν ἀντιστοιχουσῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πρώτου* (εἰς ἄλλην θέσιν).

Δύο δὲ συμμετρικὰ στερεὰ δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει.

Ἔστω στερεὸν τὸ ΑΒΓΔΕΖ· συμμετρικὰ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτοῦ τὰ σημεῖα α, ϐ, γ, δ, ε, ζ.



Ἡ ἀκμὴ ΑΒ θὰ ἔχῃ συμμετρικὴν τὴν ἀκμὴν αϐ, ἄρα εἶνε ΑΒ = αϐ. Ὁμοίως ΑΔ = αδ, κ. τ. λ.

Ἡ ἕδρα ΑΒΓΔ ἔχει συμμετρικὴν τὴν ἕδραν αϐγδ· ἄρα εἶνε ἴσαι· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ περὶ τῶν λοιπῶν.

Ἡ ἐπίπεδος γωνία ΑΒΓ ἔχει συμμετρικὴν τὴν ἐπίπεδον γωνίαν αϐγ· ἄρα εἶνε ἴσαι· ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἡ δίεδρος γωνία ΑΒ ἔχει συμμετρικὴν τὴν δίεδρον γωνίαν αϐ· ἄρα εἶνε ἴσαι· ὁμοίως δὲ καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἡ δὲ στερεὰ γωνία Α ἔχει συμμετρικὴν τὴν α· ἄρα εἶνε κατὰ κορυφήν. Ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει, ἕπεται, ὅτι *καὶ τὰ συμμετρικὰ στερεὰ δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει.*

ΠΟΡΙΣΜΑ

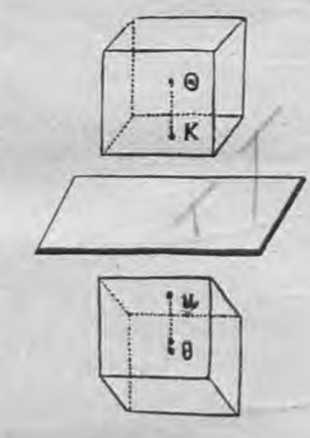
401. Τὰ συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ στερεοῦ πρὸς διάφορα ἐπίπεδα εἶνε στερεὰ ἴσα πρὸς ἄλληλα.

Διότι αἱ μὲν ἀκμαὶ αὐτῶν καὶ αἱ ἕδραι καὶ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι καὶ αἱ δίεδροι εἶνε ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὰ τοῦ πρώτου· αἱ δὲ ἀντιστοιχοῦσαι στερεαὶ γωνίαι αὐτῶν θὰ εἶνε ἴσαι, διότι εἶνε κατὰ κορυφὴν γωνίαι τῆς ἀντιστοιχούσης τοῦ πρώτου· καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας εἶνε ἴσαι. Ἄρα τὰ στερεὰ ἐφαρμόζουσι.

ΘΕΩΡΗΜΑ

402. Δύο συμμετρικὰ στερεὰ εἶνε ἴσα τὸν ὄγκον.

Ἔστω Θ σημεῖόν τι ἐντὸς τοῦ πρώτου στερεοῦ καὶ θ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ ἐν τῷ δευτέρῳ.



Αἱ ἐκ τοῦ Θ ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ πρώτου ἀγόμεναι κάθετοι ΘΚ, ΘΚ′,... θὰ ἔχωσι συμμετρικὰς (ἄρα καὶ ἴσας) τὰς ἐκ τοῦ θ ἐπὶ τὰς ἕδρας τοῦ δευτέρου ἀγομένας καθέτους (397). Ἂν λοιπὸν τὰ δύο στερεὰ διαιρεθῶσιν εἰς πυραμίδας ἐκ τῶν σημείων Θ καὶ θ, ὡς ἐν τῇ σελίδι 253 ἐμάθομεν, καὶ αἱ βάσεις τῶν πυραμίδων θὰ εἶναι ἴσαι κατὰ μίαν, καὶ τὰ ὕψη τῶν ἴσας βάσεις ἐχουσῶν θὰ εἶνε ἴσα· ἄρα αἱ πυραμίδες θὰ εἶνε ἴσαι μία πρὸς μίαν (κατὰ τὸν ὄγκον), καὶ τὰ στερεά, ὡς ἀθροίσματα ἰσοδυνάμων στερεῶν, θὰ εἶνε ἰσοδύναμα, ἤτοι ἴσα τὸν ὄγκον.

ΟΡΙΣΜΟΙ

403. Δύο σημεῖα λέγονται *συμμετρικὰ* πρός τι σημεῖον, ὅταν τὸ σημεῖον τοῦτο εἶνε τὸ μέσον τῆς τὰ δύο σημεῖα ἐπιζευγνυούσης εὐθείας.

Δύο δὲ γραμμαὶ ἢ δύο ἐπιφάνειαι λέγονται *συμμετρικαὶ* πρός τι σημεῖον, ὅταν τὰ πρὸς αὐτὸ συμμετρικὰ τῶν σημείων τῆς ἑτέρας κεῖνται ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Δύο δὲ στερεὰ λέγονται *συμμετρικὰ* πρός τι σημεῖον, ὅταν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν εἶνε *συμμετρικαὶ* πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

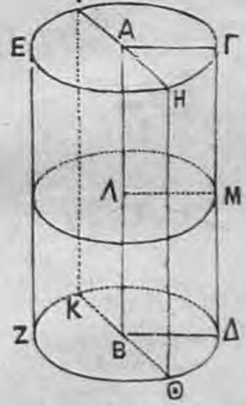
ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ, ΚΩΝΟΥ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

Α΄ ΠΕΡΙ ΚΥΛΙΝΔΡΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

404. *Κύλινδρος* λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γεννᾶται, ἐὰν περιστραφῇ ὀρθογώνιον περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ (ἥτις μένει ἀκίνητος) πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.

Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Ἐν τῇ περιστροφῇ ταύτῃ αἱ πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ γράφουσι κύκλους, ὧν τὰ ἐπίπεδα εἶνε κάθετα ἐπὶ τὴν ΑΒ, τὰ δὲ σημεῖα Γ καὶ Δ γράφουσι τὰς περιφερείας τῶν κύκλων τούτων· ἡ δὲ πλευρὰ ΓΔ γράφει ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται *κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου*.



Βάσεις τοῦ κυλίνδρου λέγονται οἱ δύο κύκλοι, τοὺς ὁποίους γράφουσιν αἱ πλευραὶ ΑΓ, ΒΔ τοῦ ὀρθογωνίου.

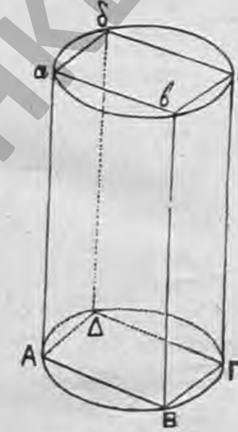
Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου, ἢ *ὕψος* αὐτοῦ, λέγεται ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου.

Πᾶσα τομὴ κυλίνδρου κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ εἶνε κύκλος ἴσος μὲ τὰς βάσεις· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Λ, εἰς ὃ τέμνει τὸ ἐπίπεδον τὸν ἄξονα, ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ ὀρθογωνίου ἡ ΛΜ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ κάθετος αὕτη ἐν τῇ περιστροφῇ θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶνε αὐτὴ ἡ τομή.

Πᾶσα δὲ τομὴ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, οἷον ἡ ΙΚΘΗ, εἶνε ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ· διότι τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἐν τῇ περιστροφῇ αὐτοῦ θὰ ἔλθῃ δὶς ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ θὰ καταλάβῃ τὰς θέσεις ΑΒΗΘ, ΑΒΙΚ.

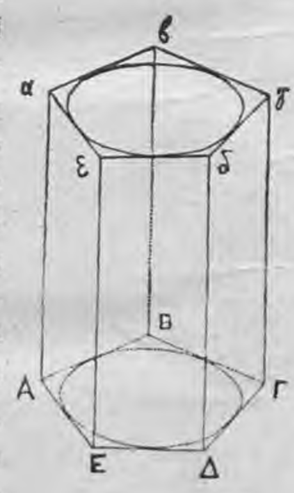
Ὀρθὸν πρίσμα λέγεται *ἐγγεγραμμένον* εἰς κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶνε ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται τότε *περιγεγραμμένος* περὶ τὸ πρίσμα.

Τοιοῦτον εἶνε τὸ πρίσμα ΑΒΓΔαβγδ, ὅπερ προκύπτει, ἐὰν ἐγγραφῇ εἰς μίαν τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου τὸ σχῆμα ΑΒΓΔ καὶ ἐπ' αὐτοῦ κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. Αἱ πλευραὶ αὐτοῦ Αα, Ββ, Γγ, Δδ, φανερὸν εἶνε, ὅτι κεῖνται ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.



Περιγεγραμμένον δὲ λέγεται τὸ ὀρθὸν πρίσμα περὶ τὸν κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶνε περιγεγραμμέναι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου· ὁ δὲ κύλινδρος λέγεται τότε *ἐγγεγραμμένος* εἰς τὸ πρίσμα.

Τοιοῦτον εἶνε τὸ πρίσμα ΑΒΓΔ αβγδ, ὅπερ προκύπτει, ἐὰν περὶ μίαν τῶν βάσεων τοῦ κυλίνδρου, περιγραφῇ σχῆμα, ὡς τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ ἐπ' αὐτοῦ κατασκευασθῇ ὀρθὸν πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ. Τὰ ὀρθογώνια, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος τούτου, ἐγγίζουσι τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου ἕκαστον κατὰ μίαν εὐθεῖαν· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς ὃ ἡ βάσις τοῦ ὀρθογωνίου ἐγγίζει τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου, ὑψωθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ταύτην, ἡ κάθετος αὕτη θὰ εὑρίσκηται καὶ ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου καὶ ἐπὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος. Αἱ δύο δὲ αὗται ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ κύλινδρος κεῖται ὅλος ἐντὸς τοῦ πρίσματος.



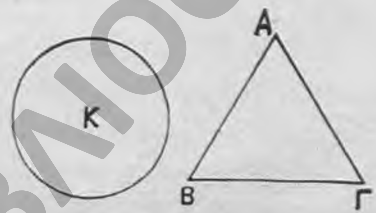
* ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς γεννωμένην ὑπὸ εὐθείας, ἥτις ὡς ἡ ΓΔ, κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ μένῃ τὸ ἄκρον αὐτῆς πάντοτε ἐπὶ τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς

(τοῦ ΔΚΖΘΔ), αὐτὴ δὲ νὰ μένῃ πάντοτε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τούτου· ἑπομένως νὰ μένῃ πάντοτε παράλληλος ἑαυτῇ. Ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ γεωμετρίᾳ λέγεται γενικῶς *κυλινδρικὴ ἐπιφάνεια* πᾶσα ἐπιφάνεια, ἥτις γεννᾶται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ δοθείσης καμπύλης, νὰ μένῃ δὲ καὶ παράλληλος ἑαυτῇ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

405. *Ὁ κύλινδρος εἶνε ἰσοδύναμος ὀρθῷ πρίσματι, ὅπερ ἔχει βάσιν ἰσοδύναμον καὶ ὕψος ἴσον τοῖς τοῦ κυλίνδρου.*

Ἔστω βάσις τοῦ κυλίνδρου ὁ κύκλος Κ, τοῦ δὲ ὀρθοῦ πρίσματος τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ ὑποτίθεται ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ Κ· ἔστωσαν δὲ ὁ κύλινδρος καὶ τὸ πρίσμα ἰσοϋψῆ· λέγω, ὅτι τὰ στερεὰ ταῦτα εἶνε ἰσοδύναμα.



Διότι ὁ κύκλος καὶ τὸ τρίγωνον, ὡς ἰσοδύναμα, ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν (ἀπείρων τὸ πλῆθος)· ἂν δὲ παραστήσωμεν τὰ μέρη ταῦτα διὰ

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \delta, \ldots\ldots$$

ὁ μὲν κύλινδρος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ὀρθῶν καὶ ἰσοϋψῶν πρισμάτων, τῶν ὁποίων βάσεις εἶνε τὰ μέρη $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ τῆς βάσεώς του· τὸ δὲ πρίσμα ἀποτελεῖται ὁμοίως ἐκ τῶν ὀρθῶν πρισμάτων, τῶν ὁποίων βάσεις εἶνε τὰ μέρη $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ τῆς βάσεώς του καὶ ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου· ἄρα ὁ κύλινδρος καὶ τὸ τριγωνικὸν πρίσμα σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν, ἤτοι εἶνε ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

406. *Ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶνε γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου διὰ τοῦ Α, τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως θὰ εἶνε πA^2, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ

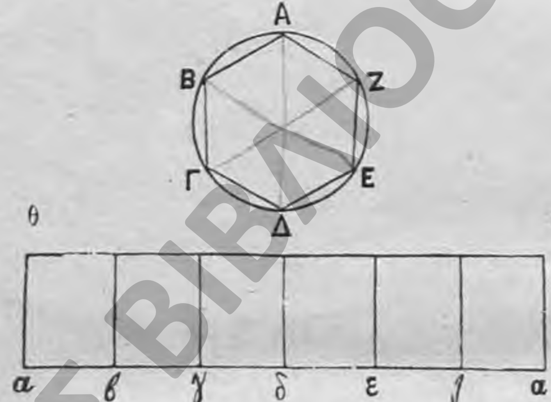
κυλίνδρου θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi A^2.\upsilon$
ἔνθα υ σημαίνει τὸ ὕψος αὐτοῦ

ΟΡΙΣΜΟΣ

407. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν. § 292

ΘΕΩΡΗΜΑ

408. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶνε γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*



Διότι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια παντὸς εἰς κύλινδρον ἐγγεγραμμένου πρίσματος σύγκειται ἐξ ὀρθογωνίων ἐχόντων ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου, βάσεις δὲ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου, ὅπερ εἶνε ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου· ἑπομένως ἀναπτυσσομένη ἐπὶ ἐπιπέδου γίνεται ὀρθογώνιον ἔχον ὕψος τὸ τοῦ κυλίνδρου, βάσιν δὲ τὴν περίμετρον τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὅριον τῆς περιμέτρου ταύτης (ὅταν αἱ πλευραὶ αὐτῆς τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν) εἶνε ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως, ἣν παριστῶ διὰ τοῦ Γ, συνάγεται, ὅτι τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου ἀναπτύγματος αθηα εἶνε υ. Γ· τοῦτο ἄρα εἶνε (κατὰ τὸν ὁρισμὸν) τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας θὰ εἶνε 2π. Α καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶνε $2\pi A.\upsilon$.

$\pi = 3{,}1416$

$\lambda o\gamma\, \pi = 0{,}49715$

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Κυλίνδρου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶνε $4^{\pi\chi}, 8$, τὸ δὲ ὕψος $1^{\pi\chi}, 5$· πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

('Απ. Ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε $\pi.\ (4{,}8)^2,\ 1{,}5$ ἤτοι $108^{\kappa\pi}, 57344..$)

2) Κυλίνδρου τινὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶνε $5^{\pi\chi}$, τὸ δὲ ὕψος $0^{\pi\chi}, 18$· πόση εἶνε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ;

('Απ. $\pi.\ 5.\ 0,\ 18$, ἢ $\pi.\ 0,\ 90$ ἤτοι $2^{\tau\pi\chi}, 82743...$)

3) Πρόκειται νὰ κατασκευασθῇ κυλινδρικὸν ἀγγεῖον ἐκ λευκοσιδήρου, τὸ ὁποῖον νὰ χωρῇ μίαν ὀκᾶν ὕδατος καὶ νὰ ἔχῃ ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς βάσεως· ποῖαι θὰ εἶνε αἱ διαστάσεις αὐτοῦ;

'Απ. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ ἀγγείου διὰ τοῦ α τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ διὰ τοῦ υ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἐν αὐτῷ περιεχομένου ὕδατος διὰ τοῦ ω, θὰ εἶνε

$$\upsilon = 4\alpha \text{ καὶ } \omega = \pi\alpha^2.\ \upsilon = 4\pi.\ \alpha^3$$

Ἀλλ' ὁ ὄγκος ω τοῦ ὕδατος δύναται νὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ βάρους του, (ὅπερ εἶνε μία ὀκᾶ)· τῷ ὄντι $312\frac{1}{2}$ δράμια ὕδατος ἔχουσιν ὄγκον μιᾶς λίτρας, τουτέστι μιᾶς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβικοῦ πήχεως· ἄρα ἡ ὀκᾶ τοῦ ὕδατος θὰ ἔχῃ ὄγκον $\frac{2.400}{625.1000}$ ἢ $\frac{4}{3125}$· ὅθεν ἕπεται $4\pi\alpha^3 = \frac{4}{3125}$ καὶ $\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{3125\pi}}$.

$\alpha^3 = \frac{1}{3125\pi}$

καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν

$$\alpha = 0^{\pi\chi},0467....\ \text{ὅθεν καὶ } \upsilon = 0^{\pi\chi},\ 1868...$$

4) Κύλινδρός τις ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει μῆκος μὲν $4^{\pi\chi},12$ περιφέρειαν δὲ βάσεως $0^{\pi\chi}, 6$· ζητεῖται τὸ βάρος αὐτοῦ.

'Απ. Ἡ ἀκτὶς τοῦ κυλίνδρου θὰ εἶνε $\frac{0.6}{2\pi}$, ὅθεν ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶνε $\frac{(0.6)^2}{4\pi}(4,\ 12)$, ἢ $\frac{0{,}36}{\pi}(1{,}03)$· ἤτοι $0^{\kappa\pi}, 118$ ἢ $117^{\kappa\pi\lambda}..,8...$

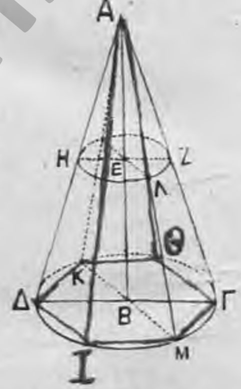
Ἴσος ὄγκος ὕδατος. ἤτοι $117^{\lambda\iota\tau\rho}, 8...$ θὰ εἶχε βάρος $117{,}8 \times 312\,^1/_2$ δράμια· ἐπειδὴ δὲ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶνε περίπου 7,2, τὸ ζητούμενον βάρος τοῦ κυλίνδρου εἶνε δράμια $117{,}8 \times 7{,}2 \times 312\,^1/_2$ ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον βάρος ἴσον μὲ 663 ὀκάδ. 250 δράμια.

$3{,}708 \times \frac{1}{\pi} = 0{,}11802930$

Β΄. ΠΕΡΙ ΚΩΝΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

409. *Κῶνος* λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γεννᾶται, ὅταν ὀρθογώνιον τρίγωνον περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων αὐτοῦ πλευρῶν πάντοτε κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν θέσιν, ἐξ ἧς ἤρχισε νὰ στρέφηται.



Ἂς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ, μέχρις οὗ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του. Ἐν τῇ περιστροφῇ ταύτῃ ἡ μὲν πλευρὰ ΒΓ θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ὅστις λέγεται *βάσις* τοῦ κώνου, ἡ δὲ πλευρὰ ΑΓ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν, ἥτις λέγεται *κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου*.

Ἄξων τοῦ κώνου, ἢ *ὕψος* αὐτοῦ, λέγεται ἡ ἀκίνητος μένουσα πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Κορυφὴ δὲ τοῦ κώνου, τὸ σημεῖον Α.

Πλευρὰ δὲ ἢ *ἀπόστημα* τοῦ κώνου λέγεται ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἐξ οὗ γεννᾶται.

Πᾶσα κώνου τομὴ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα αὐτοῦ εἶνε κύκλος τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου Ε, εἰς τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον τὸν ἄξονα, ἀχθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου ἡ ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἡ κάθετος αὕτη ἐν τῇ περιστροφῇ θὰ γράψῃ κύκλον, οὗ τὸ ἐπίπεδον θὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ διὰ τοῦτο θὰ εἶνε αὐτὴ ἡ τομή.

Πᾶσα δὲ τομὴ κώνου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τοῦ ἄξονος, οἷον ἡ ΑΜΚ, εἶνε ἰσοσκελὲς τρίγωνον διπλάσιον τοῦ ΑΒΓ· διότι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐν τῇ περιστροφῇ αὐτοῦ θὰ ἔλθῃ δὶς ἐπὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ θὰ καταλάβῃ τὰς θέσεις ΑΒΚ καὶ ΑΒΜ.

Ἐγγεγραμμένη λέγεται πυραμὶς εἰς κῶνον, ἐὰν ἔχωσιν ἀμφότερα τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶνε ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς εἰς κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος κεῖνται προδήλως ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου· ἡ δὲ πυραμὶς κεῖται ἐντὸς τοῦ κώνου.

Περιγεγραμμένη δὲ λέγεται πυραμὶς περὶ κῶνον, ἐὰν ἀμφότερα ἔχωσι τὴν αὐτὴν κορυφὴν καὶ ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶνε περιγεγραμμένη περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Ἑκάστη τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς περὶ κῶνον περιγεγραμμένης πυραμίδος ἐγγίζει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου κατὰ μίαν εὐθεῖαν· διότι, ἂν ἐκ τοῦ σημείου, εἰς ὃ ἡ βάσις τῆς ἕδρας ἐγγίζει τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἀχθῇ εὐθεῖα εἰς τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου, ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ἕδρας καὶ ἐπὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Αἱ δύο δὲ αὗται ἐπιφάνειαι οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν σημεῖον καὶ ὁ κῶνος κεῖται ὅλος ἐντὸς τῆς πυραμίδος.

Ἐὰν κῶνος τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει αὐτοῦ (τουτέστι καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονα), τὸ μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως μέρος τοῦ κώνου λέγεται *κόλουρος κῶνος*· τοιοῦτον εἶνε τὸ στερεὸν ΔΜΓΚΗΛΖΙ (σχῆμα τὸ προηγούμενον).

Βάσεις τοῦ κολούρου κώνου λέγονται οἱ δύο κύκλοι, ὑφ' ὧν περατοῦται. *Ἄξων* δὲ αὐτοῦ ἢ *ὕψος* λέγεται ἡ τὰ κέντρα τῶν βάσεων ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα. *Πλευρὰ* δὲ αὐτοῦ λέγεται τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ὅλου κώνου τὸ μεταξὺ τῶν δύο βάσεων περιεχόμενον. ΖΓ

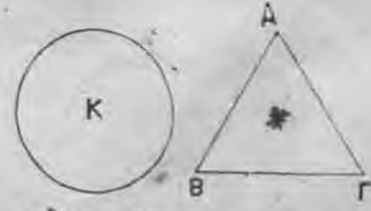
Ἐν τῷ στερεῷ ΔΜΓΚΗΛΖΙ βάσεις μὲν εἶνε οἱ κύκλοι ΔΜΓΚ καὶ ΗΛΖΙ, ἄξων δὲ ἡ εὐθεῖα ΕΒ, πλευρὰ δὲ ἡ ΓΖ.

* ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γεννωμένη ὑπὸ εὐθείας, ἥτις κινεῖται, οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται πάντοτε διὰ τῆς περιφερείας κύκλου τινὸς καὶ δι' ἑνὸς σημείου, ἐξ οὗ ἡ ἀγομένη ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου κάθετος πίπτει εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ. Ἐν τῇ ἀνωτέρᾳ γεωμετρίᾳ καλεῖται ἐν γένει *κωνικὴ ἐπιφάνεια*, πᾶσα ἐπιφάνεια, ἥτις γεννᾶται ὑπὸ εὐθείας κινουμένης οὕτως, ὥστε νὰ διέρχηται πάντοτε διά τινος σημείου καὶ διά τινος καμπύλης.

ΘΕΩΡΗΜΑ

410. *Ὁ κῶνος εἶνε ἰσοδύναμος πυραμίδι, ἥτις ἔχει βάσιν ἰσοδύναμον καὶ ὕψος ἴσον.*

Ἔστω βάσις τοῦ κώνου ὁ κύκλος Κ, τῆς δὲ πυραμίδος τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅπερ ὑποτίθεται ἰσοδύναμον τῷ κύκλῳ· ἔστωσαν δὲ ὁ κῶνος καὶ ἡ πυραμὶς ἰσοϋψῆ· λέγω, ὅτι τὰ στερεὰ ταῦτα εἶνε ἰσοδύναμα.



* Ὅρα σελ. 178η παράγραφον 284 τὴν [illegible] παρατήρησιν τὴν [illegible]

Διότι ὁ κύκλος καὶ τὸ τρίγωνον ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν (ἀπείρων τὸ πλῆθος)· ἂν δὲ παραστήσωμεν τὰ μέρη ταῦτα διὰ

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots \kappa\tau\lambda.$$

ὁ μὲν κῶνος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν πυραμίδων, ὧν κορυφὴ εἶνε ἡ κορυφὴ αὐτοῦ καὶ βάσεις τὰ μέρη α,β,γ,δ... τῆς βάσεώς του· ἡ δὲ τριγωνικὴ πυραμὶς ἀποτελεῖται ὁμοίως ἐκ τῶν πυραμίδων, ὧν κορυφὴ εἶνε ἡ κορυφὴ αὐτῆς καὶ βάσεις τὰ μέρη α, β, γ, δ... τῆς βάσεώς της. Ἀλλ' αἱ τὸν κῶνον ἀποτελοῦσαι πυραμίδες εἶνε μία πρὸς μίαν ἰσοδύναμοι πρὸς τὰς πυραμίδας τὰς ἀποτελούσας τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα (ὡς ἔχουσαι ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος)· ἄρα ὁ κῶνος καὶ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς σύγκεινται ἐκ τῶν αὐτῶν μερῶν, ἤτοι εἶνε ἰσοδύναμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ

411. *Ὁ ὄγκος τοῦ κώνου εἶνε γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.*

Ἐπομένως *ὁ κῶνος εἶνε τὸ τρίτον τοῦ κυλίνδρου τοῦ ἔχοντος ἴσην βάσιν καὶ ἴσον ὕψος.*

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ Α ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ διὰ τοῦ υ τὸ ὕψος αὐτοῦ, ὁ ὄγκος αὐτοῦ παρίσταται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{1}{3}\pi A^2 \upsilon$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

412. *Ὁ κόλουρος κῶνος εἶνε ἄθροισμα τριῶν κώνων, οἵτινες ἔχουσιν ὕψος μὲν κοινὸν τὸ τοῦ κολούρου κώνου, βάσεις δέ, ὁ μὲν τὴν ἄνω τούτου βάσιν, ὁ δὲ τὴν κάτω, ὁ δὲ μέσην ἀνάλογον τούτων.*

Ἔστω κόλουρος κῶνος ὁ ΑΒΓΔ ἔχων βάσεις τοὺς κύκλους ΑΒΑ καὶ ΓΔΓ, ὧν τὰς ἀκτῖνας ΕΒ καὶ ΖΔ παριστῶμεν διὰ τοῦ Α καὶ α, ὕψος δὲ τὴν ΕΖ, ἥν τινα παριστῶμεν διὰ τοῦ υ.

Ὁ κόλουρος κῶνος ΑΒΓΔ εἶνε διαφορὰ τῶν δύο κώνων ΚΑΒ καὶ ΚΓΔ, τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι εἶνε

$$\frac{1}{3}\pi A^2.(KE) \qquad \text{καὶ } \frac{1}{3}\pi\alpha^2.(KZ).$$

ἄρα ἔχομεν κόλ. κων. $AB\Gamma\Delta = \frac{1}{3}\pi\,(A^2.KE - \alpha^2.KZ)$.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τρίγωνα ΚΖΔ, ΚΕΒ εἶνε ὅμοια, εἶνε

$$\frac{ΚΕ}{Α}=\frac{ΚΖ}{α},$$

καὶ ἂν παραστήσωμεν διὰ τοῦ ρ τὸν ἕνα ἐκ τῶν λόγων τούτων, θὰ εἶνε

$$ΚΕ=ρ.Α, \qquad ΚΖ=ρ.α \qquad (ι)$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς ταύτας τῶν ΚΕ, ΚΖ εἰς τὴν πρώτην ἰσότητα, εὑρίσκομεν

$$\text{κόλ. κων. } ΑΒΓΔ=\frac{1}{3}π.(Α^3—α^3)ρ.$$

Ἀλλ' ἐὰν αἱ ἰσότητες (ι) ἀφαιρεθῶσι κατὰ μέλη, προκύπτει

$$ΚΕ—ΚΖ=ρ(Α—α)$$

ἤτοι
$$υ=ρ(Α—α), \qquad \text{ὅθεν } ρ=\frac{υ}{Α—α}.$$

ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου γίνεται

$$\text{κόλ. κῶν } ΑΒΓΔ=\frac{1}{3}πυ\frac{Α^3—α^3}{Α—α}$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως (Στ. Ἀλγ. σελ. 44)

$$\text{κόλ. κων } ΑΒΓΔ=\frac{1}{3}πυ(Α^2+Αα+α^2).$$

Ἡ ἰσότης αὕτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος· διότι

$\frac{1}{3}πΑ^2.υ$ εἶνε ὄγκος κώνου ἔχοντος ὕψος υ καὶ βάσιν τὸν κύκλον ΑΒΑ,

$\frac{1}{3}πα^2υ$ εἶνε ὁ ὄγκος κώνου ἔχοντος ὕψος υ καὶ βάσιν τὸν κύκλον ΓΔΓ, καὶ

$\frac{1}{3}πυ.Αα$ εἶνε ὁ ὄγκος κώνου ἔχοντος ὕψος υ καὶ βάσιν τὸν κύκλον πΑα, ὅστις εἶνε μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων· διότι εἶνε

$$π.Αα=\sqrt{πΑ^2.πα^2}.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὸ θώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ διὰ τῆς μεθόδου τοῦ ἐδαφίου 379, τρεπομένων τῶν κώνων ΚΑΒ, ΚΓΔ εἰς ἰσοδυνάμους τριγωνικὰς πυραμίδας.

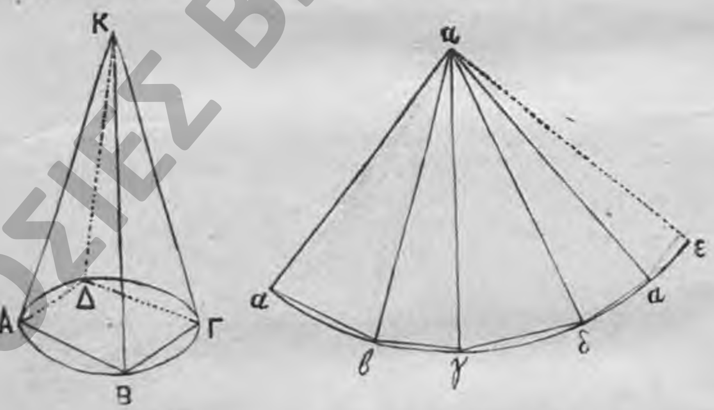
ΟΡΙΣΜΟΣ

413. *Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου* λέγεται τὸ ὅριον, πρὸς ὃ τείνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας πάσης εἰς τὸν κῶνον ἐγγεγραμμένης πυραμίδος, ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως αὐτῆς τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

414 *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶνε γινόμενον τῆς περιφερείας τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ.*

Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸν κῶνον ἡ τυχοῦσα πυραμὶς ΚΑΒΓΔ. Ἐὰν ἡ ἐκ τῶν τριγώνων ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΔΑ συγκειμένη παράπλευρος ἐπιφάνεια αὐτῆς ἀναπτυχθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου, θὰ λάβῃ τὸ σχῆμα καβγδα, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ α,β,γ,δ,α θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἥτις γράφεται μὲ κέντρον τὸ κ καὶ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν ΚΑ τοῦ κώνου· διότι αἱ εὐθεῖαι κα, κβ, κγ, κδ, εἶνε ἴσαι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ κώνου. Ἀλλὰ καθόσον αἱ πλευραὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου, ὅπερ εἶνε βάσις τῆς πυραμίδος, τείνουσι πρὸς τὸ μηδέν, ἡ μὲν τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ τείνει πρὸς τὴν περιφέρειαν τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ δὲ ἴση αὐτῆς αβ+βγ+γδ+δα τείνει πρός τι τόξον αε τοῦ κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶνε ἐγγεγραμμένη, ὅπερ τόξον αε εἶνε διὰ τοῦτο ἴσον τῇ περιφερείᾳ ΑΒΓΔ· ὁ δὲ πολυγωνικὸς τομεὺς καβγδα τείνει πρὸς τὸν κυκλικὸν τομέα καε· ὅστις ἐπομένως εἶνε τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου. Τὸ ἐμβαδὸν τομέως τούτου εἶνε

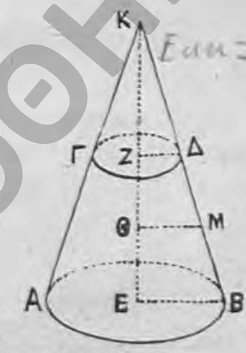


$\frac{1}{2}$(κα).(τοξ.αε), ἢ $\frac{1}{2}$ (ΚΑ).(περιφ. ΑΒΓΔ). τοῦτο ἄρα εἶνε (κατὰ τὸν ὁρισμὸν) καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ μὲν ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου διὰ τοῦ Α, ἡ δὲ πλευρὰ αὐτοῦ διὰ τοῦ λ, τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ θὰ εἶνε $\frac{1}{2}\lambda(2\pi A)$, ἤτοι π.Α.λ. ἀλλὰ λ^2 κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι $\lambda^2 = A^2 + υ^2$ [illegible] καὶ ~~ἐπειδὴ~~ εἶνε $\lambda=\sqrt{A^2+\upsilon^2}$, τὸ ἐμβαδὸν ἄρα τῆς αὐτῆς ἐπιφανείας παρίσταται καὶ ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi.A.\sqrt{A^2+\upsilon^2}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

415. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶνε γινόμενον τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.*



Ἔστω κόλουρος κῶνος ὁ ΑΒΓΔ, οὗτινος αἱ μὲν ἀκτῖνες τῶν βάσεων ἂς παρασταθῶσι διὰ τῶν Α καὶ α, ἡ δὲ πλευρὰ ΔΒ διὰ τοῦ λ.

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶνε διαφορὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο κώνων ΚΑΒ καὶ ΚΓΔ· τῶν δὲ κυρτῶν τούτων ἐπιφανειῶν τὰ ἐμβαδὰ εἶνε

$$\pi.A.(KB) \quad \text{καὶ} \quad \pi\alpha.(K\Delta)$$

ὅθεν κυρτ. ἐπιφ. $AB\Gamma\Delta=\pi(A.KB-\alpha.K\Delta)$.

Ἀλλ' ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΕΒ, καὶ ΚΖΔ εὑρίσκομεν

$$\frac{KB}{A}=\frac{K\Delta}{\alpha},$$

καὶ παριστῶντες διὰ τοῦ ρ ἓνα ἐκ τῶν ἴσων τούτων λόγων, θὰ ἔχωμεν

$$KB=\rho.A. \qquad K\Delta=\rho.\alpha \qquad (1)$$

ὅθεν ἕπεται κυρτ. ἐπιφ. $AB\Gamma\Delta=\pi(A^2-\alpha^2)\rho$.

ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) προκύπτει

$$KB-K\Delta=\rho(A-\alpha)$$

ἤτοι $\lambda=\rho.(A-\alpha)$, καὶ $\rho=\dfrac{\lambda}{A-\alpha}$,

ἡ τιμὴ τῆς ἐπιφανείας γίνεται

$$\text{κυρτ. ἐπιφ. } AB\Gamma\Delta=.\pi\lambda.\frac{A^2-\alpha^2}{A-\alpha},$$

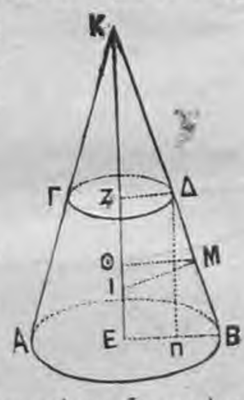
$$\text{ἢ κυρτ. ἐπιφ. } AB\Gamma\Delta=\pi.\lambda.(A+\alpha).$$

Ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος· διότι τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς· $2\pi.(A+\alpha).\dfrac{1}{2}\lambda$· καὶ ὁ μὲν παράγων $2\pi.(A+\alpha)$ εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο περιφερειῶν $2\pi A$ καὶ $2\pi\alpha$, ὁ δὲ ἄλλος εἶνε τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ κολούρου κώνου·

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Α΄. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς πλευρᾶς ΒΔ ἀχθῇ ἡ ΜΘ παράλληλος τῇ ΒΕ, ἐν τῷ τραπεζίῳ ΒΕΖΔ θὰ εἶνε (190 σημ) ἡ ΜΘ ἴση τῷ ἡμιαθροίσματι τῶν ΒΕ καὶ ΔΖ, ἤτοι $ΜΘ=\frac{1}{2}(Α+α)$· ἡ δὲ περιφέρεια ἡ ἔχουσα ἀκτῖνα τὴν ΜΘ θὰ εἶνε $2π.ΜΘ$, ἤτοι $2π.\frac{1}{2}(Α+α)$, τουτέστι $π(Α+α)$· ὅθεν ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου δύναται νὰ παρασταθῇ καὶ ὡς ἑξῆς $2π.ΜΘ.λ$, ὅθεν συνάγεται ὅτι

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶνε γινόμενον τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου, ὅστις ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ. (Τὴν περιφέρειαν ταύτην γράφει τὸ μέσον Μ τῆς εὐθείας ΔΒ, ὅταν αὕτη στρεφομένη περὶ τὴν ΚΕ γράφῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Β΄. Ἐὰν ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΔ ἀχθῇ ἡ ΜΘ κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἡ ΜΙ κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου, ἐκ δὲ τοῦ Δ παράλληλος τῷ ἄξονι ἡ ΔΠ, τὰ δύο τρίγωνα ΜΘΙ καὶ ΔΠΒ εἶνε ὅμοια ὡς ἔχοντα τὰς πλευρὰς αὐτῶν καθέτους ἑκάστην ἑκάστῃ· ἐκ δὲ τούτων εὑρίσκομεν τὴν ἰσότητα $\frac{ΔΠ}{ΜΘ}=\frac{ΔΒ}{ΜΙ}$, ἐξ ἧς $ΔΠ.ΜΙ=ΔΒ.ΜΘ$, τουτέστιν $ΕΖ.ΜΙ=ΔΒ.ΜΘ$, διότι $ΕΖ=ΔΠ$· ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, τὸ $2πΜΘ.λ$, γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς·



$2π.ΜΙ.ΕΖ$, ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου εἶνε γινόμενον τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς πλευρᾶς του ὑψουμένην κάθετον ἐπ αὐτὴν μέχρι τοῦ ἄξονος.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Κώνου τινὸς ἡ μὲν διάμετρος τῆς βάσεως εἶνε $1^{πχ},8$, ἡ δὲ πλευρὰ $2^{πχ},64$· πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτοῦ;

Ἀπ. Τὸ ὕψος τοῦ κώνου εἶνε πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ὑποτείνουσα εἶνε ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου, μία δὲ τῶν καθέτων ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως· διὰ τοῦτο τὸ ὕψος εἶνε $\sqrt{(2,64)^2-(0,9)^2}$ ἢ $\sqrt{3,54.1,74}$· ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου θὰ εἶνε $\frac{1}{3}π.(0,9)^2\sqrt{3,54.1,74}$. καὶ διὰ τῶν λογαρίθμων εὑρίσκομεν $2^{κπ}$, 105...

2) Κώνου τινὸς ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶνε $0^{\pi\chi},5$, τὸ δὲ ὕψος $2^{\pi\chi}$· πόση εἶνε ἡ κυρτὴ αὐτοῦ ἐπιφάνεια;

Ἀπ. Ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου εἶνε $\sqrt{(2)^2+(0,5)^2}$ ἢ $\sqrt{4,25}$· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ εἶνε
$\pi(0,5)\sqrt{4,25}$, ἢ μετὰ τὰς πράξεις $3^{\pi},238..$.

3) Κολούρου τινὸς κώνου τὸ ὕψος εἶνε $1^{\pi\chi}$, 18, αἱ δὲ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶνε 0,14 καὶ 0,06· πόσος εἶνε ὁ ὄγκος αὐτοῦ; λογ 118 = 0,07188

$$\text{Ἀπ.}\ \frac{1}{3}\ \pi.(1,18)\left\{0,14)^2+(0,14)(0,06)+(0,6^2)\right\}$$

2 λογ 0,6 = 1,55630
λογ 3 = 0,47712

$$\text{ἢ}\ \frac{1}{3}\ \pi\ (1,18)\ (0,0316),\ \text{καὶ μετὰ τὰς πράξεις}\ 0^{\kappa\pi},0,3904...$$

4) Κώνου τινὸς ἡ διάμετρος τῆς βάσεως εἶνε 4^{π}, ἡ δὲ πλευρὰ $12^{\pi},4$· νὰ εὑρεθῇ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

λογ π = 0,49715

Ἀπ. Ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου σύγκειται ἐκ τῆς ἐπιφανείας τῆς βάσεως καὶ ἐκ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτοῦ· ὥστε εἶνε

$$4\pi+(24,8)\ \pi,\ \text{ἤτοι}\ (28,8)\ \pi,\ \text{ἤτοι}\ 90^{\tau\pi},\ 477\ ..$$

5) Εἰς κόλουρόν τινα κῶνον ἄγονται ἐκ τῆς περιφερείας τῆς μικροτέρας βάσεως παράλληλοι πρὸς τὸν ἄξονα αὐτοῦ καὶ σχηματίζουσι τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κυλίνδρου τινός· νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ μένοντος στερεοῦ, ὅταν ἀπὸ τοῦ κολούρου κώνου ἀφαιρεθῇ ὁ κύλινδρος.

Ἀπ. Ὁ ὄγκος τοῦ μένοντος στερεοῦ εἶνε (Θεωρ. 412)

$$\frac{1}{3}\ \pi\upsilon(A-\alpha)\ (A+2\alpha).$$

ὅρα σελ. 307

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $A=5^{\pi}$, $\alpha=4^{\pi}$ καὶ $\upsilon=9^{\pi}$, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς πράξεις 39π, ἤτοι $122^{\kappa\pi}$, 522.

6) Κῶνός τις ἔχει ὕψος $10^{\pi\chi}$· ἐὰν θέλωμεν νὰ τμήσωμεν αὐτὸν εἰς δύο ἴσα τὸν ὄγκον μέρη δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει, ἐκ τίνος σημείου τοῦ ὕψους πρέπει νὰ ἀχθῇ τὸ τέμνον ἐπίπεδον;

Ἀπ. Ἐὰν παραστήσωμεν δι' A τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως καὶ δι' υ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, ἔτι δὲ δι' α τὴν ἀκτῖνα τῆς τομῆς καὶ διὰ χ τὴν ἀπόστασιν τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου ἀπὸ τῆς κορυφῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi}{\upsilon}=\frac{\alpha}{A},\qquad \text{ὅθεν}\qquad \alpha=\frac{A}{\upsilon}\chi.$$

Ὁ ὄγκος τοῦ ἀποτεμνομένου κώνου εἶνε $\frac{1}{3}\ \pi\frac{A^2}{\upsilon^2}\ \chi^3$ καὶ ἐπειδὴ ὁ ὄγκος οὗτος εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου, θὰ ἔχωμεν $\frac{1}{3}\pi\ \frac{A^2}{\upsilon^2}\ \chi^3=\frac{1}{6}\pi A^2\upsilon$, καὶ ἁπλοποιοῦντες εὑρίσκομεν $\chi^3=\frac{1}{2}\ \upsilon^3$, ὅθεν $\chi=\frac{\upsilon}{\sqrt[3]{2}}$, καὶ ἐπειδὴ ἐδόθη $\upsilon=10$, προκύπτει $\chi=7,774$ ...

Γ΄ ΠΕΡΙ ΣΦΑΙΡΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

416. *Σφαῖρα* λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποίου ἓν σημεῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Τὸ σημεῖον τοῦτο λέγεται *κέντρον* τῆς σφαίρας.

Ἀκτὶς τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις ἐκ τοῦ κέντρου ἄγεται εἴς τι σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας λέγεται πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου καὶ περατοῦται ἑκατέρωθεν ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς σφαίρας, πᾶσαι αἱ ἀκτῖνες εἶνε ἴσαι· ὡσαύτως καὶ αἱ διάμετροι, ὡς διπλάσιαι τῆς ἀκτῖνος.

Δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν τὴν σφαῖραν γεννωμένην ὑπὸ ἡμικυκλίου στρεφομένου περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ. Διότι πάντα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τοῦ οὕτω γεννωμένου στερεοῦ, ὡς σημεῖα τῆς περιφερείας, θὰ ἀπέχωσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου αὐτῆς.

Ἐπίπεδον λέγεται *ἐφαπτόμενον* σφαίρας, ἐὰν ἔχῃ ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

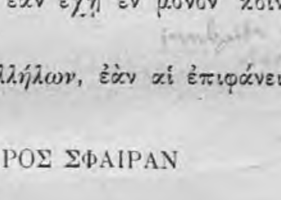
Δύο σφαῖραι λέγονται, ὅτι *ἐφάπτονται ἀλλήλων*, ἐὰν αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν ἓν μόνον ἔχωσι κοινὸν σημεῖον.

ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΠΡΟΣ ΣΦΑΙΡΑΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

417. *Ἐὰν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα μηδὲν ἔχωσι κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.*

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου σφαίρας ἀπὸ ἐπιπέδου ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον οὐδὲν ἔχουσι κοινὸν σημεῖον.



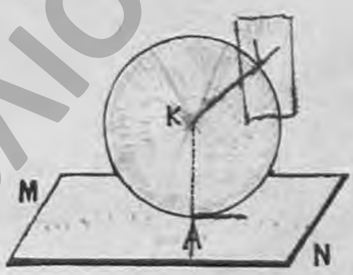
Διότι ὁ πούς Δ τοῦ ἀποστήματος τούτου κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας (ἄλλως τὸ ἐπίπεδον, ὡς διερχόμενον διὰ τοῦ Δ, θὰ ἐξήρχετο ἐκ τῆς σφαίρας καὶ θὰ ἔτεμνεν αὐτήν)· ἑπομένως τὸ ἀπόστημα ὑπερβαίνει τὴν ἀκτῖνα.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν ὑποτεθῇ τὸ ἀπόστημα ΚΔ τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ μεγαλήτερον τῆς ἀκτῖνος ΚΑ τῆς σφαίρας, τὸ Δ θὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· καὶ πάντα δὲ τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου θὰ κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· διότι αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου, ὡς πλάγιαι, ὑπερβαίνουσι τὴν κάθετον ΚΔ, ἐπομένως ὑπερβαίνουσι καὶ τὴν ἀκτῖνα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

418. *Ἐὰν σφαῖρα καὶ ἐπίπεδον ἔχωσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶνε ἴσον τῇ ἀκτῖνι.*

Καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶνε ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουσιν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον· τουτέστι τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας.



Διότι, ἂν ἡ σφαῖρα Κ καὶ τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἔχωσι μόνον τὸ σημεῖον Α κοινόν, τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας καὶ διὰ τοῦτο ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος· ἐπομένως ἡ ΚΑ εἶνε ἡ ἐλαχίστη τῶν ἐκ τοῦ Κ εἰς τὸ ἐπίπεδον ΜΝ ἀγομένων εὐθειῶν· εἶνε λοιπὸν κάθετος ἐπ' αὐτό, καὶ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶνε ἡ ἀκτὶς ΚΑ.

Ἀντιστρόφως· ἂν τὸ ἀπόστημα ΚΑ τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΜΝ εἶνε ἴσον τῇ ἀκτῖνι, ὁ πούς αὐτοῦ, ὡς ἄκρον τῆς ἀκτῖνος, θὰ εἶνε κοινὸν σημεῖον τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ἀλλὰ τὰ λοιπὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου περισσότερον τῆς ἀκτῖνος (διότι αἱ ἐκ τοῦ κέντρου εἰς αὐτὰ ἀγόμεναι εἶνε πλάγιαι καὶ διὰ τοῦτο μεγαλήτεραι τῆς καθέτου ΚΑ)· ἄρα κεῖνται ἐκτὸς τῆς σφαίρας· ὥστε ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον ἔχουσι, τὸ Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ

419. *Εἰς ἕκαστον σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ὑπάρχει ἓν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον αὐτῆς, καὶ ἓν μόνον.*

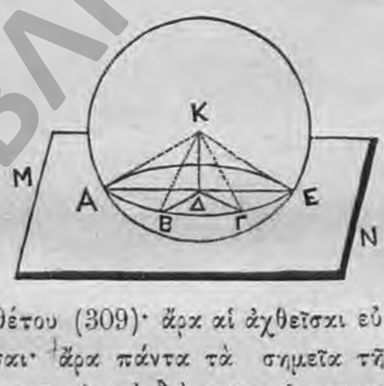
Διότι τὸ εἰς τὸ σημεῖον Α ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον πρέπει νὰ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΚΑ· ἓν δὲ μόνον ἐπίπεδον δύναται νὰ ἀχθῇ κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΑ εἰς τὸ σημεῖον Α.

ΘΕΩΡΗΜΑ

420. *Ἐὰν ἐπίπεδον καὶ σφαῖρα ἔχωσι κοινὰ σημεῖα περισσότερα τοῦ ἑνός, τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶνε μικρότερον τῆς ἀκτῖνος, καὶ τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ κύκλον.*

Τὸ ἀπόστημα δὲν δύναται νὰ εἶνε μεγαλήτερον τῆς ἀκτῖνος· διότι τότε ἡ σφαῖρα καὶ τὸ ἐπίπεδον δὲν θὰ εἶχον κοινὸν σημεῖον (417)· οὐδὲ ἴσον τῇ ἀκτῖνι δύναται νὰ εἶνε· διότι τότε θὰ εἶχον ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον· ἄρα τὸ ἀπόστημα θὰ εἶνε μικρότερον τῆς ἀκτῖνος.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀπόστημα τοῦ κέντρου ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶνε μικρότερον τῆς ἀκτῖνος, ὁ πούς αὐτοῦ Δ κεῖται ἐντὸς τῆς σφαίρας· ἄρα τὸ δι' αὐτοῦ διερχόμενον ἐπίπεδον ΜΝ τέμνει τὴν σφαῖραν· λέγω δέ, ὅτι ἡ τομὴ εἶνε κύκλος.



Διότι, ἂν ἐκ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ἀποστήματος ΚΔ ἀχθῶσιν εὐθεῖαι εἰς ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς γραμμῆς, ἐφ' ἧς περατοῦται ἡ τομή, οἷον αἱ ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ,..., ἀχθῶσι δὲ καὶ αἱ ἀκτῖνες ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ,..., αὗται, ὡς πρὸς τὴν κάθετον ΚΔ, θὰ εἶνε πλάγιαι· ἐπειδὴ δὲ εἶνε ἴσαι, ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου (309)· ἄρα αἱ ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ,..., εἶνε πᾶσαι ἴσαι· ἄρα πάντα τὰ σημεῖα τῆς γραμμῆς ΑΒΓΕ ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ Δ καὶ διὰ τοῦτο ἡ γραμμὴ αὕτη εἶνε περιφέρεια κύκλου καὶ τὸ Δ εἶνε κέντρον αὐτῆς.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΔΑ εὑρίσκομεν τὴν σχέσιν

$$(\mathrm{KA})^2 = (\mathrm{K\Delta})^2 + (\Delta \mathrm{A})^2,$$

δι' ἧς συνδέονται (ἐν ἑκάστῃ σφαίρᾳ) τὸ ἀπόστημα ΚΔ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τῆς τομῆς. Ἐκ τῆς σχέσεως δὲ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ μέγεθος τῆς τομῆς, ὅταν ἔχωμεν τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τοῦ κέντρου. Ἡ ἀκτὶς τῆς τομῆς εἶνε μικροτέρα τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας, πλὴν ὅταν τὸ ἐπίπεδον διέρχηται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, διότι τότε ἡ τομὴ εἶνε κύκλος ἔχων ἀκτῖνα ἴσην τῇ ἀκτῖνι τῆς σφαίρας.

Παρατήρησις. Καὶ περὶ τῶν θέσεων εὐθείας πρὸς σφαῖραν ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον θεωρήματα ὅμοια πρὸς τὰ προηγούμενα.

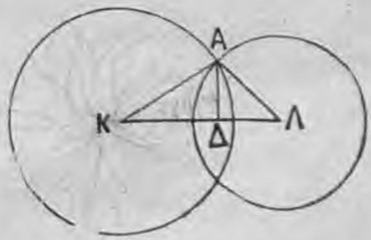
ΔΥΟ ΣΦΑΙΡΩΝ ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΠΡΟΣ ΑΛΛΗΛΑΣ ΘΕΣΕΙΣ

421. Ἐὰν διὰ τῶν δύο κέντρων τῶν δύο σφαιρῶν νοήσωμεν ἀχθὲν τυχὸν ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὰς σφαίρας κατὰ δύο κύκλους. Οἱ δὲ κύκλοι οὗτοι περιστραφέντες περὶ τὴν διὰ τῶν κέντρων διερχομένην εὐθεῖαν, θὰ γράψωσι τὰς δύο σφαίρας, χωρὶς νὰ μεταβληθῇ διόλου ἡ πρὸς ἀλλήλους θέσεις των. Ἂν λοιπὸν οἱ δύο κύκλοι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων, καὶ αἱ σφαῖραι κεῖνται ἐκτὸς ἀλλήλων· ἂν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτός, καὶ αἱ σφαῖραι ποιοῦσι τὸ αὐτό· ἂν οἱ κύκλοι τέμνωνται, καὶ αἱ σφαῖραι τέμνονται· τὸ αὐτὸ δὲ συμβαίνει καὶ περὶ τὰς ἄλλας θέσεις. Ἐκ τούτων συνάγεται, ὅτι αἱ διάφοροι θέσεις δύο σφαιρῶν πρὸς ἀλλήλας (ἐὰν μὴ ἐφαρμόζωσι καὶ ἀποτελῶσι μίαν μόνην) εἶνε πέντε· τουτέστιν αἱ διάφοροι θέσεις δύο κύκλων πρὸς ἀλλήλους· ἔχουσι δὲ αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων αὐτῶν τὰς αὐτὰς σχέσεις (ἐν ἑκάστῃ τῶν θέσεων) ἃς ἔχουσι καὶ τῶν κύκλων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

422. *Ἐὰν δύο σφαῖραι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἡ τομὴ τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν εἶνε περιφέρεια κύκλου, ἔχουσα τὸ κέντρον αὐτῆς ἐπὶ τῆς τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν ἐπιζευγνυούσης εὐθείας, τὸ δὲ ἐπίπεδον αὐτῆς κάθετον ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.*

Ἔστωσαν Κ καὶ Λ τὰ κέντρα δύο σφαιρῶν τεμνουσῶν ἀλλήλας καὶ Α σημεῖόν τι κοινὸν τῶν ἐπιφανειῶν αὐτῶν. Ἐὰν διὰ τῶν τριῶν σημείων Κ, Α, Λ νοήσωμεν ἐπίπεδον, τοῦτο θὰ τέμνῃ τὰς δύο σφαίρας κατὰ δύο κύκλους τεμνομένους. Ἐὰν δὲ περιστραφῶσιν οἱ κύκλοι οὗτοι περὶ τὴν ΚΛ, θὰ γράψωσι τὰς δύο σφαίρας, τὸ δὲ σημεῖον Α θὰ γράψῃ κύκλου



περιφέρειαν, ἥτις θὰ κεῖται ἐπ' ἀμφοτέρων τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν (διότι αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τῶν κέντρων Κ, Λ, δὲν μεταβάλλονται). Ἡ περιφέρεια δὲ αὕτη θὰ ἔχῃ ἀκτῖνα τὴν ΑΔ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΛ, καὶ ἐπίπεδον τὸ ὑπὸ τῆς ΑΔ γραφόμενον, ὅπερ εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΚΛ.

Πλὴν τῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης, αἱ δύο σφαιρικαὶ ἐπιφανειαι οὐδὲν ἄλλο ἔχουσι κοινὸν σημεῖον· διότι πᾶν τοιοῦτο σημεῖον, συνδεόμενον πρὸς τὰ Κ καὶ Λ δι' εὐθειῶν, παρέχει τρίγωνον ἴσον τῷ ΑΚΛ· τὸ δὲ τρίγωνον τοῦτο ἔλαβε περὶ τὴν ΚΛ πάσας τὰς δυνατὰς θέσεις.

ΠΕΡΙ ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

423. *Κύκλος μέγιστος* τῆς σφαίρας λέγεται πᾶς κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Πᾶς μέγιστος κύκλος ἔχει κέντρον καὶ ἀκτῖνα τὰ τῆς σφαίρας.

Οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶνε πάντες ἴσοι καὶ διαιροῦσιν ἀλλήλους εἰς δύο ἴσα μέρη· διότι ἡ κοινὴ τομὴ δύο ἐξ αὐτῶν εἶνε εὐθεῖα διὰ τοῦ κέντρου διερχομένη καὶ διὰ τοῦτο διάμετρος τῆς σφαίρας· ἄρα καὶ τῶν κύκλων κοινὴ διάμετρος.

Πᾶς μέγιστος κύκλος διαιρεῖ τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη, ἅτινα λέγονται *ἡμισφαίρια*.

Διότι, ἐάν, ἀφοῦ χωρίσωμεν τὰ δύο μέρη, ἐφαρμόσωμεν αὐτὰ οὕτως, ὥστε νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως, αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν θὰ ἐφαρμόσωσι· διότι τὰ σημεῖα ἑκατέρας αὐτῶν ἀπέχουσιν ἴσον ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς κοινῆς αὐτῶν βάσεως.

Διὰ δύο τυχόντων σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας διέρχεται τόξον μεγίστου κύκλου· διότι τὸ δι' αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας διερχόμενον ἐπίπεδον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον, ὅστις διέρχεται διὰ τῶν δύο σημείων. Εἷς δὲ μόνος μέγιστος κύκλος διέρχεται διὰ τῶν δοθέντων δύο σημείων τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· διότι ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον διέρχεται δι' αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου· πλὴν ὅταν τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ τὸ κέντρον κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τουτέστιν, ὅταν τὰ δοθέντα σημεῖα εἶνε πέρατα μιᾶς διαμέτρου· διότι τότε διέρχονται δι' αὐτῶν καὶ διὰ τοῦ κέντρου ἄπειρα ἐπίπεδα· ἄρα καὶ ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΜΙΚΡΩΝ ΚΥΚΛΩΝ

424. *Μικρὸς κύκλος* τῆς σφαίρας λέγεται πᾶς κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον δὲν διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου (420) συνάγεται, ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας εἰς τὸ κέντρον τοῦ μικροῦ κύκλου ἀγομένη εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου.

Οἱ μικροὶ κύκλοι εἶνε τόσῳ μικρότεροι, ὅσῳ περισσότερον ἀπέχουσι τὰ κέντρα αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Διότι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ συνδέονται διὰ τῆς ἰσότητος (420).

$$(\text{ΚΔ})^2+(\text{ΔΑ})^2=(\text{ΚΑ})^2,$$

ἐξ ἧς φαίνεται, ὅτι, ὅσον ἡ ΚΔ αὐξάνει, τόσον ἡ ΑΔ ἐλαττοῦται.

Ἡ θέσις μικροῦ κύκλου εἶνε ἐντελῶς ὡρισμένη, ὅταν δοθῶσι τρία σημεῖα τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Παράλληλοι κύκλοι τῆς σφαίρας λέγονται οἱ κύκλοι τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα.

Πόλοι κύκλου τῆς σφαίρας λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ἥτις εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

425 Ἑκάτερος τῶν πόλων τοῦ τυχόντος κύκλου τῆς σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ τῆς σφαίρας Κ. ἡ τὸ κέντρον αὐτοῦ Δ καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ΔΚ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ τὰ σημεῖα Π, Π', ἔνθα προσεκβαλλομένη ἡ ΚΔ τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, εἶνε οἱ πόλοι τοῦ κύκλου τούτου.

Ἵνα δείξωμεν, ὅτι ὁ πόλος Π ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ΑΒΓ, λαμβάνομεν ὁσαδήποτε σημεῖα τῆς περιφερείας ταύτης, ὡς τὰ Α,Β,Γ, καὶ ἄγομεν εἰς αὐτὰ τὰς ἀκτῖνας ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ὡς καὶ τὰς ἀποστάσεις αὐτῶν ΑΠ, ΒΠ, ΓΠ ἀπὸ τοῦ πόλου. Αἱ εὐθεῖαι αὗται ΑΠ, ΒΠ, ΓΠ θὰ εἶνε ἴσαι· διότι εἶνε πλάγιαι ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ ποδὸς Δ τῆς καθέτου ΠΔ· ἑπομένως ὁ πόλος Π ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας ΑΒΓ· ὁμοίως δεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τοῦ Π'.

Καὶ τὰ τόξα τῶν μεγίστων κύκλων, τὰ ἐκ τοῦ πόλου εἰς τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας ἀγόμενα, οἷον τὰ ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ, εἶνε ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας χορδάς.

Ἔτι δὲ καὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων τούτων κύκλων εἶνε κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΒΓ, ὡς διερχόμενα διὰ τῆς ἐπ' αὐτὸ καθέτου ΠΔ.

Ἐὰν ὁ κύκλος εἶνε μέγιστος, ὡς ὁ ΕΖΗ, αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ΠΚΕ, ΠΚΖ, ΠΚΗ μετροῦνται ὑπὸ τῶν τόξων ΠΕ, ΠΖ, ΠΗ (ὧν κέντρα εἶνε αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν) καὶ διὰ τοῦτο τὰ τόξα ταῦτα εἶνε τεταρτημόρια περιφερείας.

ΠΟΡΙΣΜΑ

426. *Ἐὰν τὰ ἔκ τινος σημείου Π τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας ἀγόμενα τόξα μεγίστου κύκλου (ΠΕ, ΠΖ) εἰς δύο σημεῖα τῆς περιφερείας ἄλλου μεγίστου κύκλου (ΕΖΗ) εἶνε τεταρτημόρια, τὸ σημεῖον Π εἶνε πόλος τοῦ μεγίστου τούτου κύκλου (ΕΖΗ).*

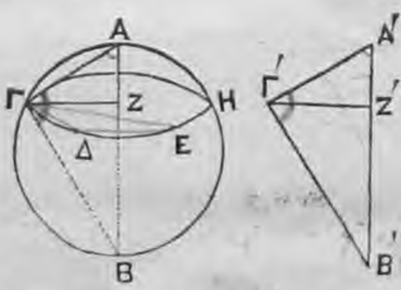
Διότι ἀχθεισῶν τῶν ἀκτίνων ΕΚ, ΖΚ, ΗΚ, αἱ γωνίαι ΕΚΠ, ΖΚΠ, ὡς βαίνουσαι ἐπὶ τεταρτημορίων εἶνε ὀρθαί, ἄρα ἡ διάμετρος ΠΠ΄ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΕΖΗ, καὶ διὰ τοῦτο τὰ ἄκρα αὐτῆς Π, Π΄ εἶνε πόλοι αὐτοῦ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐπειδὴ ὁ πόλος οἱουδήποτε κύκλου τῆς σφαίρας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ πάντων τῶν σημείων τῆς περιφερείας αὐτοῦ, δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τόξα κύκλων τόσον εὐκόλως, ὅσον καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Πρὸς τοῦτο μεταχειριζόμεθα διαβήτην, τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶνε καμπύλα καὶ ὅστις λέγεται σφαιρικὸς διαβήτης. Ἀφοῦ στηρίξωμεν τὸ ἄκρον τοῦ ἑνὸς σκέλους εἴς τι σημεῖον τῆς σφαίρας, περιστρέφομεν τὸν διαβήτην οὕτως ὥστε τὸ ἄκρον τοῦ ἄλλου σκέλους νὰ μένῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας· τότε τὸ ἄκρον τοῦτο θὰ γράψῃ ἐπὶ τῆς σφαίρας περιφέρειαν κύκλου ἔχουσαν πόλον τὸ σημεῖον, εἰς ὃ στηρίζεται τὸ ἀκίνητον ἄκρον· διότι ἡ ἀπόστασις τοῦ ἀκινήτου ἄκρου ἀπὸ τοῦ κινουμένου μένει πάντοτε ἡ αὐτή.

Ἐὰν δὲ θέλωμεν νὰ γράψωμεν τόξον μεγίστου κύκλου, πρέπει νὰ λάβωμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄκρων τοῦ διαβήτου ἴσην μὲ τὴν χορδὴν ΠΕ τοῦ τεταρτημορίου ΠΚΕ τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου· πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει νὰ εἶνε γνωστὴ ἡ περιφέρεια αὐτή· τουτέστιν ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΝ

427· *Εὑρεῖν τὴν ἀκτῖνα δοθείσης σφαίρας.*



Μὲ πόλον τὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ἐπιφανείας καὶ μὲ ἀκτῖνα (τουτέστιν ἀπόστασιν τῶν ἄκρων τοῦ διαβήτου) οἱανδήποτε, ΑΓ γράφομεν ἐπὶ τῆς σφαίρας περιφέρειαν κύκλου, τὴν ΓΔΕ. Ἔπειτα λαμβάνομεν διὰ τοῦ διαβήτου τὰς ἀπ' ἀλλήλων ἀποστάσεις τριῶν σημείων τῆς περιφερείας ταύτης, ἔστω τῶν Γ, Δ, Ε, καὶ μὲ τὰς ἀποστάσεις ταύτας ΓΔ, ΓΕ, ΔΕ, ὡς πλευράς, κατασκευάζομεν τρίγωνον ἐπὶ ἐπιπέδου, καὶ περὶ τὸ τρίγωνον τοῦτο περιγράφομεν κύκλον· ὁ κύκλος οὗτος θὰ εἶνε ἴσος τῷ ἐπὶ τῆς σφαίρας γεγραμμένῳ ΓΔΕ, καὶ ἡ ἀκτὶς αὐτοῦ θὰ εἶνε ἴση τῇ ἀκτῖνι τοῦ ΓΔΕ, ἤτοι τῇ ΓΖ.

Τούτων γενομένων, ἂν νοήσωμεν μέγιστον κύκλον ΑΓΒΗΑ διερχόμενον διὰ τῆς διαμέτρου ΑΒ τῆς σφαίρας καὶ διά τινος σημείου Γ τῆς περιφερείας ΓΔΕ, ἔτι δὲ καὶ τὰς χορδὰς αὐτοῦ ΑΓ, ΓΒ, ἐν τῷ ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ΑΓΖ εἶνε γνωστὴ ἡ ὑποτείνουσα ΑΓ καὶ ἡ πλευρὰ ΓΖ· δύναται λοιπὸν νὰ κατασκευασθῇ ἐπὶ ἐπιπέδου τὸ τρίγωνον Α΄Γ΄Ζ΄ ἴσον τῷ ΑΓΖ· ἐπειδὴ δὲ ἡ ΓΒ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΑ, ἐὰν ἐκ τοῦ Γ΄ ἀχθῇ ἡ Γ΄Β΄ κάθετος ἐπὶ τὴν Γ΄Α΄ καὶ προσεκβληθῇ ἡ Α΄Ζ΄ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον Α΄Γ΄Β΄ ἴσον τῷ ἐν τῇ σφαίρᾳ ΑΓΒ· διότι εἶνε ΑΓ=Α΄Γ΄ καὶ αἱ γωνίαι Α καὶ Α΄ ἴσαι (ὡς γωνίαι τῶν ἴσων τριγώνων ΑΓΖ, Α΄Γ΄Ζ΄)· ἔτι δὲ καὶ αἱ γωνίαι Γ, Γ΄ ἴσαι, ὡς ὀρθαί· ἄρα ἡ Α΄Β΄ ἰσοῦται τῇ ΑΒ, ἤτοι τῇ διαμέτρῳ τῆς σφαίρας· τὸ δὲ ἥμισυ αὐτῆς θὰ εἶνε ἴσον τῇ ἀκτῖνι τῆς σφαίρας.

*ΠΡΟΒΛΗΜΑ

428. *Ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου ἔχουσα ἀκτῖνα ἴσην τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ.*

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΣ. Ἡ δοθεῖσα ἀκτὶς δὲν πρέπει νὰ ὑπερβαίνῃ τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας.

ΑΝΑΛΥΣΙΣ. Ἔστω τὸ πρόβλημα λελυμένον καὶ ΑΒΓΑ ἡ ζητουμένη περιφέρεια. Ἡ ἀκτὶς αὐτῆς ΔΑ εἶνε ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ Ε, ἑπομένως γνωστή· γνωστὴ δὲ εἶνε καὶ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ΑΚ· τοῦ ὀρθογωνίου λοιπὸν τριγώνου ΑΚΔ εἶνε γνωσταὶ δύο πλευραί, ἄρα τὸ τρίγωνον τοῦτο δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ· κατασκευασθέντος δὲ τοῦ τριγώνου ΑΚΔ, εὑρίσκεται καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΠ, ἂν προσεκβληθῇ ἡ ΚΔ καὶ γίνῃ ἴση τῇ ἀκτῖνι ΚΑ.

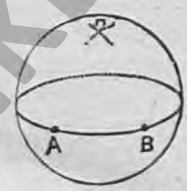
Τέλος εὑρίσκεται ἐκ τούτων καὶ ἡ ΠΑ, ἥτις εἶνε ἡ ἀπόστασις τῶν ἄκρων τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, μὲ τὴν ὁποίαν γράφεται ἡ περιφέρεια ἐκ τοῦ πόλου Π.

Ἡ σύνθεσις τοῦ προβλήματος τούτου, ὡς εὐκολωτάτη, παραλείπεται

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

429. *Ἐπὶ τῆς δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων Α καὶ Β τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς.*

Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὡς πόλων καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην τῇ χορδῇ τοῦ τεταρτημορίου γράφομεν δύο μεγίστους κύκλους· ἔστω δὲ Π τὸ ἕτερον τῶν σημείων, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ περιφέρειαι αὐτῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς σφαίρας (423). Ἐκ τοῦ σημείου τούτου Π ὡς πόλου καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν κύκλον, ὅστις θὰ διέλθῃ διὰ τῶν δοθέντων σημείων Α καὶ Β, διότι αἱ εὐθεῖαι ΠΑ, ΠΒ εἶνε χορδαὶ τεταρτημορίου.



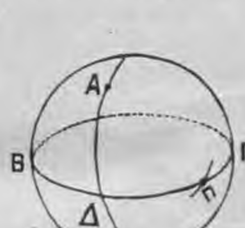
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα Α,Β εἶνε ἄκρα μιᾶς διαμέτρου οἱ ἐξ αὐτῶν ὡς πόλων γραφόμενοι μέγιστοι κύκλοι ἐφαρμόζουσιν ἐπ' ἀλλήλους· τότε δὲ ἄγονται διὰ τῶν Α, Β, ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι, τῶν ὁποίων πόλοι εἶνε τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο γεγραμμένων περιφερειῶν.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

430. *Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου Α τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας νὰ ἀχθῇ μέγιστος κύκλος κάθετος ἐπὶ τὸν δοθέντα μέγιστον κύκλον ΒΓΔ.*

Κάθετοι λέγονται δύο μέγιστοι κύκλοι, ἐὰν τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν εἶνε κάθετα πρὸς ἄλληλα.

Ἐκ τοῦ σημείου Α ὡς πόλου γράφομεν μέγιστον κύκλον, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια θὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν (ἐὰν μὴ ἐφαρμόσῃ ἐπ' αὐτῆς) εἰς δύο σημεῖα· ἐκ τούτων ἔστω ἓν τὸ Π. Ἐὰν ἐκ τοῦ Π ὡς πόλου γράψωμεν μέγιστον κύκλον, οὗτος θὰ διέρχηται διὰ τοῦ Α καὶ θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ΒΓΔ· θὰ διέλθῃ διὰ τοῦ Α, διότι ἡ ΑΠ εἶνε ἴση τῇ χορδῇ τοῦ τεταρτημορίου· θὰ εἶνε δὲ καὶ κάθετος ἐπὶ τὸν ΒΓΔ, διότι ἔχει πόλον τὸ Π, καὶ πᾶς μέγιστος κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Π θὰ εἶνε κάθετος ἐπ' αὐτόν (425)· ἄρα καὶ ὁ ΒΓΔ.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὸ σημεῖον Α εἶνε πόλος τοῦ δοθέντος κύκλου ΒΓΔ, ὁ γραφόμενος κύκλος ἐφαρμόζει ἐπὶ τὸν δοθέντα καὶ πᾶς μέγιστος κύκλος διὰ τοῦ Α διερχόμενος εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸν ΒΓΔ.

ΣΦΑΙΡΑΣ ΜΕΤΡΗΣΙΣ (*)

ΟΡΙΣΜΟΙ

431. *Σφαιρικὴ ζώνη* λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

Βάσεις τῆς ζώνης λέγονται οἱ δύο κύκλοι, εἰς τοὺς ὁποίους περατοῦται. Ἐὰν δὲ τὸ ἓν ἐκ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ἐφάπτηται τῆς σφαίρας, ἡ ζώνη ἔχει μόνον μίαν βάσιν.

Ὕψος δὲ τῆς ζώνης λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται.

Τμῆμα σφαίρας λέγεται μέρος τῆς σφαίρας περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων.

Βάσεις τοῦ τμήματος λέγονται οἱ δύο κύκλοι εἰς οὓς περατοῦται. Τὸ τμῆμα ἔχει μόνον μίαν βάσιν, ἐὰν τὸ ἓν ἐκ τῶν ἐπιπέδων, ὑφ' ὧν περιέχεται, ἐφάπτηται τῆς σφαίρας.

Ὕψος δὲ τοῦ τμήματος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων.

Σφαιρικὸς τομεὺς λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον γράφει ὁ τυχὼν τομεὺς τοῦ ἡμικυκλίου, ὅταν τοῦτο περιστρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρόν του γράφῃ τὴν σφαῖραν.

Ἐὰν νοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον ΑΓΕΒΑ περιστρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρόν του ΑΒ καὶ γράφον τὴν σφαῖραν, τὸ μὲν τόξον ΓΕ θὰ γράψῃ σφαιρικὴν ζώνην ἔχουσαν βάσεις τοὺς ὑπὸ τῶν εὐθειῶν ΓΔ, ΕΖ γραφομένους κύκλους καὶ ὕψος τὴν ΔΖ· τὸ δὲ μέρος ΓΕΖΔ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τμῆμα ἔχον τὰς αὐτὰς βάσεις καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Τὸ τόξον ΑΓ θὰ γράψῃ ζώνην ἔχουσαν μίαν μόνον βάσιν, καὶ τὸ μέρος ΑΓΔ τοῦ ἡμικυκλίου θὰ γράψῃ τμῆμα ἔχον μίαν βάσιν.

(*) Πάντα τὰ ἑπόμενα θεωρήματα περὶ τῆς μετρήσεως τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας καὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἀπεδείχθησαν ὑπὸ τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὁ αὐτὸς εὗρε καὶ τὰ μέτρα τῶν κυλίνδρων καὶ τῶν κώνων.

Ὁ δὲ κυκλικὸς τομεὺς ΓΚΕ θὰ γράψῃ σφαιρικὸν τομέα· ὡσαύτως καὶ ὁ τομεὺς ΑΚΓ.

Ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης λέγεται τὸ ὅριον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει τεθλασμένη γραμμὴ ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον τὸ γράφον τὴν ζώνην.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Vathy

432. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶνε γινόμενον τοῦ ὕψους αὐτῆς επὶ τὴν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας.*

Ἔστω ἡ σφαιρικὴ ζώνη ἡ ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΕ γραφομένη. Ἂς ἐγγραφῇ εἰς τὸ τόξον τοῦτο ἡ τυχοῦσα τεθλασμένη γραμμὴ ΓΗΘΕ. Ἡ χορδὴ ΓΗ ἐν τῇ περιστροφῇ τοῦ ἡμικυκλίου περὶ τὴν ΑΒ θὰ γράψῃ ἐπιφάνειαν κολούρου κώνου, τῆς ὁποίας τὸ ἐμβαδὸν (415, Σημ. β´) εἶνε γινόμενον τοῦ ὕψους του, τουτέστι τῆς ΔΙ, ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, ἥτις ἔχει ἀκτῖνα τὴν ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΓΗ ὑψουμένην κάθετον πρὸς αὐτὴν μέχρι τοῦ ἄξονος ΑΒ· ἡ κάθετος δὲ αὐτη διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Κ τῆς σφαίρας καὶ εἶνε ἡ ἀπόστασις τῆς χορδῆς ΓΗ ἀπὸ τοῦ κέντρου· τὸ αὐτὸ δὲ ἰσχύει καὶ περὶ τῶν ἄλλων χορδῶν ΗΘ, ΘΕ· ἐπομένως, ἂν παραστήσωμεν τὰς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τῶν χορδῶν ΓΗ, ΗΘ, ΘΕ... διὰ τῶν α, α', α'',..., τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμή, διὰ τοῦ Ε, θὰ εἶνε

$$E = 2\pi\alpha . \Delta I + 2\pi\alpha' . IM + 2\pi\alpha'' MZ.$$

Ἐκ τῶν ἀποστημάτων α, α', α''.... ἔστω μέγιστον μὲν τὸ α, ἐλάχιστον δὲ τὸ α''· τότε εἶνε

$$E < 2\pi\alpha . \Delta I + 2\pi\alpha . IM + 2\pi\alpha . MZ, \quad \text{ἢ } E < 2\pi\alpha . \Delta Z$$
$$\text{καὶ } E > 2\pi\alpha'' . \Delta I + 2\pi\alpha'' . IM + 2\pi\alpha'' MZ \quad \text{ἢ } E > 2\pi\alpha'' . \Delta Z.$$

Vathy

Ἀλλ' ὅταν αἱ πλευραὶ τῆς ἐγγεγραμμένης γραμμῆς τείνωσι πρὸς τὸ μηδέν, πᾶσαι αἱ ἀποστάσεις α, α', α'',... αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου τείνουσι πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας, ἥντινα ἀκτῖνα παριστῶ διὰ τοῦ Α· ὥστε ἀμφότερα τὰ ἐμβαδὰ $2\pi\alpha . \Delta Z$ καὶ $2\pi\alpha'' . \Delta Z$ τείνουσι πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον $2\pi A . \Delta Z$. Ἄρα καὶ τὸ Ε, ὅπερ περιέχεται μεταξὺ αὐτῶν, τείνει πρὸς τὸ αὐτὸ ὅριον $2\pi A . \Delta Z$. Ἀλλὰ τὸ ὅριον τοῦ Ε λέγεται ἐμβαδὸν τῆς ζώνης·

[illegible]

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης εἶνε $2\pi A . \Delta Z$, τουτέστι γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου $2\pi A$ τῆς σφαίρας ἐπὶ τὸ ὕψος της ΔΖ· ἐξ οὗ βλέπομεν, ὅτι *τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης εἶνε ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου ἔχοντος βάσιν μὲν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας, ὕψος δὲ τὸ τῆς ζώνης.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 1ον

433. *Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶνε γινόμενον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτῆς.*

Διότι, ὅταν τὸ τόξον ΓΕ αὐξανόμενον καταντήσῃ ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ΑΓΕΒ, ἡ σφαιρικὴ ζώνη καταντᾷ ὁλόκληρος ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας, τὸ δὲ ὕψος τῆς ζώνης καταντᾷ ἴσον τῇ διαμέτρῳ ΑΒ· ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶνε $2\pi A . 2A$, ἢ $4\pi A^2$, καὶ ἐπειδὴ πA^2 παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, συνάγεται, ὅτι *ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἔχει ἐμβαδόν, ὅσον ἔχουσι τέσσαρες μέγιστοι κύκλοι αὐτῆς.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 2ον

434. *Αἱ ἐπιφάνειαι δύο σφαιρῶν εἶνε πρὸς ἀλλήλας ὡς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.*

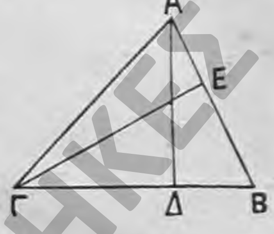
ΠΟΡΙΣΜΑ 3ον

435. *Εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν αἱ ἰσοϋψεῖς ζῶναι ἔχουσιν ἴσα ἐμβαδά.* — Ἐκ τούτου ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς ὁσαδήποτε θέλωμεν ἴσα μέρη· πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν διάμετρον αὐτῆς ΑΒ εἰς ἴσα μέρη· τὰ ἐκ τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως ἀγόμενα ἐπίπεδα καθέτως τῇ διαμέτρῳ διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς ζώνας ἰσοϋψεῖς, ἐπομένως ἴσας κατὰ τὸ ἐμβαδόν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

436. *Ἐὰν τρίγωνον περιστραφῇ περὶ ἄξονα κείμενον ἐν τῷ ἐπιπέδῳ αὐτοῦ, διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς του καὶ μὴ τέμνοντα αὐτό, τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ τριγώνου στερεὸν ἔχει ὄγκον ἴσον τῷ γινομένῳ τῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ βάσις τοῦ τριγώνου, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ὕψους του.*

1ον) Ἂς ὑποθέσωμεν κατὰ πρῶτον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΓΑΒ στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἔστω περὶ τὴν ΓΒ. Τὸ ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΓΑΒ γραφόμενον στερεὸν (οὗ τὸν ὄγκον παριστῶμεν συντόμως διὰ τοῦ ὄγκ. ΑΒΓ) σύγκειται ἐκ δύο κώνων, οὓς γράφουσι τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΔΑΒ· ἑπομένως εἶνε



$$\text{ὄγκος ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\pi(\text{ΑΔ})^2(\text{ΔΓ}) + \frac{1}{3}\pi(\text{ΑΔ})^2(\text{ΔΒ}).$$

$$\text{ἤτοι ὄγκ. ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\pi(\text{ΑΔ})^2(\text{ΒΓ}). \qquad (\iota)$$

Ἀλλ' ἂν ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἀχθῇ ἡ κάθετος ΓΕ ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΑΒ, θὰ ἔχωμεν

εμβ. εμβ.

$$\left[2\left(\frac{1}{2}\text{ΒΓ.ΑΔ}\right) = \left(\frac{1}{2}\text{ΓΕ.ΑΒ}\right)2\right] = (\text{ΒΓ.ΑΔ} = \text{ΓΕ.ΑΒ})$$

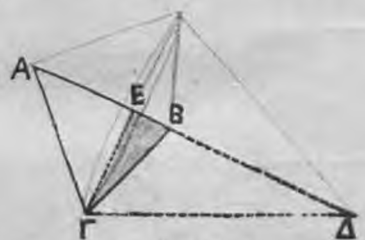
διότι ἑκάτερον τῶν γινομένων τούτων δηλοῖ τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ὥστε ἀντικαθιστῶντες ἐν τῇ ἰσότητι (ι) τὸ γινόμενον ΑΔ.ΒΓ διὰ τοῦ ἴσου ΓΕ.ΑΒ, εὑρίσκομεν

$$\text{ὄγκ. ΑΒΓ} = \frac{1}{3}\pi.\text{ΑΔ.ΑΒ.ΓΕ}\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ π.ΑΒ ΑΔ παριστᾷ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ἣν γράφει ἡ ΑΒ, συνάγεται, ὅτι εἶνε ὄγκ. ΑΒΓ= (ἐπιφ. ΑΒ). $\left(\frac{1}{3}\text{ΓΕ}\right)$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἂν ἡ κάθετος ΑΔ πίπτῃ ἐκτὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ὁ ὄγκος ΑΒΓ εἶνε διαφορὰ τῶν δύο προηγουμένων κώνων· κατὰ τὰ ἄλλα ἡ ἀπόδειξις μένει ἡ αὐτή.

2ον) Ἂς ὑποθέσωμεν δεύτερον, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα ΓΔ, ὅστις κεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ τριγώνου καὶ διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Γ, χωρὶς νὰ τέμνῃ τὸ τρίγωνον.



Ἂς προσεκβληθῇ ἡ ΑΒ, μέχρις οὗ συναντήσῃ τὸν ἄξονα κατὰ τὸ Δ· τότε τὸ στερεὸν τὸ γραφόμενον ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶνε διαφορὰ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσι τὰ τρίγωνα ΑΓΔ καὶ ΒΓΔ· ὅθεν ὄγκ. ΑΒΓ=ὄγκ.ΑΓΔ—ὄγκ.ΒΓΔ·

ἀλλὰ κατὰ τὰ προηγουμένως εὑρεθέντα εἶνε

$$\text{ὄγκ.}\,ΑΓΔ=(\text{ἐπιφ.}\,ΑΔ).\left(\frac{1}{3}.ΓΕ\right)$$

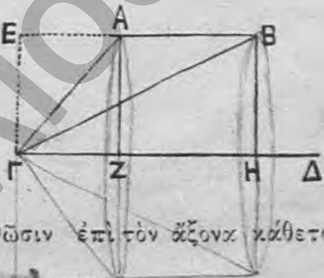
$$\text{ὄγκ.}\,ΒΓΔ=(\text{ἐπιφ.}\,ΒΔ).\left(\frac{1}{3}\,ΓΕ\right)\cdot$$

ὅθεν συνάγεται

$$\text{ὄγκ.}\,ΑΒΓ=(\text{ἐπιφ.}\ ΑΔ)\ \frac{1}{3}ΓΕ-(\text{ἐπιφ.}\,ΒΔ)\frac{1}{3}\,ΓΕ=$$

$$=\frac{1}{3}\,ΓΕ.\ \text{ἐπιφ.}\,ΑΔ-\text{ἐπιφ.}\,ΒΔ),$$

τουτέστιν $\text{ὄγκ.}\ ΑΒΓ=\frac{1}{3}\,ΓΕ(\text{ἐπιφ.}\ ΑΒ).$



Ἐν τῇ προηγουμένῃ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΒ προσεκβαλλομένη τέμνει τὸν ἄξονα ΓΔ. Ἐὰν ἡ ΑΔ εἶνε παράλληλος τῷ ἄξονι, καὶ πάλιν τὸ θεώρημα ἀληθεύει· ἀποδεικνύεται δὲ ὡς ἑξῆς.

Ἐκ τῶν ἄκρων τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἂς ἀχθῶσιν ἐπὶ τὸν ἄξονα κάθετοι αἱ ΑΖ, ΒΗ· τότε εἶνε προφανῶς

$$\text{ὄγκ.}\ ΑΒΓ=\text{ὄγκ.}\ ΑΓΖ+\text{ὄγκ.}\,ΑΖΗΒ-\text{ὄγκ.}\,ΓΒΗ,$$

ἀλλὰ $\text{ὄγκ.}\ ΑΓΖ=\frac{1}{3}\,\pi\,(ΑΖ)^2.ΓΖ,$

$$\text{ὄγκ.}\ ΑΖΗΒ=\pi\ (ΑΖ)^2.\ ΖΗ.$$

$\text{ὄγκ.}\ ΓΒΗ=\frac{1}{3}\,\pi\,(ΑΖ)^2.ΓΗ,$ διότι ΑΖ=ΒΗ.

ὅθεν $\text{ὄγκ.}\ ΑΒΓ=\frac{1}{3}\,\pi(ΑΖ)^2\left\{ΓΖ+3ΖΗ-ΓΗ\right\}.$

καὶ ἐπειδὴ εἶνε ΓΗ=ΓΖ+ΖΗ, ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$\text{ὄγκ.}\ ΑΒΓ=\frac{1}{3}\pi\,(ΑΖ)^2.2ΖΗ,$$

ἀλλὰ 2π. ΑΖ. ΖΗ εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ ΑΒ· ὅθεν ἔπεται

$$\text{ὄγκ.}\ ΑΒΓ=(\text{ἐπιφ.}\ ΑΒ)\frac{1}{3}\,ΑΖ=(\text{ἐπιφ.}\ ΑΒ).\ \frac{1}{3}ΓΕ\cdot$$

ὥστε εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις ὁ ὑπὸ τοῦ τριγώνου, ὡς εἴρηται, γραφόμενος ὄγκος εἶνε ἰσοδύναμος πυραμίδι, ἥτις ἔχει βάσιν μὲν τὴν ὑπὸ τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου γραφομένην ἐπιφάνειαν, ὕψος δὲ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ

VI 437. *Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως εἶνε γινόμενον τῆς ζώνης, ἥτις εἶνε βάσις αὐτοῦ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος.*

Ἔστω ΚΓΔ ὁ κυκλικὸς τομεύς, ὅστις περιστρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ γράφει τὸν σφαιρικὸν τομέα.

Ἐὰν διαιρεθῇ τὸ τόξον ΓΔ εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη καὶ ἀχθῶσιν αἱ χορδαὶ αὐτῶν, προκύπτει πολυγωνικὸς τομεύς, ὡς ὁ ΚΔΕΖΓΚ, ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα. Ὁ πολυγωνικὸς οὗτος τομεὺς ἐν τῇ περιστροφῇ θὰ γράψῃ στερεὸν συγκείμενον ἐκ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσι τὰ ἴσα τρίγωνα ΚΓΖ, ΚΖΕ, ΚΕΔ, εἰς ἃ διαιρεῖται· ἑπομένως ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τούτου θὰ εἶνε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα,

$$(\text{ἐπιφ.}\,\Gamma Z).\frac{1}{3}\alpha + (\text{ἐπιφ.}\ ZE).\frac{1}{3}\alpha + (\text{ἐπιφ.}\ E\Delta).\frac{1}{3}\alpha.$$

ἤτοι $$\frac{1}{3}\alpha.(\text{ἐπιφ.}\,\Gamma Z + \text{ἐπιφ.}\,ZE + \text{ἐπιφ.}\,E\Delta),$$

ἢ $$\frac{1}{3}\alpha.(\text{ἐπιφ.}\,\Gamma Z E\Delta),$$

τουτέστιν ἴσος τῇ ἐπιφανείᾳ, ἣν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΓΖΕΔ, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀποστάσεως α τῶν χορδῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἐπειδὴ δὲ ὁ πολυγωνικὸς τομεὺς ἔχει ὅριον τὸν κυκλικὸν τομέα, ἕπεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενον στερεὸν ἔχει ὅριον τὸ ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τομέως γραφόμενον, τουτέστι τὸν σφαιρικὸν τομέα· ὥστε εἶνε

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τομέως} = \text{ὅρ.}\left\{\frac{1}{3}\alpha.(\text{ἐπιφ.}\ \Gamma Z E\Delta)\right\} =$$

$$= \text{ὅρ.}\left(\frac{1}{3}\alpha\right).\ \text{ὅρ.}\ (\text{ἐπιφ.}\,\Gamma Z E\Delta).$$

Ἀλλ' ὅριον τοῦ ἀποστήματος α εἶνε ἡ ἀκτὶς Α τῆς σφαίρας, ὅριον δὲ τῆς ἐπιφανείας ΓΖΕΔ εἶνε ἡ σφαιρικὴ ζώνη ἡ γραφομένη ὑπὸ τοῦ τόξου ΓΔ· ἄρα

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τομέως} = \frac{1}{3}\,A.(\text{ζών.}\ \Gamma\Delta).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

438. *Ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶνε γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.*

Διότι, ἂν τὸ τόξον ΓΔ αὐξανόμενον καταντήσῃ ἴσον τῇ ἡμιπεριφερείᾳ ΑΓΒ, ὁ μὲν τομεὺς ΓΚΔ γίνεται ἴσος τῷ ἡμικυκλίῳ, ὁ δὲ ὑπ' αὐτοῦ γραφόμενος σφαιρικὸς τομεὺς γίνεται ἴσος τῇ ὅλῃ σφαίρᾳ.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν παρασταθῇ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας διὰ τοῦ Α, ἡ μὲν ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶνε $4\pi A^2$,

ὁ δὲ ὄγκος αὐτῆς θὰ εἶνε $4\pi A^2 . \frac{1}{3} A$, ἢ $\frac{4}{3}\pi A^3$.

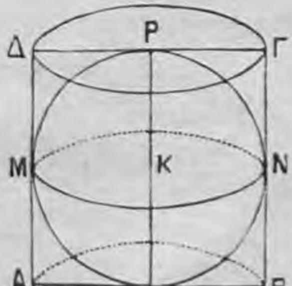
Οἱ ὄγκοι δύο σφαιρῶν Σ καὶ σ εἶνε πρὸς ἀλλήλους ὡς οἱ κύβοι τῶν ἀκτίνων των Α καὶ α. Διότι εἶνε $\Sigma = \frac{4}{3}\pi A^3$ καὶ $\sigma = \frac{4}{3}\pi \alpha^3$,

ἄρα $\frac{\sigma}{\Sigma} = \frac{\alpha^3}{A^3}$. ἡ πρόβλημα 2 § 305

ΘΕΩΡΗΜΑ Σ = 90

439. *Ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἶνε πρὸς τὴν ὅλην ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κυλίνδρου* (ἤτοι συμπεριλαμβανομένων καὶ τῶν βάσεων αὐτοῦ) *ὡς ὁ 2 πρὸς τὸν 3. Τὸν αὐτὸν δὲ λόγον ἔχουσι καὶ οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων στερεῶν.*

Ἔστω ΜΠΝΡ μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας καὶ ΑΒΓΔ τὸ περὶ αὐτὸν περιγεγραμμένον τετράγωνον· ἐὰν στραφῇ τὸ ἡμικύκλιον ΡΝΠ περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ ΠΡ, μετ' αὐτοῦ δὲ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΡΠΒΓ (ὅπερ εἶνε τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ), τὸ μὲν ἡμικύκλιον θὰ γράψῃ τὴν σφαῖραν, τὸ δὲ ὀρθογώνιον θὰ γράψῃ κύλινδρον, ὅστις θὰ εἶνε περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν. ἐγγίζει δὲ τὴν σφαῖραν εἰς ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου ΝΜ καὶ εἰς τὰ σημεῖα Π καὶ Ρ.



Τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου τούτου εἶνε ἡ διάμετρος ΠΡ τῆς σφαίρας,

9 Μαρτίου 1912 ἡμέρα παρασκευή

ἡ δὲ ἀκτὶς ΠΑ τῆς βάσεώς του εἶνε ἴση τῇ ἀκτῖνι Α τῆς σφαίρας· ἑπομένως ἡ μὲν κυρτὴ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶνε $2\pi A.\ 2A$, ἤτοι $4\pi A^2$, αἱ δὲ δύο βάσεις εἶνε $\pi A^2 + \pi A^2$ ἢ $2\pi A^2$· ὅθεν ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶνε $6\pi A^2$· εἶνε δὲ καὶ τῆς σφαίρας ἡ ἐπιφάνεια $4\pi A^2$· ὥστε εἶνε

$$\text{ἐπιφ. σφαίρας} : \text{ἐπιφ. κυλίνδρου} = 4\pi A^2 : 6\pi A^2 = 4 : 6 = 2 : 3.$$

Καὶ οἱ ὄγκοι αὐτῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον· διότι τῆς μὲν σφαίρας ὁ ὄγκος εἶνε $\frac{4}{3}\pi A^3$, τοῦ δὲ κυλίνδρου $\pi A^2.\ 2A$, ἤτοι $2\pi A^3$. ὥστε εἶνε

$$\text{ὄγκ. σφαίρας} : \text{ὄγκ. κυλίνδρου} = \frac{4}{3} : 2 = 4 : 6 = 2 : 3.$$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν νοήσωμεν πολύεδρον περιγεγραμμένον περὶ τὴν σφαῖραν (τουτέστι πολύεδρον, οὗ αἱ ἕδραι ἐφάπτονται πᾶσαι τῆς σφαίρας), τὸ πολύεδρον τοῦτο ἀναλύεται εἰς πυραμίδας ἐχούσας κοινὴν κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ βάσεις τὰς ἕδρας τοῦ πολυέδρου. Τῶν πυραμίδων τούτων ὕψος εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας (418) καὶ ὁ ὄγκος ἑκάστης ἐξ αὐτῶν εἶνε γινόμενον τῆς ἕδρας, ἥτις εἶνε βάσις αὐτῆς, ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας· ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ πολυέδρου εἶνε γινόμενον τῆς ὅλης ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας. Ἀλλὰ καὶ τῆς σφαίρας ὁ ὄγκος εἶνε γινόμενον τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτῖνος. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν δύο τούτων στερεῶν (σφαίρας καὶ περιγεγραμμένου πολυέδρου) ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἐπιφάνειαι αὐτῶν.

ΘΕΩΡΗΜΑ

440. *Ἐὰν κυκλικὸν τμῆμα στραφῇ περὶ διάμετρον μὴ τέμνουσαν αὐτό, γράφει στερεόν, ὅπερ εἶνε ἥμισυ τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει* **ἀκτῖνα** *βάσεως τὴν χορδὴν τοῦ τμήματος, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ταύτης ἐπὶ τὸν ἄξονα τῆς περιστροφῆς.*

Ἔστω κυκλικὸν τμῆμα τὸ ΑΓΒΖΑ· ἂς περιστραφῇ δὲ περὶ τὴν διάμετρον ΔΕ· τὸ στερεόν, ὅπερ γράφει, εἶνε προφανῶς διαφορὰ τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσιν ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΚΑΓΒ καὶ τὸ τρίγωνον ΚΑΒ· ἀλλ' εἶνε

$$\text{σφαιρ. τομεὺς ΚΑΓΒ} = (\text{ζώνη ΑΓΒ}).\ \frac{1}{3}\text{ΚΑ}.$$

καὶ ἐπειδὴ ζώνη ΑΓΒ $= 2\pi.$ ΚΑ.ΠΡ, ἕπεται

$$\text{σφαιρικὸς τομεὺς ΚΑΓΒ} = \frac{2}{3}\pi(\text{ΚΑ})^2\text{ΠΡ}\cdot$$

ἐπίσης εἶνε ὄγκος $ABK = (\text{ἐπιφ. } AB)\dfrac{1}{3}KZ$, (436)

ἤ, ἐπειδὴ ἐπιφ. $AB = 2\pi KZ.\ \Pi P$, (415, σημ. β΄)

ὄγκος $ABK = \dfrac{2}{3}\pi(KZ)^2.\ \Pi P\cdot$

ὅθεν ὄγκος $A\Gamma BZA = \dfrac{2}{3}\pi(KA)^2.\ \Pi P - \dfrac{2}{3}\pi(KZ)^2\Pi P$,

ἢ ὄγκος $A\Gamma BZA = \dfrac{2}{3}\pi.\ \Pi P\ \left\{(KA)^2 - (KZ)^2\right\}$.

$\frac{9}{3}\pi$

$\frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3}$

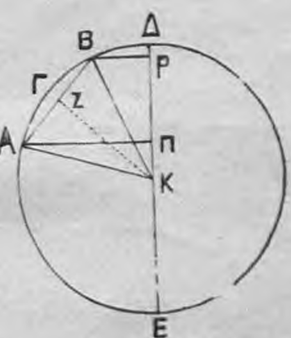
$2/3\pi$

Ἀλλ᾽ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΚΑΖ εὑρίσκομεν

$(KA)^2 - (KZ)^2 = \left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = \dfrac{(AB)^2}{4}\cdot$

ὅθεν ὄγκος $A\Gamma BZA = \dfrac{1}{6}\pi.(AB)^2.\Pi P$.

Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{1}{3}\pi(AB)^2\Pi P$ εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὅστις ἔχει ἀκτῖνα βάσεως τὴν χορδὴν ΑΒ, ὕψος δὲ τὴν προβολὴν αὐτῆς ἐπὶ τὴν ΔΕ, τουτέστι τὴν ΠΡ, συνάγεται, ὅτι τὸ στερεόν, ὅπερ γράφει τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΓΒΖΑ, εἶνε ἥμισυ τοῦ κώνου τούτου



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν τὸ κυκλικὸν τμῆμα αὐξανόμενον καταντήσῃ ἴσον τῷ ἡμικυκλίῳ ΔΓΕ, τὸ ὑπ᾽ αὐτοῦ γραφόμενον στερεὸν καταντᾷ ἴσον τῇ ὅλῃ σφαίρᾳ· τότε δὲ καὶ ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΕ καταντᾷ ἴση τῇ διαμέτρῳ ταύτῃ· ὅθεν ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας εἶνε

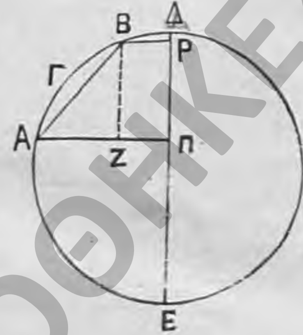
$$\frac{1}{6}\pi(\Delta E)^2\ \Delta E. \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{6}\pi(\Delta E)^3\cdot$$

καὶ ἐπειδὴ $\Delta E = 2.KA$ καὶ $(\Delta E)^3 = 8.\ (KA)^3$, ὁ ὄγκος γίνεται $\dfrac{4}{3}\pi(KA)^3$, ὅπερ καὶ ἐν τοῖς προηγουμένοις εὑρέθη.

ΘΕΩΡΗΜΑ

441. *Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα εἶνε ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο κυλίνδρων, οἵτινες ἔχουσι βάσεις τὰς βάσεις αὐτοῦ καὶ ὕψος τὸ ὕψος αὐτοῦ, αὐξηθὲν κατὰ τὴν σφαῖραν, ἥτις ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος αὐτοῦ.*

Ἔστωσαν ΑΠ καὶ ΒΡ αἱ ἀκτῖνες δύο παραλλήλων κύκλων καθέτων ἐπὶ τὴν διάμετρον ΔΕ.



Τὸ σφαιρικὸν τμῆμα, τὸ ἔχον βάσεις τοὺς κύκλους τούτους, γράφεται ὑπὸ τοῦ μέρους ΑΓΒΡΠΑ τοῦ ἡμικυκλίου ΔΑΑ, ὅταν τοῦτο περιστραφῇ περὶ τὴν διάμετρόν του ΔΕ· εἶνε δὲ προφανῶς ἄθροισμα τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα γράφουσι τὸ τραπέζιον ΑΠΡΒ καὶ τὸ κυκλικὸν τμῆμα ΑΓΒ.

Ἀλλ' ἔχομεν ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

$$\text{ὄγκος ΑΓΒΑ} = \frac{1}{6}\pi(\text{ΑΒ})^2\text{ΠΡ}\cdot$$

Τὸ δὲ ὑπὸ τοῦ τραπεζίου ΑΒΡΠ γραφόμενον στερεὸν εἶνε κόλουρος κῶνος· ὅθεν (412)

$$\text{ὄγκ.ΑΠΡΒ} = \frac{1}{3}\pi\left\{(\text{ΑΠ})^2+(\text{ΒΡ})^2+(\text{ΑΠ}).(\text{ΒΡ})\right\}\cdot\text{ΠΡ}\cdot$$

Ἐκ τούτων ἕπεται

$$\text{ὄγκ. ΑΓΒΡΠ} = \frac{1}{6}\pi\left\{(\text{ΑΒ})^2+2(\text{ΑΠ})^2+2(\text{ΒΡ})^2+2(\text{ΑΠ}).(\text{ΒΡ}).\right\}\text{ΠΡ},$$

ἀλλ' ἂν ἐκ τοῦ Β ἀχθῇ ἡ ΒΖ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΠ, γίνεται ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΖ, ἐξ οὗ εὑρίσκομεν

$$(\text{ΑΒ})^2 = (\text{ΒΖ})^2+(\text{ΑΖ})^2 = (\text{ΠΡ})^2+(\text{ΑΠ}-\text{ΒΡ})^2,$$

ἢ $$(\text{ΑΒ})^2 = (\text{ΠΡ})^2+(\text{ΑΠ})^2+(\text{ΒΡ})^2-2(\text{ΑΠ}).(\text{ΒΡ}).$$

Ἐὰν δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ $(\text{ΑΒ})^2$ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ εὑρεθείσῃ ἐκφράσει τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ΑΓΒΡΠ, εὑρίσκομεν μετὰ τὰς ἀναγωγὰς

$$\text{ὄγκ.ΑΓΒΡΠ} = \frac{1}{6}\pi\left\{(\text{ΠΡ})^2+3(\text{ΑΠ})^2+3(\text{ΒΡ})^2\right\}\text{ΠΡ},$$

ἢ $$\text{ὄγκος ΑΓΒΡΠ} = \frac{1}{6}\pi(\text{ΠΡ})^3+\frac{1}{2}\left\{\pi(\text{ΑΠ})^2+\pi(\text{ΒΡ})^2\right\}\text{ΠΡ}.$$

Ἀλλὰ $\frac{1}{6}\pi(\text{ΠΡ})^3$ παριστᾷ τὸν ὄγκον σφαίρας ἐχούσης διάμετρον τὸ ὕψος ΠΡ τοῦ τμήματος· τὰ δὲ γινόμενα $\pi(\text{ΑΠ})^2.\text{ΠΡ}$ καὶ $\pi.(\text{ΒΡ})^2.\text{ΠΡ}$ παριστῶσι τοὺς ὄγκους δύο κυλίνδρων ἐχόντων βάσεις τὰς τοῦ τμήματος καὶ ὕψος τὸ τοῦ τμήματος ἐξ ὧν συνάγεται τὸ θεώρημα.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ

1) Ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινὸς εἶνε $2^{\pi\chi},6$· πόση εἶνε ἡ ἐπιφάνεια καὶ πόσος ὁ ὄγκος αὐτῆς.

Ἀπ. Ἡ ἐπιφάνεια Ε οἱασδήποτε σφαίρας καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς Σ συνδέονται πρὸς τὴν ἀκτῖνα α διὰ τῶν ἰσοτήτων

$$E=4\pi\alpha^2, \qquad \Sigma=\frac{4}{3}\pi\alpha^3. \qquad (\iota)$$

ἐκ τούτων εὑρίσκομεν θέτοντες $\alpha=2,6$

$$E=4.\pi.2,6\ 2,6=27,04.\pi=84^{\tau\pi},8355\ldots$$

$$\Sigma=\frac{4}{3}\pi.(2,6)^3=73^{\kappa\pi},62\ldots \text{ (διὰ τῶν λογ.)}$$

2) Σφαίρας τινὸς ὁ ὄγκος εἶνε $15^{\kappa\pi},85$· πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς αὐτῆς;

Ἀπ. Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν ἰσοτήτων (ι) λαμβάνομεν, ἐὰν λύσωμεν αὐτὴν πρὸς τὸ α,

$$\alpha=\sqrt[3]{\frac{3\Sigma}{4\pi}}.$$

ὑποθέτοντες δὲ $\Sigma=15,85$ εὑρίσκομεν (διὰ τῶν λογαρίθμων)

$$\alpha=1^{\pi\chi},558\ldots$$

3) Τρίγωνόν τι ἰσόπλευρον στρέφεται περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του ὁλόκληρον περιστροφήν· πόσος εἶνε ὁ ὄγκος τοῦ γεννωμένου στερεοῦ;

Ἀπ. Τὸ περὶ οὗ ὁ λόγος στερεὸν εἶνε ἄθροισμα δύο ἴσων κώνων ἐχόντων ὕψος μὲν τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς μ τοῦ τριγώνου, ἤτοι $\frac{1}{2}\mu$, ἀκτῖνα δὲ τῆς βάσεως τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, ὅπερ εἶνε $\sqrt{\mu^2-\left(\frac{1}{2}\mu\right)^2}$ ἢ $\frac{1}{2}\mu\sqrt{3}$· ἐπομένως ὁ ὄγκος ἑκατέρου τῶν κώνων τούτων εἶνε $\frac{1}{3}\pi.\frac{3}{4}\mu^2.\frac{1}{2}\mu$, ἤτοι $\frac{1}{8}\pi\mu^3$· ἄρα ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε $\frac{1}{4}\pi\mu^3$.

4) Σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶνε $1^{\pi\chi},8$, τέμνεται ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἀπεχόντων ἀπ' ἀλλήλων κατὰ $0^{\pi\chi},2$· πόσον εἶνε τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἥτις περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων;

Ἀπ. Ἡ περὶ ἧς ὁ λόγος ἐπιφάνεια εἶνε ζώνη σφαιρικὴ ἔχουσα ὕψος 0,2· ἄρα τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶνε $2\pi.\ 1,8.\ 0,2$, ἤτοι $\pi.\ 0,72$, τουτέστιν $2^{\tau\pi},26194\ldots$

5) Σφαῖρα, τῆς ὁποίας ἡ ἀκτὶς εἶνε $5^{\pi\chi}$, τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου ἀπέχοντος ἀπὸ τοῦ κέντρου $3^{\pi\chi}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ τὰ

ἐμβαδὰ τῶν δύο ζωνῶν, εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια.

Ἀπ. Ἐμβ. τομῆς$=50^{\tau\pi},2655$... Ἐμβ. τῆς μιᾶς ζών. $62^{\tau\pi},8318$..., τῆς ἄλλης $251^{\tau\pi},3274$ ..

6) Νὰ εὕρωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς (θεωροῦντες αὐτὴν ὡς σφαῖραν).

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς γῆς εἶνε 40000000 πήχεις, ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου τούτου, τουτέστιν ἡ ἀκτὶς τῆς γῆς, εἶνε $40000000 \times \frac{1}{2\pi}$· ἄρα ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶνε

10807560

$$4\pi(40000000)^2 . \frac{1}{4\pi^2} \text{ ἢ } \frac{16}{\pi} . 10^{14}$$

καὶ ἐπειδὴ $\frac{16}{\pi}=5,092958\ldots$ (Dupuis σελ. 133), ἡ ἐπιφάνεια εἶνε τετρ. πήχεις 5092958.10^8, ἢ τετρ. στάδια 509295800 (κατὰ προσέγγισιν 100 τετρ. σταδίων).

7) Ἐὰν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτὶς σφαίρας τινός, ποσαπλασία γίνεται ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς καὶ ποσαπλάσιος ὁ ὄγκος αὐτῆς;

8) Σφαῖρά τις ἔχει ἀκτῖνα $8^{\pi\chi}$· πόση εἶνε ἡ ἀκτὶς τῆς διπλασίας σφαίρας (κατὰ τὸν ὄγκον); (Ἀπ. $8\sqrt[3]{2}$, ἤτοι $10^{\pi\chi},08$. .).

9) Αἱ ἀκτῖνες δύο σφαιρῶν εἶνε τῆς μὲν μιᾶς $12^{\pi\chi}$, τῆς δὲ ἄλλης $9^{\pi\chi}$. Ζητεῖται ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας, ἥτις εἶνε ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἀπ. $\sqrt[3]{12^3+9^3}$, ἤτοι $3\sqrt[3]{91}$, τουτέστι $13^{\pi\chi},494$...

10) Κυκλικόν τι τμῆμα, οὗ ἡ χορδὴ εἶνε δ, στρέφεται περὶ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου παράλληλον τῇ χορδῇ αὐτοῦ· ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος στερεοῦ.

Ἀπ. Κατὰ τὸ θεώρημα 440, ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶνε

$$\frac{1}{6}\pi\delta^2\delta, \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{1}{6}\pi\delta^3,$$

τουτέστιν ὁ ὄγκος τοῦ οὕτω προκύπτοντος στερεοῦ εἶνε ἴσος τῷ ὄγκῳ τῆς σφαίρας, ἥτις ἔχει διάμετρον τὴν χορδὴν δ.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶνε, ὅτι ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου δὲν ὑπάρχει ἐν τῇ παραστάσει τοῦ ὄγκου· ὥστε πάντα τὰ ἴσας χορδὰς ἔχοντα κυκλικὰ τμήματα οἱωνδήποτε κύκλων ὅταν στρέφωνται περὶ διάμετρον παράλληλον τῇ χορδῇ αὐτῶν, γράφουσιν ἰσοδύναμα στερεά.

11) Ἐὰν τόξον κυκλικὸν στραφῇ περὶ διάμετρον διερχομένην δι' ἑνὸς τῶν ἄκρων του, γράφει ζώνην, τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια εἶνε ἴση τῇ ἐπιφανείᾳ κύκλου ἔχοντος ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ τόξου.

12) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους δύο σφαιρῶν ἐκ τῶν δύο ἀκτίνων καὶ ἐκ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων αὐτῶν.

Ὁ ζητούμενος ὄγκος σύγκειται ἐκ δύο σφαιρικῶν τμημάτων ἐχόντων κοινὴν βάσιν τὸν κύκλον, οὗτινος ἡ περιφέρεια εἶνε κοινὴ τομὴ τῶν σφαιρικῶν ἐπιφανειῶν. Ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν κέντρων καὶ αἱ δύο ἀκτῖνες συνιστῶσι τρίγωνον, ἐξ οὗ, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ ἐδ. 211, εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰ ὕψη τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς κοινῆς βάσεως αὐτῶν. Τούτων δὲ εὑρεθέντων εὑρίσκομεν διὰ τοῦ θεωρήματος 441 τὸν ζητούμενον ὄγκον. Ἐὰν λ. χ. αἱ ἀκτῖνες εἶνε 7^{π} καὶ 15^{π} καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων 20^{π}, εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ κοινὸς ὄγκος εἶνε $56^{\kappa\pi}$, 967...

13) Σφαῖρά τις ἐκ χυτοῦ σιδήρου ἔχει βάρος 120 χιλιογράμμων· νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς.

Ἡ ἀκτὶς θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ ὄγκου διὰ τοῦ τύπου (ι)· τὸν δὲ ὄγκον εὑρίσκομεν παρατηροῦντες, ὅτι ἴσος ὄγκος ὕδατος θὰ εἶχε βάρος $\frac{120}{7,2}$ χιλ. (διότι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χυτοῦ σιδήρου εἶνε 7,2)· ἐπειδὴ δὲ 1 χιλιογρ. ὕδατος ἔχει ὄγκον μιᾶς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι $\frac{1}{1000}$ τοῦ κυβ. πήχεως, ἕπεται, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος (ἐπομένως καὶ τοῦ σιδήρου) εἶνε $\frac{1200}{72}\cdot\frac{1}{1000}$ κυβ. πήχεις, ἢ $\frac{12}{720}$ ἢ $\frac{1}{60}$ κυβ. πήχεως.

Εὑρεθέντος τοῦ ὄγκου, εὑρίσκεται καὶ ἡ ἀκτίς· εἶνε δὲ 0^{π}, 158...

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Διὰ τοῦ αὐτοῦ τρόπου δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸν ὄγκον οἱουδήποτε σώματος ἐκ τοῦ βάρους αὐτοῦ, ἂν εἰξεύρωμεν καὶ τὸ εἰδικὸν βάρος αὐτοῦ.

Λύσις 5ου προβλ. στην 285.

ὁ ὄγκος [illegible]
$\frac{1}{3}\pi\upsilon(A^2+Aa+a^2)$ — ὄγκον [illegible] $\frac{1}{3}3\pi a^2\upsilon$. [illegible]
[illegible]
$\frac{1}{3}\pi\upsilon(A^2+Aa+a^2-3a^2)$ ἢ $\frac{1}{3}\pi\upsilon(A^2+Aa-2a^2)$
[illegible]
$\frac{1}{3}\pi\upsilon(A^2-Aa+Aa+Aa-2a^2)$ [illegible]
[illegible] $\frac{1}{3}\pi\upsilon(A^2-Aa+2Aa-2a^2)$
[illegible]
$\frac{1}{3}\pi\upsilon\,A(A-a)+2a(A-a)$ [illegible]
[illegible] $(A-a)$ [illegible]
[illegible] $\frac{1}{3}\pi\upsilon(A-a)\cdot(A+2a)$ ὅ. ἔ. δ.

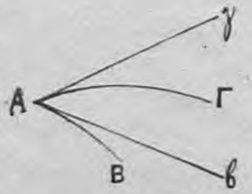
* ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ Ζ΄ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ ΔΥΟ ΤΟΞΩΝ

442. Ἐὰν δύο τόξα τῆς σφαίρας τέμνωνται εἴς τι σημεῖον Α, λέγεται, ὅτι σχηματίζουσι *γωνίαν*. Τὸ σημεῖον Α λέγεται *κορυφὴ* τῆς γωνίας, τὰ δὲ τόξα *πλευραὶ* αὐτῆς.



Μέτρον τῆς γωνίας δύο τόξων λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουσιν αἱ εἰς τὴν κορυφὴν ἐφαπτόμεναι αὐτῶν, λαμβανόμεναι κατὰ τὴν φορὰν τῶν τόξων· ἀντικαθιστᾷ δ' αὐτὴν θεωρουμένην ὡς μέγεθος.

Ἐὰν τὰ τόξα εἶνε μεγίστων κύκλων, ἡ γωνία αὐτῶν καὶ ἡ δίεδρος γωνία τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν ἔχουσι τὸ αὐτὸ μέτρον.

Διότι αἱ ἐφαπτόμεναι Αϐ, Αγ τῶν τόξων ΑΒ, ΑΓ εἰς τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας Α κεῖνται ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων καὶ εἶνε ἀμφότεραι κάθετοι ἐπὶ τὴν κοινὴν διάμετρον ΑΔ τῶν κύκλων τούτων, καθ' ἣν τέμνονται τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν.

Ἡ ὑπὸ τόξων μεγίστων κύκλων σχηματιζομένη γωνία Α ἔχει μέτρον καὶ τὸ μεταξὺ τῶν πλευρῶν αὐτῆς περιλαμβανόμενον τόξον μεγίστου κύκλου ΒΓ, τὸ γραφόμενον μὲ πόλον τὴν κορυφὴν αὐτῆς. Διότι τὸ τόξον τοῦτο ΒΓ μετρεῖ τὴν γωνίαν ΒΚΓ, ἥτις ἰσοῦται τῇ γωνίᾳ βΑγ τῶν ἐφαπτομένων· διότι τὰ τόξα ΑΒ, ΑΓ εἶνε τεταρτημόρια καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι ΑΚΒ, ΑΚΓ εἶνε ὀρθαί· ἄρα ἡ ΚΒ εἶνε παράλληλος τῇ Αβ καὶ ἡ ΚΓ τῇ Αγ.

ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

443. *Σφαιρικὸν πολύγωνον* λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περατούμενον εἰς τόξα μεγίστων κύκλων.

Πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου λέγονται τὰ τόξα, εἰς ἃ περατοῦται· γωνίαι δ' αὐτοῦ, αἱ γωνίαι τῶν αὐτῶν τόξων, καὶ *κορυφαὶ* αὐτοῦ, αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν.

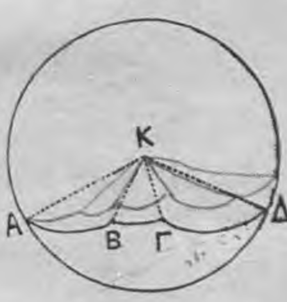
Τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, τὸ ἔχον τρεῖς πλευράς, λέγεται *σφαιρικὸν τρίγωνον*.

Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον λέγεται *ἰσοσκελές*, *ἰσόπλευρον*, *σκαληνὸν* κατὰ τὰς αὐτὰς καὶ τὸ εὐθύγραμμον περιπτώσεις.

Κυρτὸν λέγεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ προσεκβαλλομένη ἀφίνῃ ὁλόκληρον τὸ σχῆμα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ ΚΑΙ ΣΤΕΡΕΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Ἐὰν ἡ κορυφὴ στερεᾶς γωνίας τεθῇ εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, αἱ ἕδραι αὐτῆς θὰ τέμνωσιν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας τόξα μεγίστων κύκλων, οἷον τὰ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, τὰ ὁποῖα σχηματίζουσι σφαιρικὸν πολύγωνον ἀντίστοιχον τῆς στερεᾶς γωνίας. Καὶ ἀντιστρόφως ἐκ σφαιρικοῦ πολυγώνου εὑρίσκομεν τὴν ἀντιστοιχοῦσαν στερεὰν γωνίαν, ἄγοντες ἀκτῖνας εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου, (ὑποτίθεται δέ, ὅτι οὐδεμία πλευρὰ τοῦ δοθέντος σφαιρικοῦ πολυγώνου ὑπερβαίνει τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας).

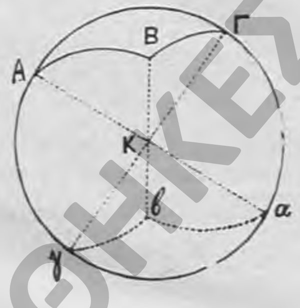


Αἱ πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶνε μέτρα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῆς στερεᾶς γωνίας· αἱ δὲ γωνίαι αὐτοῦ καὶ αἱ δίεδροι γωνίαι τῆς στερεᾶς γωνίας ἔχουσι τὰ αὐτὰ μέτρα.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

444. *Συμμετρικὰ* λέγονται δύο σφαιρικὰ πολύγωνα, ἐὰν αἱ κορυφαὶ αὐτῶν εἶνε συμμετρικαὶ πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας (403)· τουτέστιν ἂν κεῖνται ἀνὰ δύο εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου.

Τοιαῦτα εἶνε τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ. Τῶν συμμετρικῶν πολυγώνων αἱ ἀντίστοιχοι στερεαὶ γωνίαι εἶνε κατὰ κορυφήν. Ἐπειδὴ δὲ αἱ κατὰ κορυφὴν στερεαὶ γωνίαι δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐν γένει, ἕπεται, ὅτι καὶ τὰ συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα δὲν ἐφαρμόζουσιν ἐνγένει (διότι, ὅταν δύο στερεαὶ γωνίαι ἐφαρμόζωσι, καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα πρὸς αὐτὰς πολύγωνα ἐφαρμόζουσι· καὶ τἀνάπαλιν).



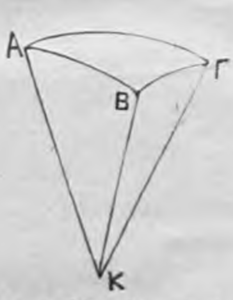
ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ

445. *Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου ἑκάστη πλευρὰ εἶνε μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλητέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν.*

Ἔστω σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ.

Ἵνα δείξωμεν, ὅτι τὸ τόξον ΑΓ εἶνε μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ΑΒ+ΒΓ, ἄγομεν ἐκ τοῦ κέντρου Κ τὰς ἀκτῖνας, ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ καὶ παρατηροῦμεν, ὅτι ἐν τῇ σχηματιζομένῃ στερεᾷ γωνίᾳ, ἡ γωνία ΑΚΓ εἶνε (341) μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ΑΚΒ+ΒΚΓ. ἀλλ' ἡ γωνία, ἥτις εἶνε ἄθροισμα τῶν δύο τούτων γωνιῶν, βαίνει ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τόξων ΑΒ+ΒΓ, καὶ ἐπειδὴ ὑπερβαίνει τὴν γωνίαν ΑΚΓ, ἥτις βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΓ, συνάγεται, ὅτι εἶνε



$$ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ.$$

Τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως ἀποδεικνύεται, ὡς καὶ τὸ ὅμοιον περὶ τῶν εὐθυγράμμων τριγώνων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

446. *Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ πλευραὶ ἔχουσιν ἄθροισμα μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.*

Ἔστω σφαιρικὸν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ καὶ ἀντιστοιχοῦσα πρὸς αὐτὸ στερεὰ γωνία ἡ Κ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ΑΚΒ,ΑΚΓ,ΒΚΓ εἶνε (342) μικρότερον τεσσάρων ὀρθῶν· ἂν λοιπὸν τεθῶσιν αὗται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μεγίστου τινὸς κύκλου ἐφεξῆς ἀλλήλαις καὶ οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαὶ αὐτῶν νὰ πέσωσιν εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, θὰ ἀποτελέσωσι γωνίαν μικροτέραν 4 ὀρθῶν· ἑπομένως τὸ τόξον, ἐφ' οὗ θὰ βαίνῃ αὕτη, ἤτοι τὸ ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ, εἶνε μικρότερον τῆς περιφερείας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

447. Ἐκ τῶν δύο προηγουμένων θεωρημάτων γίνεται φανερόν, ὅτι πᾶσα σχέσις μεταξὺ τῶν ἑδρῶν ἢ τῶν διέδρων γωνιῶν στερεᾶς γωνίας ὑπάρχει καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν ἢ τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ πολυγώνου. Ἐντεῦθεν συνάγεται, ὅτι

1) Παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα μεγαλήτερον μὲν τῶν δύο ὀρθῶν, μικρότερον δὲ τῶν ἓξ (343).

2) Ἑκάστη τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου προσλαβοῦσα δύο ὀρθὰς γίνεται μεγαλητέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

3) Ἐκ τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶνε μικρότερον περιφερείας καὶ ὧν ἕκαστον εἶνε μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, δύναται νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον.

Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία (344) ἔχουσα ἐπιπέδους γωνίας τὰς ὑπὸ τῶν τόξων τούτων μετρουμένας· τὸ πρὸς αὐτὴν ἀντιστοιχοῦν σφαιρικὸν τρίγωνον εἶνε τὸ ζητούμενον.

4) Δοθεισῶν τριῶν γωνιῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶνε μεγαλήτερον μὲν τῶν δύο ὀρθῶν, μικρότερον δὲ τῶν ἕξ, καὶ ὧν ἑκάστη προσλαβοῦσα δύο ὀρθὰς ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων, δύναται νὰ κατασκευασθῇ σφαιρικὸν τρίγωνον ἔχον τὰς γωνίας ταύτας.

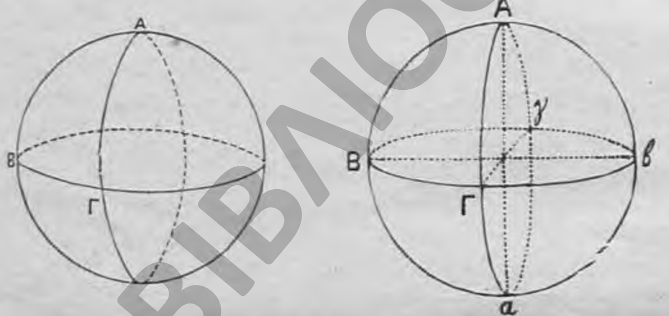
Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ στερεὰ γωνία ἔχουσα διέδρους γωνίας ἴσας πρὸς τὰς δεδομένας (345).

Ἐπειδὴ ἐν τοῖς σφαιρικοῖς τριγώνοις τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ 2 καὶ 6 ὀρθῶν, ἕπεται, ὅτι δύναται σφαιρικὸν τρίγωνον νὰ ἔχῃ καὶ δύο, καὶ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας, ἢ καὶ δύο ἢ καὶ τρεῖς ἀμβλείας.

ΟΡΙΣΜΟΙ

448. Τὸ ἔχον δύο ὀρθὰς γωνίας τρίγωνον, ὡς τὸ ΑΒΓ, λέγεται *δισορθογώνιον*. Ἡ κορυφὴ Α εἶνε πόλος τῆς βάσεως ΒΓ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΒ, ΑΓ εἶνε τεταρτημόρια μεγίστου κύκλου (336).

Τρισορθογώνιον λέγεται τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον, ἐὰν ἔχῃ καὶ τὰς τρεῖς του γωνίας ὀρθάς. Τοῦ τοιούτου τριγώνου αἱ πλευραὶ εἶνε τεταρτημόρια τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου.



ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Ἐὰν διὰ τοῦ κέντρου ἀχθῶσι τρία ἐπίπεδα κάθετα πρὸς ἄλληλα ἀνὰ δύο, ὡς τὰ ΑΓ αγ, ΒΑ βα, ΓΒγβ, διαιροῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς 8 τρισορθογώνια σφαιρικὰ τρίγωνα.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΤΗΣ ΑΥΤΗΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

449. Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα εἶνε ἴσα, καὶ αἱ πρὸς αὐτὰ ἀντιστοιχοῦσαι στερεαὶ γωνίαι εἶνε ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν δύο στερεαὶ γωνίαι εἶνε ἴσαι, καὶ τὰ ἀντιστοιχοῦντα σφαιρικὰ τρίγωνα εἶνε ἴσα. Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ἡ ἰσότης τῶν σφαιρικῶν τριγώνων τῆς αὐτῆς σφαίρας ἀνάγεται εἰς τὴν ἰσότητα στερεῶν τριέδρων γωνιῶν, καὶ πρὸς ἕκαστον τῶν θεωρημάτων τῶν περὶ τῆς ἰσότητος τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀποδειχθέντων ἀντιστοιχεῖ ἓν θεώρημα περὶ τῆς ἰσότητος τῶν σφαιρικῶν τριγώνων. Τοιαῦτα εἶνε τὰ ἑπόμενα.

1) *Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν*

ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα.

Διότι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι στερεαὶ γωνίαι ἔχουσι δύο ἕδρας ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην δίεδρον γωνίαν ἴσην· ἐπομένως (346) ἔχουσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα.

2) Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας ἴσας, τὰ τρίγωνα ταῦτα ἔχουσι πάντα τὰ στοιχεῖα αὐτῶν ἴσα.

3) Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς τρεῖς των πλευρᾶς ἴσας κατὰ μίαν, ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας των ἴσας (τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν).

4) Ἐὰν δύο σφαιρικὰ τρίγωνα ἔχωσι τὰς γωνίας των ἴσας κατὰ μίαν, ἔχουσι καὶ τὰς πλευράς των ἴσας (τὰς ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν).

ΘΕΩΡΗΜΑ

450. *Παντὸς ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν γωνίαι εἶνε ἴσαι.*

Ἔστω ἐν τῷ σφαιρικῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ἡ ΑΒ ἴση τῇ ΑΓ· λέγω, ὅτι καὶ ἡ γωνία Γ εἶνε ἴση τῇ Β.

Ἂς ἀχθῇ ἐκ τῆς κορυφῆς Α εἰς τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως τόξον μεγίστου κύκλου τὸ ΑΔ. Τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουσι τὰς πλευράς των ἴσας κατὰ μίαν· ἄρα ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας των ἴσας· ὅθεν ἕπεται Β=Γ.

Ἐπειδὴ προσέτι αἱ περὶ τὸ Δ δύο γωνίαι εἶνε ἴσαι, ἕπεται, ὅτι *τὸ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεως αὐτοῦ ἀγόμενον τόξον μεγίστου κύκλου εἶνε κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν καὶ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς.*

Παρατήρησις. Τὸ συμμετρικὸν τρίγωνον ἰσοσκελοῦς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶνε ἴσον αὐτῷ. Διότι ἡ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσα στερεὰ γωνία ἔχει δύο διέδρους γωνίας ἴσας· ἐπομένως ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς αὐτῇ (338).

ΘΕΩΡΗΜΑ

451. *Ἐὰν δύο γωνίαι σφαιρικοῦ τριγώνου εἶνε ἴσαι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ θὰ εἶνε ἴσαι· τουτέστι τὸ τρίγωνον θὰ εἶνε ἰσοσκελές.*

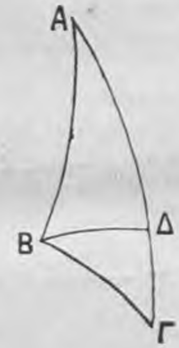
Διότι, ἂν ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ ὑποτεθῇ Β=Γ, ἡ ἀντιστοιχοῦσα στερεὰ γωνία ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς αὐτῇ, ὡς ἔχουσα δύο διέδρους γωνίας ἴσας· ἄρα καὶ τὸ συμμετρικὸν τρίγωνον αβγ τοῦ ΑΒΓ ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτοῦ· τότε δὲ ἡ ΑΒ ἐφαρμόζει ἐπὶ τῆς αγ, ἥτις εἶνε ἴση τῇ ΑΓ· ἄρα εἶνε ΑΒ=ΑΓ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

452. *Ἐὰν σφαιρικοῦ τριγώνου δύο γωνίαι εἶνε ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν πλευραὶ εἶνε ἄνισοι, ἡ μεγαλητέρα πλευρὰ ἀπέναντι τῆς μεγαλητέρας γωνίας.*

Ἔστω ἐν τῷ τριγώνῳ ΑΒΓ Γ<Β.

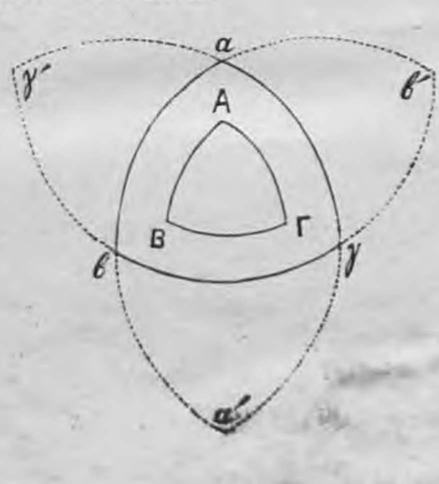
Ἂς ἀχθῇ ἐκ τοῦ Β τόξον μεγίστου κύκλου, τὸ ΒΔ, σχηματίζον τὴν γωνίαν ΓΒΔ ἴσην τῇ Γ· τότε θὰ εἶνε καὶ ΒΔ=ΔΓ· ἀλλ' ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ εὑρίσκομεν ΑΒ<ΑΔ+ΔΒ.
καὶ ἀντικαθιστῶντες τὴν ΔΒ διὰ τῆς ἴσης ΔΓ εὑρίσκομεν ΑΒ<ΑΔ+ΔΓ, ἤτοι ΑΒ<ΑΓ.



Καὶ τὸ ἀντίστροφον τούτου θεώρημα ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

ΠΕΡΙ ΠΟΛΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

453. Ἐὰν ἐκ τῶν κορυφῶν σφαιρικοῦ τριγώνου ὡς πόλων γραφῶσι τόξα μεγίστων κύκλων, τὸ ὑπὸ τῶν τόξων τούτων σχηματιζόμενον τρίγωνον λέγεται *πολικὸν* τοῦ πρώτου.



Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ πολικὸν εἶνε τὸ αβγ· ἡ κορυφὴ Α εἶνε πόλος τοῦ τόξου βγ· ἡ Β τοῦ αγ καὶ ἡ Γ τοῦ αβ.

Τῆς κορυφῆς Α ἡ ὁμόλογος

κορυφὴ α ἐν τῷ πολικῷ τριγώνῳ προσδιορίζεται ὡς τομὴ τῶν δύο τόξων, τὰ ὁποῖα γράφονται ἐκ τῶν ἄλλων δύο κορυφῶν ὡς πόλων· τὰ τόξα ταῦτα τέμνονται μὲν εἰς δύο σημεῖα α καὶ α΄, ἀλλ᾽ ἐκ τούτων λαμβάνομεν μόνον τὸ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΒΓ κείμενον, πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ κορυφὴ Α· ὁμοίως προσδιορίζομεν καὶ τῶν ἄλλων κορυφῶν Β, Γ τὰς ὁμολόγους β, γ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

454. *Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχῃ πολικὸν τὸ αβγ, καὶ τἀνάπαλιν, τὸ τρίγωνον αβγ θὰ ἔχῃ πολικὸν τὸ ΑΒΓ.*

Ἐπειδὴ τὸ Α εἶνε πόλος τοῦ τόξου βγ, τὸ τόξον μεγίστου κύκλου Αβ εἶνε τεταρτημόριον· ἐπειδὴ δὲ προσέτι τὸ Γ εἶνε πόλος τοῦ τόξου αβ, τὸ τόξον μεγίστου κύκλου Γβ εἶνε τεταρτημόριον· ὥστε τὰ ἀπὸ τοῦ β ἀγόμενα τόξα μεγίστου κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Γ εἶνε τεταρτημόρια· ἄρα (426) τὸ β εἶνε πόλος τοῦ τόξου ΑΓ· ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι τὸ γ εἶνε πόλος τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τὸ α πόλος τοῦ ΒΓ.

Κεῖνται δὲ αἱ ὁμόλογοι κορυφαὶ β, Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς πλευρᾶς ΑΓ. ὁμοίως καὶ αἱ ἄλλαι· ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶνε τὸ πολικὸν τοῦ αβγ.

ΘΕΩΡΗΜΑ

455. *Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶνε πολικὰ ἀλλήλων, ἑκάστη γωνία τοῦ ἑτέρου ἐξ αὐτῶν καὶ ἡ πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρὰν τοῦ ἄλλου ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία ἀποτελοῦσι δύο ὀρθάς, ἤτοι εἶνε παραπληρωματικαί.*

Ἔστωσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ πολικὰ ἀλλήλων· λέγω, ὅτι ἡ γωνία Α καὶ ἡ πρὸς τὸ τόξον βγ ἀντιστοιχοῦσα ἐπίκεντρος γωνία εἶνε παραπληρωματικαί.

Ἂς προσεκβληθῶσιν αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ, μέχρις οὗ συναντήσωσι τὴν βγ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε.

Ἡ γωνία Α ἔχει μέτρον (442) τὸ τόξον ΔΕ· ἀλλὰ τὸ τόξον βΕ εἶνε τεταρτημόριον· διότι τὸ β εἶνε πόλος τοῦ τόξου ΑΓ· ὁμοίως τὸ τόξον γΔ εἶνε τεταρτημόριον· διότι τὸ γ εἶνε πόλος τοῦ ΑΒ. Ἄρα εἶνε

$$βΕ+γΔ=\text{ἡμιπεριφερείᾳ}·$$

ἀλλὰ $βΕ+γΔ=βΕ+ΔΕ+Εγ=βγ+ΔΕ$·

ὥστε $βγ+ΔΕ=$ ἡμιπεριφερείᾳ.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ τόξον ΔΕ μετρεῖ τὴν γωνίαν Α, τὸ δὲ τόξον βγ τὴν πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦσαν ἐπίκεντρον, ἕπεται, ὅτι αἱ δύο εἰρημέναι γωνίαι εἶνε παραπληρωματικαί.

Ὁμοίως δεικνύεται τὸ αὐτὸ καὶ περὶ τῶν ἄλλων γωνιῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

456. Αἱ εἰς δύο πολικὰ τρίγωνα ἀντιστοιχοῦσαι τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι εἶνε παραπληρωματικαὶ (340).

Καὶ τῷ ὄντι τὸ α εἶνε πόλος τοῦ τόξου ΒΓ· ἄρα ἡ ἀκτὶς Κα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΒΓ, κεῖται δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ, πρὸς ὃ κεῖται καὶ ἡ ΚΑ. Ὁμοίως ἡ Κβ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΑΓ, καὶ ἡ Κγ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ΑΒ· ὥστε αἱ δύο στερεαὶ γωνίαι Καβγ καὶ ΚΑΒΓ εἶνε παραπληρωματικαί· καὶ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα εὑρίσκονται ἀμέσως ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφίου (340).

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΜΒΑΔΟΥ ΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

457. *Ἄτρακτος* λέγεται μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας περιλαμβανόμενον μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων.

Σφαιρικὸς δὲ *ὄνυξ* λέγεται τὸ μεταξὺ τῶν αὐτῶν ἡμικυκλίων περιεχόμενον μέρος τῆς σφαίρας.

Βάσις τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος λέγεται ὁ ἄτρακτος, τὸν ὁποῖον περιλαμβάνουσι τὰ αὐτὰ ἡμικύκλια.

Ὁ σφαιρικὸς ἄτρακτος καὶ ὁ σφαιρικὸς ὄνυξ λέγονται ἐκ τῆς γωνίας τῶν ἡμικυκλίων, ὑφ' ὧν περιέχονται, *ὀρθογώνιοι*, ἢ *ὀξυγώνιοι*, ἢ *ἀμβλυγώνιοι*.

Σφαιρικὴ δὲ *πυραμὶς* λέγεται μέρος τῆς σφαίρας περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων στερεᾶς γωνίας, ἐχούσης τὴν κορυφὴν εἰς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας. *Βάσις* τῆς σφαιρικῆς πυραμίδος λέγεται τὸ σφαιρικὸν πολύγωνον, τὸ ὑπὸ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων ὁριζόμενον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

458. *Δύο ἄτρακτοι εἶνε πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ γωνίαι των, ἢ ὡς τὰ τόξα τὰ μετροῦντα τὰς γωνίας των.*

Διότι, διπλασιαζομένης τῆς γωνίας τῶν ἡμικυκλίων, διπλασιάζεται προδήλως καὶ ὁ ἄτρακτος, καὶ τριπλασιαζομένης τριπλασιάζεται· καὶ τὸ αὐτὸ συμβαίνει διὰ πάντα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἐξ οὗ συνάγεται (224) ἡ πρότασις.

Ἔστω Α ὁ τυχὼν ἄτρακτος καὶ Γ ἡ γωνία αὐτοῦ, Α΄ ὁ ἄτρακτος, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶνε ὀρθή· τότε θὰ εἶνε Α: Α΄=Γ: 1.

Ἐὰν λοιπὸν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν ὁ ὀρθογώνιος ἄτρακτος Α΄, θὰ εἶνε

Α: 1=Γ: 1, ἤτοι Α=Γ,

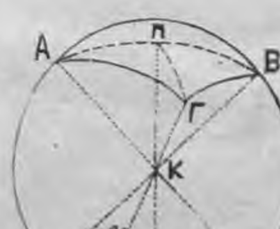
τουτέστι θὰ ἔχῃ μέτρον ὁ τυχὼν ἄτρακτος τὴν γωνίαν αὐτοῦ Γ (τουτέστι τὸν ἀριθμόν, ὅστις ἐκφράζει, ἐκ πόσων ὀρθῶν καὶ ἐκ πόσων μερῶν τῆς ὀρθῆς σύγκειται ἡ Γ).

Ἀλλ' ἂν ληφθῇ ὡς μονὰς τὸ ἥμισυ τοῦ εἰρημένου ἀτράκτου Α΄, τουτέστι τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, ὁ ἄτρακτος Α΄ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2, καὶ ἐκ τῆς προηγουμένης ἀναλογίας προκύπτει τότε Α=2Γ· ἤτοι μέτρον παντὸς ἀτράκτου εἶνε τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας του.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Τὰ περὶ τῶν ἀτράκτων εἰρημένα ἐφαρμόζονται ἀπαράλλακτα καὶ ἐπὶ τῶν σφαιρικῶν ὀνύχων καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως· ὥστε παντὸς σφαιρικοῦ ὄνυχος μέτρον εἶνε τὸ διπλάσιον τῆς γωνίας του, ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ὄγκων ἡ σφαιρικὴ πυραμὶς ἡ ἔχουσα βάσιν τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον.

ΘΕΩΡΗΜΑ

459 *Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶνε ἰσοδύναμα.*



Ἔστωσαν συμμετρικὰ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ. Διὰ τῶν τριῶν σημείων Α, Β, Γ διέρχεται μικρός τις κύκλος τῆς σφαίρας, τοῦ ὁποίου πόλοι ἔστωσαν τὰ σημεῖα Π καὶ Π΄. Ἐὰν ἐκ τοῦ Π ἀχθῶσι τόξα μεγίστων κύκλων εἰς τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ΠΑ, ΠΒ, ΠΓ, τὰ τόξα ταῦτα θὰ εἶνε ἴσα (425)· ἐὰν δὲ ἐκ τοῦ Π΄ ἀχθῶσι τὰ τόξα μεγίστων κύκλων Π΄α, Π΄β, Π΄γ, καὶ ταῦτα θὰ εἶνε ἴσα· διότι τὰ ΠΑ καὶ Π΄α μετροῦσι τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ΠΚΑ καὶ Π΄Κα· ἄρα εἶνε ἴσα· ὁμοίως εἶνε ΠΒ=Π΄β καὶ ΠΓ=Π΄γ· ὅθεν συνάγεται Π΄α΄=Π΄β=Π΄γ.

Τούτων τεθέντων, τὰ τρίγωνα ΑΠΓ καὶ αΠ΄γ ἔχουσι τὰς πλευρὰς των ἴσας κατὰ μίαν, εἶνε δὲ καὶ ἰσοσκελῆ· ἄρα ἐφαρμόζουσιν (450). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ τρίγωνον ΠΒΓ ἴσον τῷ Π΄βγ· καὶ τὸ τρίγωνον ΠΑΒ ἴσον τῷ Π΄αβ. Τὰ δύο λοιπὸν συμμετρικὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ ἐφαρμόζουσιν, ὅταν διαιρεθῶσιν εἰς μέρη· ἄρα εἶνε ἰσοδύναμα.

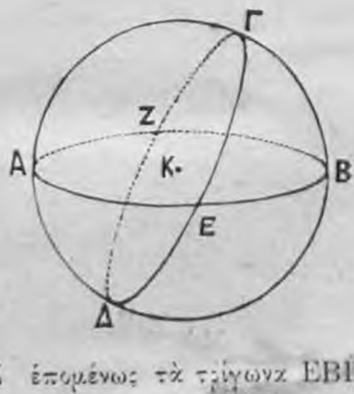
Ἐν τῇ ἀποδείξει ὑπετέθη, ὅτι ὁ πόλος Π εὑρίσκεται ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ· ἂν ἔκειτο ἐκτὸς αὐτοῦ, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θὰ ἦτο ἄθροισμα δύο ἐκ τῶν τριγώνων ΠΑΒ, ΠΒΓ, ΠΓΑ, ἠλαττωμένον κατὰ τὸ ἄλλο. Ἀλλὰ τὸ αὐτὸ θὰ συνέβαινε καὶ εἰς τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ αβγ καὶ πάλιν θὰ ἦσαν ἰσοδύναμα.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται καὶ ἡ πρότασις: *Δύο τριγωνικαὶ σφαιρικαὶ πυραμίδες, ἐὰν ἔχωσι βάσεις συμμετρικὰς εἶνε ἰσοδύναμοι.*

ΘΕΩΡΗΜΑ

460. *Ἐὰν τρεῖς μέγιστοι κύκλοι τέμνωνται ὁπωσδήποτε ἐν τῇ σφαίρᾳ, διαιροῦντες τὴν ἐπιφάνειαν αὐτῆς εἰς τρίγωνα, τὸ ἄθροισμα δύο τριγώνων κατὰ κορυφὴν* (ἤτοι μόνον μίαν κορυφὴν ἐχόντων, κοινὴν) *ἰσοῦται τῷ ἀτράκτῳ, ὅστις ἔχει τὴν γωνίαν τῆς κοινῆς κορυφῆς*

Ἔστωσαν τρεῖς τυχόντες μέγιστοι κύκλοι, οἱ ΑΓΒΔ, ΑΕΒΖ,ΓΕΔΖ, τέμνοντες τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας εἰς τὰ ὀκτὼ τρίγωνα ΑΔΕ, ΕΒΓ κτλ, λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα δύο ἐκ τούτων κατὰ κορυφὴν κειμένων, ὡς τῶν ΑΔΕ, ΕΒΓ,εἶνε ἴσον τῷ ἀτράκτῳ, ὅστις ἔχει τὴν γωνίαν Ε.



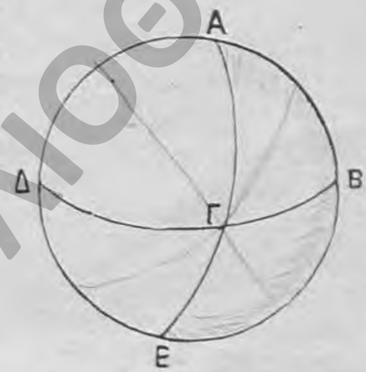
Διότι τὰ τρία ἐπίπεδα τῶν τριῶν μεγίστων κύκλων τέμνονται ἀνὰ δύο κατὰ τὰς διαμέτρους ΑΚΒ, ΓΚΔ, ΕΚΖ ἐπομένως τὰ τρίγωνα ΕΒΓ καὶ ΖΑΔ εἶνε συμμετρικὰ καὶ διὰ τοῦτο ἰσοδύναμα· ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κατὰ κορυφὴν τριγώνων ΑΕΔ+ΕΒΓ εἶνε ἰσοδύναμον τῷ ΑΕΔ+ΖΑΔ, ὅπερ εἶνε ὁ ἄτρακτος ΕΑΖΕΔ ὁ ἔχων τὴν γωνίαν Ε.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγωνικῶν σφαιρικῶν πυραμίδων, τῶν ὁποίων βάσεις εἶνε τὰ κατὰ κορυφὴν τρίγωνα ΕΑΔ, ΕΒΓ, ἰσοῦται τῷ σφαιρικῷ ὄνυχι, οὗτινος γωνία εἶνε ἡ Ε.

ΘΕΩΡΗΜΑ

461. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς σφαιρικοῦ τριγώνου, ὅταν ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν ληφθῇ τὸ τρισορθογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον, εἶνε ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν του ὑπὲρ τὰς δύο ὀρθάς.*

Ἔστω τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον ΑΒΓ· ἐὰν συμπληρωθῇ ὁ μέγιστος κύκλος ΑΒΕΔΑ καὶ προσεκβληθῶσι τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΒΓ πέραν τοῦ Γ, μέχρις οὗ συναντήσωσιν αὐτὸν κατὰ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, θὰ εἶνε:



ΑΒΓ+ΓΒΕ=ἀτράκτῳ Α,

ΑΒΓ+ΑΓΔ=ἀτράκτῳ Β,

καὶ ΑΒΓ+ΓΔΕ=ἀτράκτῳ Γ,

κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα.

Προσθέτοντες δὲ τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη καὶ παρατηροῦντες, ὅτι τὰ ἓξ τρίγωνα, ἐξ ὧν σύγκεινται τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἰσοτήτων, ἀποτελοῦσι τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου καὶ δὶς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εὑρίσκομεν

2.ΑΒΓ+ἐπιφανείᾳ ἡμισφαιρίου =ἀτρ.Α+ἀτρ.Β+ἀτρ.Γ.

καὶ ἐπειδὴ μέτρον τοῦ ἀτράκτου Α εἶνε τὸ 2Α, τοῦ δὲ Β, τὸ 2Β καὶ τοῦ Γ τὸ 2Γ, τοῦ δὲ ἡμισφαιρίου τὸ 4 (διότι ἡ ὅλη ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἀποτελεῖται ἐξ ὀκτὼ τρισορθογωνίων τριγώνων), ἡ ἰσότης αὕτη γίνεται

$$2.ΑΒΓ+4=2Α+2Β+2Γ,$$

ἐξ ἧς

$$ΑΒΓ=Α+Β+Γ-2.$$

Ἂν παραδείγματος χάριν ὑποτεθῇ

$$Α=\frac{3}{4} \text{ τῆς ὀρθῆς, } Β=\frac{4}{5} \text{ ὀρθῆς, καὶ } Γ=\frac{5}{6} \text{ ὀρθῆς,}$$

$$\text{θὰ εἶνε } Α+Β+Γ-2=\frac{23}{60}.$$

ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τὰς γωνίας ταύτας ἔχοντος σφαιρικοῦ τριγώνου θὰ εἶνε τὰ $\frac{23}{60}$ τῆς ἐπιφανείας τοῦ τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου, ἤτοι τὰ $\frac{23}{480}$ τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Θὰ εὑρεθῇ δὲ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, ἂν εἶνε γνωστὴ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, ἤτοι, ἂν εἶνε γνωστὴ ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας.

Ἂν π. χ. ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας εἶνε 2 μέτρα, ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς θὰ εἶνε τετρ. μέτρα 16π· ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περὶ οὗ ὁ λόγος σφαιρικοῦ τριγώνου θὰ εἶνε $16\pi.\frac{23}{480}$, ἤτοι $\frac{23\pi}{30}$, ἤτοι $2^{\tau\mu}$,4085.

Οἱ ἀριθμοὶ Α,Β,Γ, οἱ τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου ἐκφράζοντες ἐν τῇ ἰσότητι (ι), πρέπει νὰ ἔχωσι μονάδα τὴν ὀρθὴν γωνίαν. Ἂν λοιπὸν δοθῶσιν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου εἰς μοίρας καὶ πρῶτα λεπτὰ κτλ., ἀνάγομεν αὐτὰς εἰς τὴν ὀρθήν, παρατηροῦντες, ὅτι 1^0 εἶνε $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς, καὶ 1′ εἶνε $\frac{1}{60}$ τῆς μοίρας ἢ $\frac{1}{5400}$ τῆς ὀρθῆς καὶ 1″ εἶνε $\frac{1}{60}$ τοῦ 1′, ἤτοι $\frac{1}{324000}$ τῆς ὀρθῆς. Ἐὰν λόγου χάριν δοθῇ

$$A=69^0,\ B=94^0,\ \Gamma=83^0,15',$$

θὰ εἶνε $A=\frac{69}{90},\quad B=\frac{94}{90},\quad \Gamma=\frac{83}{90}+\frac{15}{5400}.$

ΠΟΡΙΣΜΑ

462. *Τὸ ἐμβαδὸν παντὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου εἶνε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του μεῖον τοσάκις δύο ὀρθαί, ὅσαι εἶνε αἱ πλευραί του πλὴν δύο*

ἤ, ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν του ὑπὲρ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὁμωνύμου ἐπιπέδου πολυγώνου.

Τοῦτο δεικνύομεν διαιροῦντες τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα ὡς εἰς τὴν πρότασιν (75).

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς σφαιρικῆς πυραμίδος, *ὅταν ὡς μονὰς τῶν ὄγκων ληφθῇ ἡ τρισορθογώνιος σφαιρικὴ πυραμίς, τουτέστι τὸ* $\frac{1}{8}$ *τῆς σφαίρας, εἶνε* ἡ ὑπεροχὴ τοῦ ἀθροίσματος τῶν γωνιῶν τῆς βάσεώς της ὑπὲρ τὰς δύο ὀρθάς.

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΑΣΚΗΣΙΝ

Α΄) ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΙΝ

1) Ἐὰν ἐκ τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας εὐθεῖα τέμνουσα ἐπίπεδον σχηματίζει πρὸς τὰς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένας εὐθείας, εἶνε τρεῖς ἴσαι, ἡ εὐθεῖα εἶνε κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

2) Πᾶσα εὐθεῖα πλαγία πρὸς ἐπίπεδον εἶνε κάθετος ἐπί τινα εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου κειμένην καὶ διερχομένην διὰ τοῦ ποδός της, μία δὲ καὶ μόνη τοιαύτη εὐθεῖα ὑπάρχει.

3) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶνε κάθετα πρὸς ἄλληλα, ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ τυχὸν ἐπίπεδον θὰ εἶνε κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

4) Ἐὰν εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον εἶνε κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλα πρὸς ἄλληλα.

5) Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶνε παράλληλα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ, ἡ τομὴ αὐτῶν, ἐὰν τέμνωνται, θὰ εἶνε παράλληλος τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ.

6) Αἱ προβολαὶ δύο παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶνε παράλληλοι.

7) Ἐὰν τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία τμηθῇ ὑπὸ τοῦ τυχόντος ἐπιπέδου, τὸ σημεῖον, ἔνθα τέμνονται τὰ ὕψη τοῦ προκύπτοντος τριγώνου εἶνε ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου.

8) Ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶνε ὀρθὴ γωνία, ὅταν μία τῶν πλευρῶν αὐτῆς εἶνε παράλληλος τῷ ἐπιπέδῳ, καὶ τότε μόνον.

9) Ἐὰν στερεᾶς τριέδρου γωνίας δύο ἕδραι εἶνε ἴσαι, καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι γωνίαι θὰ εἶνε ἴσαι· καὶ ἀντιστρόφως.

10) Τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα δι' ἑκάστης τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας καὶ διὰ τῆς διχοτομούσης τὴν ἀπέναντι αὐτῆς ἕδραν διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας· (ἐφαρμογὴ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα).

11) Ἐὰν διὰ τῶν διχοτομουσῶν τὰς ἕδρας τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀχθῶσιν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰς ἕδρας, τὰ ἐπίπεδα ταῦτα διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας· (ἐφαρμογὴ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα).

12) Τὰ ἐκ τῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀγόμενα ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας· (ἐφαρμογὴ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα).

13) Τὰ ἐπίπεδα τὰ διχοτομοῦντα τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας πάσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας διέρχονται διὰ μιᾶς εὐθείας· (ἐφαρμογὴ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα).

14) Τὰ ἓξ ἐπίπεδα, τὰ ἐκ τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν τοῦ τυχόντος τετραέδρου ἀγόμενα κάθετα ἐπ' αὐτάς, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον (κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας).

15) Αἱ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου συνδέουσαι εὐθεῖαι διέρχονται δι' ἑνὸς σημείου, ὅπερ εἶνε τὸ κοινὸν μέσον αὐτῶν.

16) Εἰς πᾶν τετράεδρον αἱ ἐξ ἑκάστης κορυφῆς ἀγόμεναι εὐθεῖαι εἰς τὸ σημεῖον, ἔνθα τέμνονται αἱ διάμεσοι τῆς ἀπέναντι ἕδρας, τέμνουσιν ἀλλήλας εἰς ἓν σημεῖον.

17) Πάντα τὰ ἐπίπεδα, τὰ ἐφαπτόμενα δύο σφαιρῶν καὶ ἔχοντα αὐτὰς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῶν, τέμνονται εἰς ἓν σημεῖον τῆς διὰ τῶν κέντρων διερχομένης εὐθείας· ὡσαύτως καὶ πάντα τὰ ἐφαπτόμενα αὐτῶν ἐπίπεδα, ἀφίνοντα δ' αὐτὰς πρὸς μέρη διάφορα.

18) Ἐὰν εἰς τὸ τεταρτημόριον τοῦ τυχόντος κύκλου ἀχθῇ ἡ χορδὴ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, τὰ σχηματιζόμενα τρία χωρία, ἤτοι τὸ τρίγωνον, τὸ κυκλικὸν τμῆμα καὶ τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου κείμενον μικτόγραμμον τρίγωνον, γράφουσιν ἰσοδύναμα στερεά, ὅταν στραφῶσι περὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἀκτίνων τοῦ τεταρτημορίου.

Β´) ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ ΠΡΟΣ ΕΥΡΕΣΙΝ

Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος

1) Τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τριῶν δοθέντων σημείων,

2) Τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

3) Τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἐξ ἴσου ἀπὸ τῶν τριῶν ἑδρῶν ἢ ἀπὸ τῶν τριῶν ἀκμῶν τριέδρου στερεᾶς γωνίας.

4) Τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἵτινες ἄγονται ἐκ σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ δοθέντος ἐπιπέδου ἐπὶ τὰς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὰς δι' ἑνὸς σημείου διερχομένας.

5) Τῶν κέντρων τῶν κύκλων, καθ' οὓς δοθεῖσα σφαῖρα τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδων δι' ἑνὸς σημείου ἢ διὰ μιᾶς εὐθείας διερχομένων.

Γ´) ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΙΣ ΛΥΣΙΝ

1) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

2) Νὰ ἀχθῇ παράλληλος τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας μὴ κειμένας ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

3) Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα τετράεδρος στερεὰ γωνία οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶνε παραλληλόγραμμον.

4) Νὰ γραφῇ σφαῖρα, ἧς ἡ ἐπιφάνεια νὰ διέρχηται διὰ τεσσάρων δοθέντων σημείων μὴ κειμένων ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ.

5) Νὰ ἐγγραφῇ σφαῖρα εἰς τὸ δοθὲν τετράεδρον.

6) Νὰ ἐγγραφῇ σφαῖρα μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

7) Ἐκ τοῦ δοθέντος σημείου νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον δύο δοθεισῶν σφαιρῶν.

8) Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τριῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

9) Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας στερεᾶς γωνίας νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος ἀπὸ σημείου εἰς ἄλλο.

Τὰ ἑπόμενα προβλήματα ἂς λυθῶσιν ἀλγεβρικῶς.

1) Εἰς τὸν δοθέντα κῶνον νὰ ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἴσην τῷ δοθέντι τετραγώνῳ.

2) Τίς ἐκ τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κῶνον ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων ἔχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν;

3) Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ ἐγγραφῇ κύλινδρος ἔχων ὄγκον δοθέντα.

Τίς ἐκ τῶν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν ἐγγεγραμμένων κυλίνδρων ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;

4) Νὰ τμηθῇ ἡ δοθεῖσα σφαῖρα δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε τὸ ἀποτεμνόμενον μικρότερον ἡμισφαιρίου τμῆμα νὰ εἶνε ἰσοδύναμον μὲ τὸν κῶνον, ὅστις ἔχει βάσιν τὴν τομὴν καὶ κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

5) Εἰς τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ περιγραφῇ κῶνος ἔχων δοθέντα ὄγκον. Νὰ δειχθῇ, ὅτι ὁ ἐλάχιστος τῶν περὶ τὴν δοθεῖσαν σφαῖραν περιγεγραμμένων κώνων ἔχει ὕψος διπλάσιον τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας.

6) Νὰ τμηθῇ ὁ δοθεὶς κύλινδρος δι' ἐπιπέδου παραλλήλου τῇ βάσει οὕτως, ὥστε ἡ βάσις αὐτοῦ νὰ εἶνε μέση ἀνάλογος τῶν δύο μερῶν, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου.

ΤΕΛΟΣ

Κωνσταντίνος

$$\vartheta = \frac{1}{3}\,\frac{\sqrt{a^2 \cdot 2ba \cdot b^2}}{X^1}$$

ΔΧΔ

$\frac{1}{3}$ Α ~~ΚΤΑΚ~~^{2}

$\frac{1}{3}$ Α. για ΑΚ

$\frac{1}{3}$ Α για

125

25

Dauthe

$\frac{1}{3}$ ...ΑΕ

126

44

196

Dauthe

$A - a$

$A + 2a$

$A^2 - Aa$

$2Aa - 2a$

$A^2 + Aa - 2a$

$\frac{1}{3}\pi$ ... $(A^2 + Aa + a^2)$

44

45

220

180

$\pi a^2 u$

110

$=90$ $\quad 9,324$

160

$\frac{1}{3}\pi A^2$

$\frac{1}{3}\pi$ ...

$\frac{1}{3}\pi Aa$

$\frac{1}{3}\pi u (A^2 + Aa$ ...